

組合せゲームにおけるアルゴリズムと計算量

小林 靖明

組合せゲーム理論はオセロ（リバーシ）や将棋といったゲームを数理的に解析する研究分野であり，組合せゲームと呼ばれるゲームに対して，必勝戦略があるかどうかなどを考えるためのさまざまな枠組みを提供している．組合せゲームは数理的な観点で興味深いだけでなく計算論的な観点でも非常に興味深い対象である．本稿では，組合せゲームの計算論的側面に焦点をあて，代表的な結果のうちのいくつかを計算量クラスの観点から解説する．

キーワード：組合せゲーム，アルゴリズムと計算量，グラフ

1. はじめに

アルゴリズムと計算量の文脈において「ゲーム」という単語は必ずしも一つの対象を指すとは限らない．たとえば，アルゴリズム的ゲーム理論 [1] はその文脈における研究として最も有名な分野の一つであろう．本稿で扱う組合せゲームとアルゴリズム的ゲーム理論で扱うゲームは（やや）異なるように見える．組合せゲームは以下のような性質をもつゲームである．

- 二人のプレイヤーが交互に「手」を進める
- サイコロやコインなどの確率的な振る舞いをうけない
- ゲームの局面に関する情報をいずれのプレイヤーも完全にもつ

これらの性質をもつゲームは二人確定完全情報ゲームと呼ばれる¹．オセロ（リバーシ）や将棋などのゲームは，ここで定義される「組合せゲーム」に分類され，麻雀やトランプ（の一部のゲーム）のように，3人以上のプレイヤーで行ったり，対戦相手の手札や山札のように，プレイヤーに隠された情報などがあるゲームは，この「組合せゲーム」には分類されない．

組合せゲームに分類されるゲームは組合せゲーム理論と呼ばれる分野において研究されており，それらの数学的性質やゲームの勝敗に関する解析が行われている．組合せゲームを実際にプレイする場合，プレイヤーの実力や戦略の相性などがゲームの勝敗を決める重要な要素となりうるが，二人のプレイヤーが「最適にプレイをする」と仮定することで，それらの勝敗の分析は数学的な研究対象となりうる．実際に組合せゲーム理論の研究は活発に行われており，非常に深い理論が

構築されている [2–4]．

これらの深い数学的研究と同時に，組合せゲームの計算論的側面の研究も盛んに行われている．組合せゲームの計算論的研究では，与えられたゲームの局面（盤面）を入力とし，その局面からゲームを始めたときに，先手（後手）プレイヤーに必勝戦略があるか（あるいはどちらのプレイヤーにも必勝戦略がないか）を判定する問題を扱う．ここで，（ある入力局面において）あるプレイヤーに必勝戦略があるとは，その対戦相手がどのようにゲームをプレイしたとしても，ゲームに勝利する手筋が存在することをいう．ゲームのルール自体に引き分けがあったり，ゲームは必ずしも有限の手数で終局するとは限らないため，いずれのプレイヤーにも必勝戦略が存在しない場合がありうることに注意する．

本稿では，組合せゲームにおけるアルゴリズムと計算量について，代表的な研究結果のうちいくつかを紹介する．組合せゲームがアルゴリズムと計算量の観点で興味深い点は，非常にシンプルな設定（あるいは現実のゲームと近い設定）において，さまざまな計算量クラスの完全問題が現れることである．たとえば，組合せゲームとパズルの計算量に関する書籍 [5] では，ゲームのプレイヤー数（パズルは一人のゲームと考える）やゲームの性質などが計算量クラスの階層と密接に関わるという分析を与えている．

組合せゲームにおける二人のプレイヤーの「手」は自然に論理式の存在記号と全称記号に対応することが観察できる．あるプレイヤーに必勝戦略が存在すると仮定すると，そのプレイヤーは自分自身の「ある手」を打つことで勝利するか，あるいは「ある手」を打った後の局面においては，対戦相手の「どのような手」を打たれても勝利する手筋が存在することを意味する．こ

こばやし やすあき
北海道大学情報科学研究院
〒011-0814 北海道札幌市北区北14条西9丁目
koba@ist.hokudai.ac.jp

¹ 組合せゲームにおいては，さらに一般的な設定を考える場合もあるが，本稿ではこのようなゲームに注目する．

のような組合せゲームの「論理的構造」がさまざまな概念の「組合せゲーム的解釈」を可能にしている。実際に、組合せゲームの解釈は（有限）モデル理論やさまざまな離散数学の概念と深く（かつ興味深く）関連し、それらの理論の中で重要な役割を果たしている。

本稿の残りでは、組合せゲームのアルゴリズムと計算量を考える。組合せゲームのアルゴリズムや計算量を議論するために、与えられた局面において先手に必勝戦略があるかどうかを判定する問題を考える。このような問題に対する研究の中で、EXP 完全なゲーム、PSPACE 完全なゲーム、NP 完全なゲーム、多項式時間可解なゲームに関するいくつかの代表的な結果を解説する。本稿ではあまり技術的な部分へ立ち入らないようにしているが、グラフやそこで使用される基本的な概念であったり、計算量理論の基本的な概念などは定義なしで用いている。それらのほとんどは標準的テキストなどで確認することができるため、もし必要あれば参照していただきたい。

2. EXP 完全なゲーム

EXP 完全であるような組合せゲームは、ループのあるゲームに代表される。ここで、ループのあるゲームとは、ある局面から手を進めていったとき、再びその局面に戻る可能性があるゲームのことである。たとえばチェスや将棋などはループのあるゲームの例である。通常のルールのチェスであれば、 8×8 のマス目に 6 種類のコマを配置した状態を初期局面としてゲームを始めるが、ゲームの計算量を議論するうえでは一般化する必要がある。実際に、Fraenkel and Lichtenstein [6] は、 $n \times n$ のボードとチェスで使用する 6 種類のコマの配置が入力局面として与えられたとき、先手に必勝戦略があるかどうか判定する問題が EXP 完全であることを示した。また、（一般化された）将棋についても、安達ら [7] によって EXP 完全性が示されている。

これらの問題がクラス EXP に属することは、局面の状態数が高々 $2^{\text{poly}(n)}$ で抑えられることから確認することができる。EXP 困難性については、 G_3 と呼ばれるゲームから多項式時間帰着を与えることで示される。 G_3 の詳細には立ち入らないことにするが、Stockmeyer and Chandra [8] は G_1 から G_6 という 6 個のゲームを考案し、それぞれの EXP 完全性を示している。

3. PSPACE 完全なゲーム

PSPACE 完全であるような組合せゲームは、ループのないゲームに代表される。特に、ループのないゲー

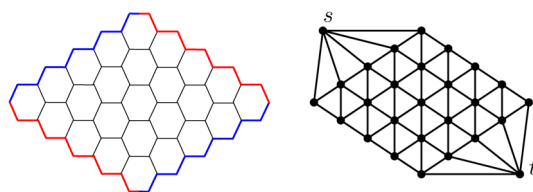


図 1 5 × 5 の Hex のボードとそれに対応するグラフ
モノクロ印刷ではわかりづらいが、左図においては、外の領域に接する左上と右下の辺が青色、右上と左下の辺が赤色である。

ムにおいて、与えられた局面から 1 手で到達可能な局面の数と任意の終局局面までの手数が入力局面の大きさの多項式で上から抑えられるようなゲームを本節では扱う。たとえば、オセロ（リバーシ）などは、1 手で到達可能な局面の数は高々空きマスの個数であり、1 手ごとに空きマスの数が減っていくため、高々空きマスの個数の手数でゲームが終局する。このようなゲームが PSPACE に属することは次のように確認することができる。ある局面から 1 手で得られる次の局面すべてについて、対戦相手に必勝戦略があるかどうかを判定する。（引き分けのないゲームであれば）対戦相手に必勝戦略がない局面への 1 手が存在することが必勝戦略が存在することの必要十分条件となるため、そのような判定ができれば十分である。ある局面において対戦相手に必勝戦略があるかどうかとも再帰的に計算することができるため、探索アルゴリズムを用いて指数時間で必勝戦略の有無を判定することができる。ループのないゲームでは、この探索過程は木をなすことが知られており、本節で考えるゲームにおいてはそのような木を多項式領域で探索することができる。

本節では、Hex と呼ばれる組合せゲームや TQBF 問題とゲームの関係について、さらには、一般化しりと呼ばれる組合せゲームに関して紹介する。

Hex は Piet Hein によって 1942 年に発明されたゲームであるといわれている [9]。Hex は図 1 の左のような六角形が敷き詰められたボード（図では 5×5 ）で行うゲームであり、青と赤のプレイヤーによって対戦するゲームである。それぞれのプレイヤーは交互に空いている六角形の一つに自分の色の石を置く。青（赤）色のプレイヤーは、相対する青（赤）色の辺同士を青（赤）色の石で先につなぐことができれば勝利する。

Even and Tarjan [10] は Hex を次のような形でグラフのゲームとして考えた。頂点 s と t を含む無向グラフ（図 1 の右図）において、「ショート」と「カット」と呼ばれる二人のプレイヤーが交互に s と t 以外

の未選択の頂点を選択することでゲームが進行する。ショートの場合は、自身が選んだ頂点で s と t を連結することで、カットの目的はそれを妨害する、つまり s と t を分離する頂点集合を選ぶことである。ゲームはショートが先手として開始され、先に目的を達成したプレイヤーの勝利である。図 1 の右図で示したグラフでゲームを行うことを考えると、これは 5×5 ボードの Hex と一致することが確認できる。このグラフ上のゲームは 5 節で述べる Shannon のスイッチングゲームの「頂点版」とみなすことができる。Even and Tarjan [10] はその「頂点版」が PSPACE 完全であることを、以下で定義する TQBF 問題から帰着することで示した。

TQBF 問題は以下のように定義される判定問題である。 $\phi(x_1, \dots, x_n)$ を Boole 変数 $x_1, \dots, x_n$ によって定義される CNF 式とする（以下では n は偶数であると仮定する）。TQBF 問題は与えられた CNF 式 $\phi(x_1, \dots, x_n)$ において、命題

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots \forall x_n [\phi(x_1, \dots, x_n)]$$

が真であるかどうかを判定する問題であり、その PSPACE 完全性が Stockmeyer and Meyer によって示されている [11]。この問題は以下のように組合せゲームとして自然に解釈することができる。

$\phi(x_1, \dots, x_n)$ が与えられたとき、各プレイヤーは交互に $i = 1, 2, \dots, n$ の順に Boole 変数 x_i に真あるいは偽を割り当てることでゲームの局面をすすめる（つまり先手は i が奇数である変数に真偽値を割り当てる）。このようにゲームを進めたとき、終局（つまりすべての変数に真偽が割り当てられたとき）においては $\phi(x_1, \dots, x_n)$ の真偽が定まる。もし真となれば先手プレイヤーの勝利であり、偽となれば後手プレイヤーの勝利と定義する。このゲームにおいて先手に必勝戦略があることと、TQBF 問題において命題が真となることは等価であることが観察できる。TQBF 問題の組合せゲーム的側面は、さまざまな組合せゲームの PSPACE 完全性の証明につながったといえる（実際に Schaefer [12] は「TQBF 問題を組合せゲームとして扱える」と述べている）。

Even and Tarjan [10] の結果は Hex を含むようなグラフ上のゲームの困難性を示しているが、オリジナルの Hex の計算困難性は未解決であった。Reisch [9] はこの問題を解決し、 $n \times n$ のボードにおいて初期局面としていくつかの石がすでに置かれた状態でゲームを開始する Hex が PSPACE 完全であることを示した。

その一方で、 $n \times n$ のボードで空の状態からゲームを開始したとき、必ず先手が勝利することが証明できる。この興味深い事実については 5 節で述べる。

Even and Tarjan [10] や Schaefer [12] などの 1970 年代に示された組合せゲームの PSPACE 完全性の結果以降、オセロ（リバーシ）[13] や五目並べ [14] などのわれわれが普段遊ぶ組合せゲームの PSPACE 完全性が示された。それらの結果においては、Schaefer [12] が議論した一般化しりとりが重要な役割を果たしている。

一般化しりとりは、しりとりを有向グラフとして表現し、その有向グラフ上で行われるゲームである。有向グラフ $D = (V, A)$ と開始頂点 $s \in V$ が与えられるとする。頂点 s には石が置かれていると考え、2 人のプレイヤーは交互に現在石が置かれている頂点から有向辺に沿って隣の頂点へ移動する。頂点 v から別の頂点へ石を移動するとき、頂点 v をグラフから削除し、以降の手ではその頂点の上に石を移動できないようにする。このようにしてゲームをプレイするとき、石を移動できなくなったプレイヤーがゲームに敗北する。しりとりで使用可能な語彙を固定し、その語彙に含まれる各語に対応する頂点を考え、ある語の末尾の文字と別の語の先頭の文字が一致するときにそれらの頂点の間を有向辺で結ぶことで有向グラフを作ると、しりとりは一般化しりとりとして考えることができる。Schaefer も一般化しりとりが PSPACE 完全であることを TQBF 問題から多項式時間帰着を与えることで示した。一般化しりとりはグラフ上の組合せゲームとしてモデル化されたことで、さらなる興味深い研究が生まれている。Lichtenstein and Sipser [15] は一般化しりとりで与えられる有向グラフが平面 2 部グラフかつ最大次数（頂点の入次数と出次数の合計の最大値）が 3 以下であっても PSPACE 困難であることを示している。われわれが普段遊ぶ組合せゲームはある意味で「平面的」であるため、この結果は「帰着元」の問題として非常に有用である。

4. NP 完全なゲーム

これまでに議論した組合せゲームは EXP 完全あるいは PSPACE 完全であることから、NP に属さないことが予想される。また、NP に属する決定問題の Yes 入力例には（入力例の）多項式サイズの証拠（witness）が存在するため、ある組合せゲームが NP に属するのであれば、その必勝戦略がそのような小さい証拠として記述される。ここまでに紹介した組合せゲームには

そのような「小さい必勝戦略」は想像しづらく、この直感はこれまで紹介した組合せゲームの困難性とよくあっている。しかしながら、いくつかの組合せゲームは NP に属し、さらにはその完全問題であるものが存在する。本節では、警泥ゲームとその変種について紹介する。

警泥ゲームは n 頂点の連結な無向グラフ上で警察プレイヤーと泥棒プレイヤーによって行われる。ゲームの開始時、警察プレイヤーは最大 k 個の頂点に警察トークンを置き、泥棒プレイヤーは 1 個の頂点に泥棒トークンを置く。警察プレイヤーと泥棒プレイヤーは交互に以下の手順で手を打つ。警察プレイヤーは各警察トークンについて、それを現在の頂点に置いたままにするか、あるいは隣接する頂点に移動する（警察プレイヤーは 1 ターンで複数のトークンを動かすことができる）。その後、泥棒プレイヤーは泥棒トークンが置かれている現在の頂点からトークンを高々 s の距離にある頂点へ移動する。ただし、すでに警察トークンが置いてある頂点に移動したり、通り過ぎることはできないこととする。警察プレイヤーは泥棒トークンが置いてある頂点に警察トークンを移動させることができればゲームに勝利し、泥棒プレイヤーは無限に逃げ続けることができればゲームに勝利する。ゲームにおいては二つのパラメータ k と s があり、 $s = 1$ の場合が最もよく研究されている。 $k = n$ であれば、明らかに警察プレイヤーが勝利するため、できるだけ小さい k において警察プレイヤーに必勝戦略があるかどうかに興味深い論点となる。警察プレイヤーに必勝戦略があるような最小の k は警察数と呼ばれている。

警泥ゲームの計算量についてもよく研究されている。 $s = 1$ において Goldstein and Reingold [16] は、警察トークンと泥棒トークンの初期位置が入力として与えられたとき、警察プレイヤーに必勝戦略があるかどうか判定する問題が EXP 完全であることを示した。また、グラフが有向グラフである場合では、トークンの初期位置を入力として与えない場合であっても EXP 完全であることも示した。Fomin et al. [17] は任意の $s \geq 1$ において警察数の計算が NP 困難であることを示した。 $s = 1$ における警察数の計算の計算複雑性は長年未解決であったが、Kinnarsley [18] によって最終的に解決され、警察数が k 以下であるかどうか判定する問題は EXP 完全であることが示された。

以下では、 $s = \infty$ とし、つまり泥棒トークンは任意の頂点へ移動できるようなゲームを考え、さらにルールを少し変更したゲームを考える。警泥ゲームでは、

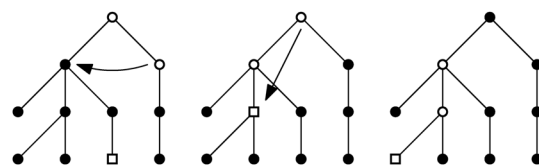


図2 「ヘリコプター」を使った警泥ゲームの進行
 $k = 2$ とし、白丸には警察トークン、四角には泥棒トークンが置かれているとする。左図から右に向かってゲームが進行する。

最初に警察トークンを移動し、その次の手において泥棒トークンを移動した。この部分を以下のように変更する。警察プレイヤーの 1 手と泥棒プレイヤーの 1 手をラウンドとして数える。各ラウンドにおいて、警察プレイヤーは各警察トークンをどこへ移動するか（あるいは移動しないか）を宣言する。その後、泥棒プレイヤーは（警察プレイヤーの宣言を踏まえて）泥棒トークンをどこに移動するか宣言する。各ラウンドの最後に警察トークンと泥棒トークンを同時に移動させる。このようにルールを変更しても、ゲームの勝敗に影響がなさそうに見えるが、「同時に移動させる」ことの扱いによって違いが生じる。ここで考えるゲームでは警察トークンは「ヘリコプター」で移動すると考えられ、トークンを移動させるフェーズにおいて、泥棒トークンは移動しなかった警察トークン以外の任意の頂点を通ることができる（つまり、ヘリコプターで移動する警察トークンは、グラフ上からいったん消え、泥棒トークンの移動後に移動する予定の頂点に置く）。以上のようなラウンドを繰り返してゲームが進み、勝敗条件については通常の警泥ゲームと同様に決定する。

たとえば、グラフが木の場合を考えると、図2のようにゲームが進行する。グラフが木であることをうまく利用すると、徐々に泥棒トークンの逃げ場を狭くすることができる。また、 $k = 1$ では（グラフが 2 頂点以上もつ限り）警察プレイヤーが勝利することができることも容易に観察することができる。

このようにルールを変更することはゲームの計算複雑性にさほど影響を与えるようには見えないが、興味深いことに、このゲームは NP 完全であることが示されている [19, 20]。この事実は、警察プレイヤーに必勝戦略があるとき、単調な必勝戦略（つまり徐々に逃げ場を小さくする戦略）が常に存在することから導かれ、そのような単調な必勝戦略が多項式サイズの証拠となる。さらに Seymour and Thomas [20] は、この事実が木幅と呼ばれるグラフパラメータと非常に関係ありあうことを指摘し、以下の定理を示している。

定理 1 (文献 [20]). G を連結なグラフ, k を整数とする. (ヘリコプターの) 警泥ゲームにおいて警察トーション数 k で警察プレイヤーに必勝戦略が存在すること, G の木幅が $k-1$ 以下であることは等価である.

与えられたグラフの木幅が k 以下であるか判定する問題は NP 完全である [19] ことから, (ヘリコプターの) 警泥ゲームの NP 完全性が得られる. さらに, 警察プレイヤーや泥棒プレイヤーの「能力」をいくらか変更することによって, さまざまなグラフパラメータが警察プレイヤーの必勝戦略として特徴づけられることが知られている [21].

5. 多項式時間可解なゲーム

前節で紹介した NP 完全な組合せゲームと同様に, 多項式時間可解な組合せゲームも興味深い存在である. 本節ではここまで紹介した内容と関連する多項式時間可解な組合せゲームを紹介する.

3 節では $n \times n$ ボードの Hex において, 与えられた局面からゲームを開始したときに先手に必勝戦略があるかどうか判定する問題が PSPACE 完全であることを述べた [9]. しかしながら, 与えられる局面が初期局面, つまり一つも石が置かれていなければ先手に必勝戦略があることが次のように証明できる.

後手に必勝戦略があると仮定しよう. このとき, 先手は 1 手目を任意に選び, それ以降を自分が後手だと思ってゲームをプレイする. 1 手目はどのような手であってもその手によって先手が不利になることはないため, 後手の必勝戦略に沿ってゲームをプレイすれば先手が勝利するが, このことは仮定に矛盾する.

このような議論は戦略拝借論法と呼ばれ, さまざまなゲームにおいて後手に必勝戦略がないことを証明する (Hex は引き分けがないため, 同時に先手の必勝戦略となる). Beck [22] によると, 戦略拝借論法は John Nash によって発明されたとされており, 実際に Hex の必勝戦略の存在証明は Nash によって与えられたとされている. しかしながら, この議論で得られる先手の必勝戦略は非構成的であり, 実際に Hex で勝つための手筋を与えてはくれない. さらに, このような戦略拝借論法が可能なゲームにおいて, 実際の必勝戦略を構成する問題が PSPACE 困難となる例が知られている [23]. Hex における先手の必勝戦略を (多項式時間で) 構成できるかどうかは依然として未解決のままである [22, 23].

2 節で紹介した Hex と関係するグラフ上の組合せ

ゲームは, 頂点を選択する代わりに辺を選択するようにすることで, 新たな組合せゲームを定義することができる. この組合せゲームは Shannon のスイッチングゲームと呼ばれるゲームであり, Claude Shannon によって考えられたとされている [24]. Lehman [24] はこのゲームをマトロイド上のゲームとすることで必勝戦略をもつプレイヤーを特徴づけた. このゲームは先手が「有利」であることを考慮すると,

- (i) ショートが後手開始であっても必勝戦略をもつ
 - (ii) カットが後手開始であっても必勝戦略をもつ
 - (iii) 上のいずれでもないが先手に必勝戦略がある
- という三つの可能性のうちいずれか一つが成り立つ. 以下では, Lehman による議論の概要を紹介する.

一般性を失うことなく G は連結であると仮定でき, さらには G において頂点 s と t は隣接していないと仮定することができる. G に辺 $e = \{s, t\}$ を追加して得られるグラフを H とし, e はどちらのプレイヤーも選択できないものとしてゲームを開始する. e を追加したことで, ショートとカットの目的はそれぞれ「 e を含む閉路を構成する」と「 e を含む s - t カットを構成する」となる. これらは, H において定義されるグラフ的マトロイドとその双対マトロイドにおいて「 e を含むサーキットを構成する」と考えることもできる. (i) を満たすことの必要十分条件は次のように与えられる.

定理 2 (文献 [24]). 与えられた局面において, ショートが後手開始であっても必勝戦略をもつことの必要十分条件は, e を含まない互いに素な H の辺集合 A, B で次の条件を満たすものが存在することである: 辺集合 A と B が張る H の頂点集合 $V(A)$ と $V(B)$ が $V(A) = V(B)$ かつ連結で, さらにそれらは s, t を含む.

この定理の条件を満たすとき, ショートの必勝戦略は以下のように構築できる. $X := V(A) = V(B)$ が連結かつ $s, t \in X$ となる H の互いに素な辺集合を A, B とする. 辺集合 A と B それぞれは $H[X]$ の全域木 T_A と T_B を含む. もし, カットが辺 $f \in T_A$ を選択すると, $T_A - f + f'$ が $H[X]$ の全域木となるような辺 $f' \in T_B$ が (マトロイドの性質により) 存在し, ショートはその辺 f' を選択する. このようにゲームをプレイすることで, ショートはいずれ s と t をつなぐことが可能である. この定理の逆向きの証明もマトロイドの性質を利用することで証明可能であるが, ここでは割愛する. 同様に, (ii) と (iii) であるかどうかの特徴づけることが可能である. 与えられたグラフがこ

これらの条件を満たすかどうかを多項式時間で判定できることが知られている [24].

3節では、一般化しりとりが PSPACE 完全である [12] ことを紹介した. 一般化しりとりが有向グラフ上のゲームであったのに対し、それを無向グラフで行うことは (しりとりとしての意味を失うが) 自然な変種であろう. 興味深いことに、Fraenkel et al. [25] は、この組合せゲームが多項式時間可解であることを示した.

無向グラフ G と開始頂点 s が与えられたとする. 初期局面からある局面まで到達したとき、各プレイヤーの過去の手は G のマッチングを成している (1 手はある辺に沿って石を動かしたことを思い出そう). この観察から、Fraenkel et al. は先手に必勝戦略があることを以下の定理によって特徴づけている.

定理 3 (文献 [25]). 無向グラフ G と開始頂点 s 上の一般化しりとりにおいて、先手に必勝戦略が存在することと任意の最大マッチングが s を含むことが等価である.

もし s を含まない最大マッチング M が存在する場合、その最大マッチングは後手の必勝戦略となり (後手が M に従ってゲームを進め、最後の手の後に先手の手が存在すると、 M に関する増大道が存在し、 M の最大性に矛盾する)、その逆も成り立つ. この定理の条件を満たすことは最大マッチングのアルゴリズムを用いて多項式時間でチェックすることができる.

さらに、Fraenkel et al. [6] は、無向グラフの一般化しりとりにおいて、すでに通った頂点を取り除く代わりに、辺を取り除くようなゲームの計算複雑性を議論している. 彼らは、このゲームの PSPACE 完全性を示し、2 部グラフに限定すると多項式時間可解であることを示している. 2 部グラフにおいては、先手に必勝戦略があるかどうかの特徴づけを与えているが、こちらも非常に興味深いアイデアに基づいている.

6. おわりに

本稿では、組合せゲームに関するアルゴリズムと計算量について紹介した. われわれが普段遊ぶ組合せゲームは EXP 完全や PSPACE 完全であることを紹介した. このような結果は、ある意味でゲームが一筋縄ではいかないことを示し、そのことが組合せゲームで遊ぶときの奥深さをも与えているのかもしれない (たとえば将棋の必勝法が簡単にわかっていたら、ここまで有名にはなっていなかっただろう). また、組合せゲームの

必勝戦略が成す数理的構造は、グラフ理論や離散最適化の研究に対しても興味深い視点を与えているといえる. 本稿に触発されて、新たに組合せゲームのアルゴリズムと計算量の研究に取り組む読者がいれば幸いである.

参考文献

- [1] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos and V. V. Vazirani, *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, 2007.
- [2] M. Albert, R. Nowakowski and D. Wolfe, *Lessons in Play: An Introduction to Combinatorial Game Theory, Second Edition*, A. K. Peters, 2016.
- [3] E. Berlekamp, J. Conway and R. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays (4 vols.)*, A. K. Peters, 2000.
- [4] J. Conway, *On Numbers and Games*, A. K. Peters, 1976.
- [5] R. Hearn and E. Demaine, *Games, Puzzles, and Computation*, A. K. Peters, 2009. (上原隆平訳, 『ゲームとパズルの計算量』, 近代科学社, 2011.)
- [6] A. S. Fraenkel and D. Lichtenstein, “Computing a perfect strategy for $n \times n$ chess requires time exponential in n ,” *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **31**, pp. 199–214, 1981.
- [7] 安達博行, 亀川裕之, 岩田茂樹, “ $n \times n$ 盤面上の将棋の指数時間完全性について,” 電子情報通信学会論文誌, 70-D, pp. 1843–1852, 1987.
- [8] L. J. Stockmeyer and A. K. Chandra, “Provably difficult combinatorial games,” *SIAM Journal on Computing*, **8**, pp. 151–174, 1979.
- [9] S. Reisch, “Hex ist PSPACE-vollständig,” *Acta Informatica*, **15**, pp. 167–191, 1981.
- [10] S. Even and R. Tarjan, “A combinatorial problem which is complete in polynomial space,” *Journal of the ACM*, **23**, pp. 710–719, 1976.
- [11] L. J. Stockmeyer and A. R. Meyer, Word problems requiring exponential time,” In *Proceedings of the 5th Symposium on Theory of Computing, STOC '73*, pp. 1–9, 1973.
- [12] T. J. Schaefer, “On the complexity of some two-person perfect-information games,” *Journal of Computer and System Sciences*, **16**, pp. 185–225, 1978.
- [13] S. Iwata and T. Kasai, “The Othello game on an $n \times n$ board is PSPACE-complete,” *Theoretical Computer Science*, **123**, pp. 329–340, 1994.
- [14] S. Reisch, “Gobang ist PSPACE-vollständig,” *Acta Informatica*, **13**, pp. 59–66, 1980.
- [15] D. Lichtenstein and M. Sipser, “GO is polynomial-space hard,” *Journal of the ACM*, **27**, pp. 393–401, 1980.
- [16] A. S. Goldstein and E. M. Reingold, “The complexity of pursuit on a graph,” *Theoretical Computer Science*, **143**, pp. 93–112, 1995.
- [17] F. V. Fomin, P. A. Golovach, J. Kratochvíl, N. Nisse and K. Suchan, “Pursuing a fast robber on a graph,” *Theoretical Computer Science*, **411**, pp. 1167–1181, 2010.
- [18] W. B. Kinnnersley, “Cops and robbers is EXPTIME-complete,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **111**, pp. 201–220, 2015.

- [19] S. Arnborg, D. Corneil and A. Proskurowski, “Complexity of finding embeddings in a k-tree,” *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **8**, pp. 277–284, 1987.
- [20] P. D. Seymour and R. Thomas, “Graph searching and a min-max theorem for tree-width,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **58**, pp. 22–33, 1993.
- [21] D. Bienstock, “Graph searching, path-width, tree-width and related problems (a survey),” *DIMACS: Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **5**, pp. 33–49, 1991.
- [22] J. Beck, *Combinatorial Games*, Cambridge University Press, 2008.
- [23] G. Bodwin and O. Grossman, “Strategy-stealing is non-constructive,” In *Proceedings of the 11th Innovations in Theoretical Computer Science Conference, ITCS 2020*, pp. 21:1–21:12, 2020.
- [24] A. Lehman, “A solution of the Shannon switching game,” *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **12**, pp. 687–725, 1964.
- [25] A. S. Fraenkel, E. R. Scheinerman and D. Ullman, “Undirected edge geography,” *Theoretical Computer Science*, **112**, pp. 371–381, 1993.