変化点検出モデルの考察と展開
—製造工程での的確かつ迅速な異常原因究明のために—

棚橋　秀斗，竹本　康彦，有薗　育生

工程管理では工程内の異常の有無をリアルタイムに把握し，生じた異常原因を素早く取り除くことが要求される．この要求に対応するために統計的方法が応用され，管理図が開発された．一方，管理図は，統計的検定に基づく方法であるため，第 2 種の誤りの存在から異常を検知した時点が必ずしも異常の発生時点とは限らない．この問題を解決するための一方法として，管理状態から管理外れ状態への変化の時点を特定するための変化点検出モデルが考案された．本稿では，変化点検出モデルに関するこれまでの研究成果を概観しつつ，筆者らが現在取り組んでいる変化点検出モデルに関する研究を紹介する．最後に，現状の研究における問題点と併せて，今後の展望について言及する．

キーワード：統計的工程管理，変化点検出モデル，尤度理論，情報量規準，状態変化追跡方法

1. はじめに

デジタル・トランスフォーメーション (DX) のスローガンのもと，さまざまな分野で大きな変革が進められている．モノづくりの分野でも例外なく DX の波が押し寄せており，多くのメーカーでは DX 環境を実現するモノづくり現場の構築を進めている．特に，モノづくりにおける DX の中心は生産プロセスや製品に関する「データ」である．製造現場に散在するデータをうまく活用し，生産性向上を図るための取組が実践されている．ここには，不良品の産出を引き起こすような工程異常にいち早く対応するための工程管理も対象として含まれている．

通常，製品を安定的に生産するためには，製造工程をモニタリングし適切な状況であるかどうかを見定める必要がある．このための方法として，管理図が考案された．管理図は，工程が安定的な状態（管理状態）にあるか否かを具体的に見分けるために統計的検定の考えを応用し，そのための実用的な方法として考案されたものである．管理図は JIS Z 9020-1 [1] や ISO7870-1 [2] をはじめ，多くの場で紹介され，実用に供されている．ただし，管理図は統計的検定に基づく手法であり，第 2 種の誤りの存在から管理図が異常を検知した時点が必ずしも実際に異常が発生した時点を指すとは限らない．

管理図において工程の異常が示された場合，異常の原因の究明に着手することになる．しかしながら，工程内の多数の要因の中から真の異常の原因を特定することは必ずしも容易ではない．たとえば稲本と細野 [3] は，異常原因を技術的立場からの検討する手順を次のように紹介している．

- 使用原材料に異常はなかったかどうか．
- 使用機械に異常はなかったかどうか．
- 作業標準どおりの作業がなされたかどうか．
- 作業標準が適切なものであったかどうか．

以上をよく調べる．いままでの経験や技術的知識により，製品の品質特性に影響を与える原因について，起こりやすいものから順に調べていくようにするとよい．

すなわち，異常原因の究明では想定される原因を列挙してしらみつぶしに検証していくことになる．したがって，真の原因にたどり着くまでには多くの時間と手間を費やすことになる．このとき，経験や勘といった暗黙的知見は有用な手立ての一つではあるが，得られたデータを活用した科学的根拠に基づくアプローチは，経験や勘を補完する，あるいは思い込みにとらわれない客観的な結果を導くことができる．

既述のとおり，管理図で工程異常が検知されたとき，第 2 種の誤りの存在から，その時点が必ずしも工程異常が引き起こされた時点とは限らない．これに対して，ISO7870-2 [4] では，異常の検知方法として管理限界

たなばし　しゅうと，ありぞの　いくお
岡山大学大学院自然科学研究科
〒 700–8530 岡山市北区津島中 3 丁目 1 番 1 号
tanabashi@s.okayama-u.ac.jp
arizono@okayama-u.ac.jp
たけもと　やすひこ
近畿大学理工学部機械工学科
〒 577–8502 東大阪市小若江 3–4–1
takemoto@mech.kindai.ac.jp

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

線を越える場合だけでなく，点列の傾向を見て工程異常を判断する方法が例示されている．ただし，傾向が例示されるに留まっており，具体的な工程異常の発生時点が示されるものではない．工程異常の真の原因を究明するにあたって，真に工程異常に陥った時点は大きな手がかりとなる．真に工程異常に陥った時点を明らかにするための研究は変化点検出 (Change Point Detection) と呼ばれ，想定されうる多様な工程異常に対応するために，管理図の打点として用いられる一連のデータからその傾向が変化した時点（変化点）を推定する変化点検出モデルがいくつも考察されてきた．変化点が推定できれば，原因の候補を変化点の前後に起きた出来事に絞って原因究明作業を行うことができる．具体的に，変化点の前後で変更した要因（使用材料，機械の状態，作業者など）があれば工程異常の原因である可能性が高いため，推定した変化点と工程に関する記録を照らし合わせることで異常原因の候補をさらに絞り込むことができる．変化点検出は異常原因の究明作業をデータに基づいて効率的に行うことができる方法といえる．

Samuel et al. [5] は，$\bar{X}$ 管理図において，管理対象となる工程平均に関する変化点検出モデルを考察した．特に，管理状態下の工程平均が，ただ一度，異なる工程平均に変化することから，この変化点検出モデルは単一ステップ変化モデルと呼ばれる．単一ステップ変化モデルのもとで求まる変化点は，工程平均が管理状態下の値か，それとは異なる管理外れ状態下の値かを峻別する時点である．単一ステップ変化モデルの考えのもとで，工程平均を対象とする $\bar{X}$ 管理図以外の管理図，たとえば，不良率を管理対象とする p 管理図に関する研究 [6] や欠点数を対管理象とする u 管理図に関する研究 [7] が実践された．一方，工程状態の段階的変化とは異なり，経時的に連続的変化が想定される場合もある．このとき，単一ステップ変化モデルを想定したうえでモデルの解析を実践した場合，目的とすべき時点とは異なる時点を抽出し，かえって混乱を招く恐れがある．Perry and Pignatiello [8] は，$\bar{X}$ 管理図において，管理外れ状態に移行後に工程平均が経時的に線形変化する状況を想定する場合における変化点検出モデルを考察した．これは，その変化のあり方から線形変化モデルと呼ばれる．これにより，工程状態が異常状態へ推移後の管理対象となるパラメータの変化を想定した変化点検出モデルを考察することができた．上述の研究においては，管理状態下での確率分布と管理外れ状態下での確率分布により尤度関数を構築し，観測結果に基づく最大対数尤度を各変化点で評価する．さらに，最大対数尤度を最大化する変化点の値をその推定値として選択する．工程平均に関する変化点モデルを例にとれば，推定の対象となる変化点を除けば，単一ステップ変化モデルでは移行後の工程平均，線形変化モデルでは移行後の工程平均の変化率が推定対象となる．

ところで，管理外れ状態への移行後のパラメータの変化を適切に想定すれば，変化点をより正確に検出することが可能になると考えられる．しかしながら，パラメータの変化の様相はさまざまに想定することができ，これを画一的に論ずることは難しい．第一歩にあたる研究としては，管理対象となるパラメータに複数の段階的変化を想定することが考えられる．

Hawkins [9] は，工程平均を対象に，管理外れ状態への移行後の工程平均に複数の段階的変化を想定し，複数個の変化点を推定する複数ステップ変化モデルを考察した．この場合，変化点は管理状態と管理外れ状態を分ける時点だけではなく，工程平均がそれ以前の値とは異なる値へ変化する時点すべてを指す．ただし，Hawkins [9] ではこれまでの研究と同様に尤度理論に基づく方法で構築されており，各工程平均の推定値を求めることはできるが，想定される変化点数に応じて推定すべき工程平均の数が異なる場合に，いずれの変化点数が適当かを選択することができない．結果として，変化点数は事前に定めておく，あるいは結果に応じて分析者が主観的に選択することとなる．これに対して，Noorossana and Shadman [10] は，管理対象となる工程平均が経時的に単調増加，あるいは単調減少し続ける場合に限定し，尤度理論の枠組みにおいて管理状態と管理外れ状態を峻別する単調変化モデルを考察した．これにより工程平均の変化の単調性の仮定があるものの，管理外れ状態後の工程平均を段階的変化として求めることが可能となった．

上述の複数ステップ変化モデルの研究を踏まえて，竹本と有薗 [11, 12] は，従来の複数ステップ変化モデルにおけるパラメータ数の異なる状況を統計モデルとして捉え，尤度理論より派生したモデル選択の方法である情報量規準，特に赤池の情報量規準 (Akaike Information Criterion) を用いた複数ステップ変化モデルの求解方法を開発した．さらに，棚橋ら [13] と Takemoto and Arizono [14] はそれぞれ，管理対象がポアソン分布や二項分布に従う場合における複数ステップ変化モデルを検討している．

既述のとおり，管理外れ状態への移行後のパラメー

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

タの変化の様相はさまざまに想定される．仕入れ先の変更や何かしらのショックによりパラメータに一定量の変化が想定される場合もあるが，線形変化モデルのような経時的かつ連続的な変化も想定される．また，最初の変化の後に変化の傾向が変わる場合も想定され，非線形関数のような変化の様相すら考え得る．ただし，非線形関数を想定する場合，その関数形の選択自体にも問題が波及する．ここに，Tanabashi et al. [15] は，管理対象となる工程平均の変化を，複数の線形関数が接合した関数として捉え，接合部分にあたる変化点と線形関数のパラメータ，ならびに線形関数の本数を推定する複数線形変化モデルを構築した．これにより，異常による経時的かつ連続的な影響を反映しつつ，傾向の変化にも対応することが可能となる．

本稿では，上述の棚橋ら [13] および Tanabashi et al. [15] を引用し，主として筆者らによる変化点検出モデルに関する最新の成果を紹介する．本稿の構成は以下のとおりである．1 節において，変化点検出モデルの概要ならびにこれまでの経過を説明した．2 節のはじめに，単一ステップ変化モデル，線形変化モデル，複数ステップ変化モデルならびに単調変化モデルについて，想定する数学モデルを示しつつ先行研究を簡単に紹介する．さらに，棚橋ら [13] および Tanabashi et al. [15] の内容を詳説する．3 節では，現実の工程でのリアルタイムな運用を想定し，提案する変化点検出モデルの運用方法として提案されている状態変化追跡方法について紹介する．4 節では，尤度理論と情報量規準以外の方法による変化点検出モデルを紹介し，さらに今後の課題について整理したうえで本稿を総括する．

2. 変化点検出モデル

2.1 先行研究

単一ステップ変化モデルは製造設備の欠損，使用原材料の納入業者変更や作業者の交代など，工程の構成要素の状態が切り替わることによって工程平均が管理状態とは異なる値に変化する状況を扱うモデルである．Samuel et al. [5] は $\bar{X}$ 管理図にて管理される工程平均を対象に単一ステップ変化における変化点と移行後の工程平均を推定する変化点検出法を提案している．工程の管理状態は平均が μ_0，分散が σ_0^2 であり，異常の発生によって平均のみ未知の値 μ_1 に変化したとする．管理図は第 T 期において工程の異常を検知し，その時点までの各期の群の平均値 $\bar{x}_i, i = 1, \cdots, T$ を得る．この場合において，変化点 τ と変化点以後の平均 μ_1 を推定する．この推定を目的として，統計モデル

$$\mu = \begin{cases} \mu_0, & i = 1, \cdots, \tau \\ \mu_1, & i = \tau + 1, \cdots, T \end{cases} \tag{1}$$

を想定する．このとき，変化点 τ と変化後の工程平均 μ_1 が未知であり，これを観測値より推定する．具体的に，ある変化点 τ のもとでの尤度関数を構築し，工程平均 μ_1 の最尤推定量を得る．さらに，工程平均 μ_1 の最尤推定量に基づく最大対数尤度について，任意の変化点 τ のもとで比較し，最大対数尤度の最大値を与える変化点 τ の値をその推定値として選択する．

他方，線形変化モデルは使用機械の工具の摩耗や作業者の疲労など，使用回数や時間経過によって徐々に悪化することに起因する工程平均の変化を対象としたモデルである．Perry and Pignatiello [8] は $\bar{X}$ 管理図が用いられる工程に向けて，線形変化を想定した変化点検出モデルを提案している．この手法では，工程の平均が変化点以前は既知の管理状態 μ_0 で一定であり，変化点以後は線形関数に従い増加（減少）する統計モデル

$$\mu = \begin{cases} \mu_0, & i = 1, \cdots, \tau \\ \mu_0 + \beta(i - \tau), & i = \tau + 1, \cdots, T \end{cases} \tag{2}$$

を考える．ここで，推定すべきパラメータは変化点 τ と変化後の工程平均の変化率 β である．推定にあたっては，Samuel et al. [5] と同様，尤度理論を活用する．具体的には，ある変化点 τ のもとでの尤度関数を構築し，工程平均の変化率 β の最尤推定量を得る．さらに，工程平均の変化率 β の最尤推定量に基づく最大対数尤度について，任意の変化点 τ のもとで比較し，最大対数尤度の最大値を与える変化点 τ の値をその推定値として選択する．

Hawkins [9] は，工程平均が複数回の変化をもつ複数ステップ変化モデルを考察した．管理状態下での工程平均 μ_0 に対して，統計モデル

$$\mu = \begin{cases} \mu_0, & i = 1, \cdots, \tau_0 \\ \mu_1, & i = \tau_0 + 1, \cdots, \tau_1 \\ \quad \vdots & \\ \mu_k, & i = \tau_{k-1} + 1, \cdots, \tau_k \\ \quad \vdots & \\ \mu_K, & i = \tau_{K-1} + 1, \cdots, \tau_K (= T) \end{cases} \tag{3}$$

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

を考える．ただし，K が工程平均の変化の回数，μ_k ならびに τ_k が k 番目の工程変化における工程平均と変化点を意味する．このとき，K は既知として，$\mu_k, k=1,\cdots,K$ ならびに $\tau_k, k=0,\cdots,K-1$ が未知であり，推定の対象となる．先行研究と同様に，ある変化点の組合せ $(\tau_0,\cdots,\tau_{K-1})$ のもとで尤度関数を構築し，工程平均 $(\mu_1,\cdots,\mu_K)$ の最尤推定量を得る．さらに，工程平均 $(\mu_1,\cdots,\mu_K)$ の最尤推定量に基づく最大対数尤度について，任意の変化点の組合せ $(\tau_0,\cdots,\tau_{K-1})$ のもとで比較し，最大対数尤度の最大値を与える変化点の組合せ $(\tau_0,\cdots,\tau_{K-1})$ をその推定値として選択する．実際に変化点の推定値を求める際に，この最大化問題は

$$L(K,T)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k}(x_i-\hat{\mu}_k)^2 \tag{4}$$

を評価関数とする最小化問題に帰着される．この最小化問題には動的計画法が適用可能であり，変化点の推定値には式 (4) を最小化する組合せを選択する．ここで

$$\hat{\mu}_k=\frac{1}{\tau_k-\tau_{k-1}}\sum_{i=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k}x_i \tag{5}$$

である．ただし，式 (4) の最小化問題において K の値が大きければ大きいほど $L(K,T)$ が小さくなることは自明である．したがって，既述のとおり，変化点数は事前に定めておく，あるいは結果に応じて分析者が主観的に選択することを考えることとなる．

また，Noorossana and Shadman [10] は $\bar{X}$ 管理図が用いられる工程に向けて，工程平均の変化に単調変化を仮定した変化点検出モデルを提案している．この単調変化モデルは，パラメータが管理外れ状態で単調増加（あるいは単調減少）するという仮定のもとで，工程平均が変化し始める時点を推定するモデルである．具体的には，最初の変化点以前の工程平均を既知の値 μ_0 として，変化点 τ 以降は工程平均 μ_i が $\mu_0<\mu_i\leq\mu_{i+1}, i=\tau+1,\cdots,T-1$ のように広義の単調増加であると仮定した

$$\mu=\begin{cases}\mu_0, & i=1,\cdots,\tau\\ \mu_i, & i=\tau+1,\cdots,T\end{cases} \tag{6}$$

の統計モデルを想定する．μ_i の推定問題は，各時点での群の平均 $\bar{x}_i$ を用いて

$$\begin{aligned}&\text{minimize} && \sum_{i=t+1}^{T}(\bar{x}_i-\mu_i)^2\\ &\text{subject to}\\ &\mu_i\leq\mu_{i+1} && \text{for } i=t+1,\cdots,T-1\end{aligned} \tag{7}$$

と定式化することができ，これを解くことによって工程平均ならびに変化点が推定される．

2.2 棚橋ら [13] の研究

ここでは，棚橋ら [13] の研究をもとに，変化点数の推定法を具備した複数ステップ変化モデルについて解説する．棚橋ら [13] では製品の欠点数の管理の際に想定されるポアソン分布を対象とし，この分布の有する強度に関するパラメータの変化の推移を複数ステップ変化モデルとして抽出する．具体的には

$$\lambda=\begin{cases}\lambda_0, & i=1,\cdots,\tau_0\\ \lambda_1, & i=\tau_0+1,\cdots,\tau_1\\ \quad\vdots\\ \lambda_K, & i=\tau_{K-1}+1,\cdots,\tau_K(=T)\end{cases} \tag{8}$$

となる統計モデルを想定する．ここに，K は変化点数あるいはポアソン分布の強度パラメータの状態数を意味する．T は既知であり，ここでは管理図での検出時点を意味する．また，$(\tau_0,\cdots,\tau_{K-1})$ は変化点，$(\lambda_0,\cdots,\lambda_K)$ は強度パラメータを意味する．なお，2.1 節にて紹介した研究はすべて管理状態下のパラメータを既知としているが，棚橋ら [13] では汎用性を考えて式 (8) の $\tau_K(=T)$ 以外は未知として取り扱っている．従来の尤度理論に基づく手続きから上記統計モデルにおける尤度関数を構築し，強度パラメータの最尤推定量を得る．各期での観測値である欠点数を x_i とすると，ある変化点の組合せ $(\tau_0,\cdots,\tau_{K-1})$ のもとでの尤度関数は

$$L(K,T)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{i=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k}(x_i\log\lambda_k-\lambda_k) \tag{9}$$

と得ることができる．ただし，$\tau_{-1}=0$ であり，パラメータの推定に関係しない定数部分はあらかじめ削除しておいた．尤度関数のパラメータ λ_k を式 (9) に基づき求められる最尤推定量

$$\hat{\lambda}_k=\frac{1}{\tau_k-\tau_{k-1}}\sum_{i=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k}x_i \tag{10}$$

に置き換えることによって，変化点数 K のもとでの最大対数尤度を得ることができる．所与の K に関して，式 (9) の最大対数尤度を変化点の組合せ $(\tau_0,\cdots,\tau_{K-1})$

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

のもとで比較し，そのうちで最大を与える変化点の組合せを変化点の推定値とする．このとき，変化点の組合せの探索においては動的計画法を用いることができる．具体的に

$$D(\tau_{k-1},\tau_k)=\sum_{i=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k}\left(x_i\log\hat{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k\right) \tag{11}$$

を定義することで，式 (8) に基づく最大対数尤度は

$$L(0,\tau_0)\equiv 0 \tag{12}$$

を境界条件として

$$L(k,\tau_k)=\max_{k\le\tau_{k-1}<\tau_k}\left[L(k-1,\tau_{k-1})+D(\tau_{k-1},\tau_k)\right] \tag{13}$$

を解くことで得られる．この計算から任意の変化点数における変化点 $(\tau_0,\cdots,\tau_{K-1})$ とそれに対応する強度パラメータ $(\lambda_0,\cdots,\lambda_K)$ が尤度理論に基づいて決定される．

以上の定式化ならびに解法により，任意の変化点数 K のもとで，もっとも適当な変化点の位置を推定することができる．ここで，任意の K について最大対数尤度を比較した場合，所与のデータに対するオーバーフィッティングが生じるため，最大を与える変化点数は $K=T-1$ として求められてしまう．

これを回避するための方法として，情報量規準 [16] が提案されている．棚橋ら [13] では，AIC に基づき変化点数の決定法を与えている．具体的に変化点数 K 個のモデルで推定したパラメータ数から AIC のペナルティ項は

$$B(K)=2K+1 \tag{14}$$

となる．変化点数は AIC を用いて

$$\hat{K}=\underset{0\le K<T}{\arg\min}\left\{-L(K,T)+2K+1\right\} \tag{15}$$

によって推定する．一例として，棚橋ら [13] による変化点検出モデルの数値例を図 1 に示しておく．この数値例では，2 カ所で工程変化が引き起こされていることが確認でき，これが観測データの傾向を理解するうえで有効であると考えられる．

ここで，ペナルティ項に関する留意事項を与えておく．通常，AIC におけるペナルティ項は，その導出過程から連続値として定義され推定されるパラメータの数を用いる．しかしながら，単純な変化点モデルにおいて，ペナルティ項による補正が不足していることが小西と北川 [16] により示されている．これを解決する

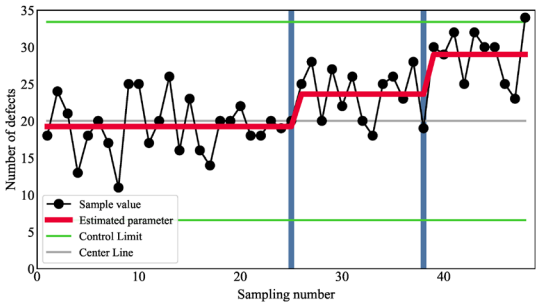


図 1　棚橋ら [13] による変化点検出モデル

方法として，ブートストラップ法を用いた情報量規準 EIC が示されている．ただし，ブートストラップ法では繰り返しを要するリサンプリング手続きが必要とされ，各変化点数を比較するためのペナルティ項を評価するにあたっては，一つの答えを得るために多大な時間がかかることが予想される．一方，竹本と有薗 [11] では，離散値となる変化点数も未知パラメータとしてペナルティ項に算入している．さらにシミュレーションを通じて，変化点数もペナルティ項に算入した方が良い結果が得られることを確認している．後述する状態変化追跡方法にも関係するが，ここで取り扱うペナルティ項の算出方法がリアルタイムな運用においては有効に機能することを申し添えておく．

2.3　Tanabashi et al. [15] の研究

ここでは複数変化点検出を連続的な変化要因の推定に拡張した Tanabashi et al. [15] の研究について解説する．Tanabashi et al. [15] では $\bar{X}$ 管理図にて管理される工程平均を対象に，異常原因により引き起こされる連続的変化を，連続する複数の線形関数とその変わり目に対応する変化点によってモデル化している．具体的には

$$\mu=\begin{cases}\mu_0, & i=1,\cdots,\tau_0\\ \nu_1(i), & i=\tau_0+1,\cdots,\tau_1\\ \nu_2(i), & i=\tau_1+1,\cdots,\tau_2\\ \quad\vdots & \\ \nu_K(i), & i=\tau_{K-1}+1,\cdots,\tau_K(=T)\end{cases} \tag{16}$$

の統計モデルが構築できる．ここで K が変化点数，$(\tau_0,\cdots,\tau_{K-1})$ が変化点を意味する．同じく，T は既知であり，ここでは管理図での検出時点とする．$\nu_k(i)$ は各変化点に対応した線形変化を表す関数

$$\nu_k(i)=\nu_{k-1}(\tau_{k-1})+\beta_k(i-\tau_{k-1}) \tag{17}$$

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

であり，β_k は変化点 (τ_{k-1}, τ_k) 間の線形関数の傾きを表す．ここで変化点 τ_k，$k = 0, \cdots, K-1$ と線形変化の傾き β_k，$k = 1, \cdots, K$ は尤度理論に基づいて推定可能である．ここに，式 (17) からわかるとおり，k 本目の線形関数 $\nu_k(i)$ の初期値は $k-1$ 本目の線形関数の最終値に等しく，前後の線形関数が接合する状況を考えている．したがって，k 本目の線形関数の区間 (τ_{k-1}, τ_k) が同じでも，それ以前の線形関数の区間の取り方 $(\tau_0, \cdots, \tau_{k-2})$ が異なれば，k 本目の線形関数も異なる傾きとなる．この手法では $\nu_0(i)$ が常に μ_0 の定数で与えられることから，動的計画法を用いて前方から順に変化点の組合せおよび線形関数を決定していく．連続する変化点 (τ_{k-1}, τ_k) と τ_{k-1} での工程平均 $\nu_{k-1}(\tau_{k-1})$ が与えられれば，傾きの最尤推定量は

$$\hat{\beta}_k = \frac{-3\nu_{k-1}(\tau_{k-1})}{2(\tau_k - \tau_{k-1}) + 1} + \frac{6\sum_{i=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k}(i - \tau_k)\bar{x}_i}{(\tau_k - \tau_{k-1})(\tau_k - \tau_{k-1} + 1)(2(\tau_k - \tau_{k-1}) + 1)} \tag{18}$$

により計算できる．さらに

$$D(\tau_{k-1}, \tau_k) = 2\times \sum_{i=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k} \left\{ \left(\nu_{k-1}(\tau_{k-1}) - \mu_0 + \hat{\beta}_k(i - \tau_{k-1}) \right) \bar{X}_i \right\} - (\tau_k - \tau_{k-1}) \left\{ \nu_{k-1}(\tau_{k-1})^2 + \hat{\beta}_k(\tau_k - \tau_{k-1} + 1) \times \left(\nu_{k-1}(\tau_{k-1}) + \frac{\hat{\beta}_k(2(\tau_k - \tau_{k-1}) + 1)}{6} \right) \right\} \tag{19}$$

を定義することで，式 (16) に基づく最大対数尤度は

$$L(0, \tau_0) = -\mu_0^2 \tau_0 \tag{20}$$

を境界条件として

$$L(k, \tau_k) = \max_{k \le \tau_{k-1} < \tau_k} [L(k-1, \tau_{k-1}) + D(\tau_{k-1}, \tau_k)] \tag{21}$$

を解くことで得られる．この計算から任意の変化点数における変化点 $(\tau_0, \cdots, \tau_{K-1})$ と傾き $(\beta_1, \cdots, \beta_K)$ が尤度理論に基づいて決定される．ただし，ここでの $L(k, \tau_k)$ は式 (16) および (17) の統計モデルに基づく対数尤度関数に基づくことを申し添えておく．

ここで複数ステップ変化モデルと同様に，変化点数を多く想定した方が尤度が高くなる傾向があるため，AIC を用いて変化点数の推定を行っている．式 (16) の統計モデルにおいて推定されるパラメータ数より，

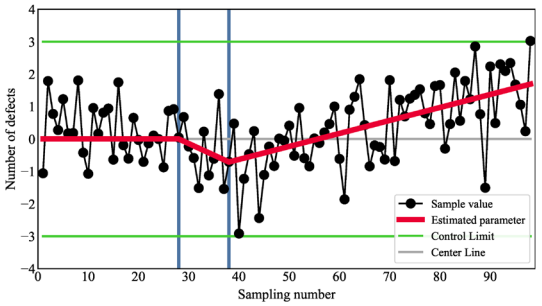


図 2　Tanabashi et al. [15] による変化点検出モデル

AIC のペナルティ項は

$$B(K) = 2K \tag{22}$$

となる．工程平均の分散 $\sigma_{\bar{x}}^2$ を用いれば，変化点数は AIC を用いて

$$\hat{K} = \underset{0 \le K < T}{\arg\min} \left\{ -\frac{L(K, T)}{2\sigma_{\bar{x}}^2} + 2K \right\} \tag{23}$$

として推定される．

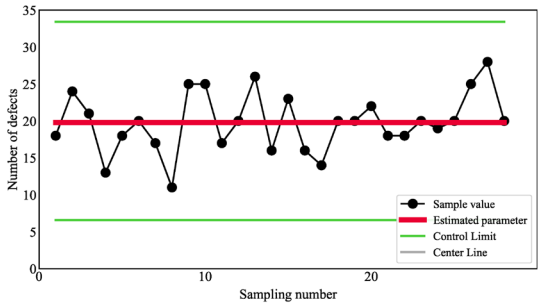
一例として，Tanabashi et al. [15] による変化点検出モデルの数値例を図 2 に示しておく．この数値例では，パラメータが一度減少した後に時間をかけて徐々に増加している様子を，線形変化として捉えることで 2 カ所の変化点として抽出していることが確認できる．

3. 状態変化追跡方法

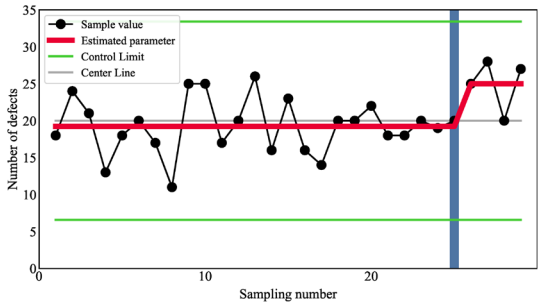
当初の変化点検出モデルに関する研究では，管理図による異常検知の後に適用する状況が想定され，工程異常により変化が生じていると想定されるデータ列に対して管理状態と管理外れ状態を区分する時点を検出する手法であった．一方，複数ステップ変化モデルと複数線形変化モデルでは，管理状態から管理外れ状態を峻別する時点だけでなく，管理外れ状態内での状態の変わり目を指す変化点と変化後のパラメータの値を推定する．その中でも 2.2 節，2.3 節で紹介した変化点検出モデルでは変化点数も推定する．このとき，場合によっては，変化点がない，すなわち初期の状態を維持したままであるという状況を導くことも数学上可能としている．この変化点数の推定は，単に複数個の変化点の推定を可能にするだけではなく，変化点検出モデルの運用方法を広げる可能性をもっている．

竹本と有薗 [11] は，変化点数の推定を含む複数ステップ変化モデルを管理図による異常検知後に適用するのではなく，工程から得た最新のデータに対して逐次的に適用する運用方法を提案した．本論文で紹介する棚

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.



(a) 第 28 期での推定結果



(b) 第 29 期での推定結果

図 3　棚橋ら [13] による状態変化追跡方法の例

橋ら [13] および Tanabashi et al. [15] を例にとった場合，具体的には，式 (8) および (16) において，$\tau_K(=T)$ を管理図により異常を検知した時点ではなく，データを取得した現時点として考え，変化点数の推定を含む複数ステップ変化モデルあるいは複数線形変化モデルを適用することになる．このような運用方法を状態変化追跡方法と呼称する．

図 3 に棚橋ら [13] の成果を用いた状態変化追跡方法の例を示す．データは図 3(a) と同じものを利用し，同図内に c 管理図における管理限界線を併記している．図 3(a) は第 28 期までに取得したデータに対して変化点の推定を行った結果である．この時点では変化点が 0 個と推定され工程は初期状態を保ち続けていると結論づけることとなる．一方，図 3(b) はさらに 1 期分のデータが加わり，第 29 期までのデータから変化点数と位置を推定した結果である．この時点において変化点が 1 個存在し，さらに位置は第 25 期になると推定された．変化点が検出されれば，プロセス管理者はこれを利用して工程の状態が変化した原因を探すことになる．特に，使用材料や機械の状態，作業者などの履歴を用いて，変化点の前後において変わった要因がないか確認することで効率的な原因究明が可能となる．

ここで図 3(b) に示した第 29 期の時点では，データは管理図の管理限界を超えていない．すなわち，管理図での管理限界を超えて発動する変化点検出方法とは異なり，状態変化追跡方法では常に最新のデータを得た時点で状態の変化を考慮している．このため，図 3(b) の結果が示すように，状態変化追跡方法は異常原因の影響による深刻な不具合が出るより前に，プロセス管理者に工程の異常に気づくための情報を与えることが可能である．これにより不良品の産出を引き起こすような工程異常にいち早く対応することができる．なお，実際の運用の際に，管理限界を超えない時点で発見された状態変化に対して，どのように対処するのかは現場の判断によるところが大きい．一方，棚橋ら [13] の手法では，変化点数が 0 から 1 に変わるところ以外にも対応可能であり，状態の変化を逐次更新しながら追跡していくことが可能となっている．これにより，変化の傾向を捉えるなども可能であり，点列の傾向に関するこれまでの考察結果 [17, 18] と照らし合わせて考えることも可能となる．

なお，状態変化追跡方法ではリアルタイムな運用が前提となっている．この点において，既述のとおり，AIC でのペナルティ項の評価に工夫があることを申し添えておく．

4.　おわりに

本稿では，モノづくりにおける DX 推進においてデータが重要な役割を果たす状況を鑑み，データを活用した統計的工程管理に関する研究について論述した．特にここでは，工程状態の変化点を検出することを目的に考察されてきた変化点検出モデルについてこれまでの経過を概説し，さらに筆者らが取り組んできた最新の成果を解説した．DX 環境において重視されるリアルタイム性を鑑みた場合，状態変化追跡方法は有効な方法であり，同時に状態変化の様相を一目でわかるように見える化・可視化していることから，工程管理者において有用な情報を読み取ることも可能である．

一方，本稿では，変化点検出モデルにおいて，単一ステップ変化モデル，線形変化モデル，ならびに単調変化モデルを概説し，筆者らが取り組んできた複数ステップ変化モデルや複数線形変化モデルを詳説した．複数ステップ変化モデルが単一ステップ変化モデルや単調変化モデルを，複数線形変化モデルが線形変化モデルを包含する関係にあると考えることができる．しかしながら，各変化点においてどのような影響によって変化したのかはまちまちで，ステップや線形といった一つの系統だけで工程パラメータの変化の様子を表現することが現実的ではないのかも知れない．また，本稿

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

で紹介した複数線形変化モデルのような関数の接合が必ずしも成り立つとは限らない．その意味においては，上述のモデルが混在するような形で工程パラメータの状態変化の軌跡を追跡することを検討する必要がある．くわえて，今回は工程パラメータが一つに限定されているが，正規分布のように工程平均と工程分散の複数パラメータが存在する場合がある．この場合，工程全体として管理状態，管理外れ状態の峻別を考えることにくわえて，二つのパラメータの変化の傾向を考えることになり，考察するモデルの複雑さが増す．いずれも本稿で紹介する筆者らの研究の延長線上にあるものであり，今後の課題として検討すべき内容だと考えている．

統計的工程管理と称されるごとく，従来の工程管理技法は，数理統計学の工程管理への応用による賜物が中心である．このことから，変化点検出モデルも数理統計学，特に尤度理論に基づくものが主流であったと考えられる．これに対して，Ghazanfari et al. [19] は，数理統計学における検定論・推定論そのものではなく，統計的方法の一つであるクラスタリングを用いた変化点検出手法を提案している．Assareh et al. [20] ならびに Assareh et al. [21] では，ベイズ理論に基づき複数ステップ変化モデルが考察されている．また，Ghiasabadi et al. [22] は人工ニューラルネットワーク (ANN) を用いた変化点検出手法を提案している．ANN では，学習データをどのように収集するかという課題があることから，Ghiasabadi et al. [22] は製造工程でのデータを模して正規分布に従う疑似乱数列を多数生成することで学習データを用意した．統計的方法とベイズ理論や機械学習手法は親和性が高く，両者を融合させるような変化点検出モデル，ひいては工程管理手法の構築は，DX 環境を背景にデータを活用する今後のモノづくりに有効な方法であるとも考える．今後の課題として検討する．

謝辞　本稿において紹介する筆者らの研究の一部は，JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2128 の支援を受けたものである．ここに謝意を表す．

参考文献

[1] 日本規格協会，JIS Z 9020-1:2016 管理図―第 1 部：一般指針，2016.
[2] International Organization for Standardization, ISO 7870-1: 2019 Control charts–Part1: General guidelines, 2019.
[3] 稲本稔，細野康彦，『わかりやすい品質管理（第 4 版)』，オーム社，2016.
[4] International Organization for Standardization, ISO 7870-2:2013 Control charts–Part2: Shewhart control charts.
[5] T. R. Samuel, J. J. Pignatiello Jr. and J. A. Calvin, "Identifying the time of a step change with $\bar{X}$ control charts," *Quality Engineering*, **10**, pp. 521–527, 1998.
[6] J. J. Pignatiello Jr. and T. R. Samuel, "Identifying the time of a step-change in the process fraction nonconforming," *Quality Engineering*, **13**, pp. 357–365, 2001.
[7] T. R. Samuel and J. J. Pignatiello Jr., "Identifying the time of a change in a Poisson rate parameter," *Quality Engineering*, **10**, pp. 673–681, 1998.
[8] M. B. Perry and J. J. Pignatiello Jr., "Estimation of the change point of a normal process mean with a linear trend disturbance in SPC," *Quality Technology & Quantitative Management*, **3**, pp. 325–334, 2006.
[9] D. M. Hawkins, "Fitting multiple change-point models to data," *Computational Statistics & Data Analysis* **37**, pp. 323–341, 2001.
[10] R. Noorossana and A. Shadman, "Estimating the change point of a normal process mean with a monotonic change," *Quality and Reliability Engineering International*, **25**, pp. 79–90, 2009.
[11] 竹本康彦，有薗育生，"状態変化追跡方法の提案とその利活用に関する一考察，" 日本経営工学会論文誌，**66**, pp. 240–248, 2015.
[12] 竹本康彦，有薗育生，"状態変化追跡方法，工程管理支援装置，工程管理支援方法，及び状態変化追跡方法及び工程管理支援方法を実行させるためのプログラム，" 公開特許公報，特開 2013-029901, 2013.
[13] 棚橋秀斗，竹本康彦，有薗育生，"ポアソン過程における状態追跡法，" 日本経営工学会論文誌，**72**, pp. 159–168, 2021.
[14] Y. Takemoto and I. Arizono, "Study on state transition tracking method in process fraction nonconforming," *IFAC PapersOnLine*, **52**, pp. 130–134, 2019.
[15] S. Tanabashi, Y. Takemoto and I. Arizono, "Change point detection for multiple linear trend changes," In *Proceedings of the Asia Pacific Industrial Engineering & Management Systems Conference 2022 (APIEMS 2022)*, paper ID IEM013, 2022.
[16] 小西貞則，北川源四郎，『情報量規準』，朝倉書店，2004.
[17] Western Electric Company, *Statictical Quality Control Handbook*, Western Electric Company, 1956.
[18] L S. Nelson, "The Shewhart control chart: Tests for special causes," *Journal of Quality Technology*, **16**, pp. 237–239, 1984.
[19] M. Ghazanfari, A. Alaeddini, S. T. A. Niaki and M. B. Q. Aryanezhad, "A clustering approach to identify the time of a step change in Shewhart control charts," *Quality and Reliability Engineering International*, **24**, pp. 765–778, 2008.
[20] H. Assareh, R. Noorossana and K. L. Mengersen, "Bayesian change point estimation in Poisson-based control charts," *Journal of Industrial Engineering International*, **9**, paper ID 32, 2013.
[21] H. Assareh, R. Noorossana, M. Mohammadi and K. Mengersen, "Bayesian multiple change-point estimation of Poisson rates in control charts," *Scientia Iranica*, **23**, pp. 316–329, 2016.

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

[22] A. Ghiasabadi, R. Noorossana and A. Saghaei, "Identifying change point of a non-random pattern on $\bar{X}$ control chart using artificial neural networks," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **67**, pp. 1623–1630, 2013.

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.