

構造物の最適設計における非線形最適化

寒野 善博

最適設計は、最適化を用いることで、人工物の構成や型、形を決めていく行為を合理化し高度化する方法論である。設計において、要求される機能を満たす設計解のうちなるべく性能が高いものを見出すことを目標とすれば、最適化と自然なつながりが現れる。本稿では、非線形最適化のいくつかの理論や解法が、工学で生じる具体的な最適化問題においてどのような形で活用されるかについて解説する。

キーワード：最適設計、最適性条件、ラグランジュ乗数法、凸関数、相補性条件

1. はじめに

構造物とは、いくつかの部品から構成されるものを、主にその力学的な性状に着目する際に指す言葉である。たとえば、ダムや橋梁、高架橋などは土木構造物である。また、ビルや家屋、ドームなどは建築構造物である。ほかに、自動車やロボットなどを含む種々の工業製品は機械工学で扱われる構造物であるし、航空機や宇宙機は航空工学で扱われる構造物である。このように、構造物は工学のさまざまな分野で共有される概念である。

構造物の設計は、おおまかに言えば、構造物に要求されている性能や機能を実現するために構成や形、大きさを決めていく行為である。設計の過程において最適化を利用することで、構造物の性能をできるだけ高めた設計解を見出したり設計過程を合理化したりする方法論のことを、構造物の最適設計とよぶ。最適設計は、近年、産業界に急速に普及しており、いまや誰もが多くの場面で知らないうちにその恩恵を受けている状況にあるといえる。

本稿では、構造物の最適設計の基本的な問題を対象として、非線形最適化の理論や解法がどのように活用されるかという観点で解説する。

2. トラスとその最適設計

いくつかの直線状の棒材を、互いに回転を拘束することなく接合して作られた構造物のことを、トラスとよぶ。また、棒材のことを部材とよび、接合部を節点とよぶ。部材は弾性体でできており、力を受けるとそれに応じて伸び縮みや曲げという変形が生じる。また、

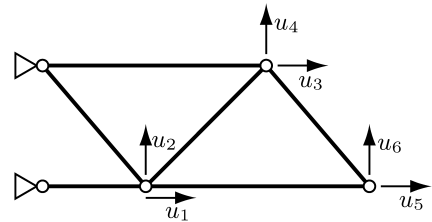


図1 平面トラスの例

その力が取り除かれると元の形状に戻る。図1では、2次元平面内のトラスの部材を線分で表し、節点を白丸で表している。また、三角形を付けた節点は、支点とよばれ、空間内での位置が固定されている。

構造物の外から作用する力を、外力とよぶ。トラスでは、外力は(いくつかの)節点に作用するものとする。外力がかけられると、トラスは変形する。トラスの節点では部材の回転が自由なため、部材は変形後も直線状の形状を保つ(図2)。このため、トラスの変形は(支点以外の)節点の位置を定めれば一意に決まる。図1の例では、節点の位置の変化量 u_1, \dots, u_6 がこれにあたる。このとき、 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_6)^T$ をそのトラスの節点変位とよび、このベクトルの次元を節点変位の自由度とよぶ。外力も、節点変位と同じ座標系を用いることで、 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^6$ のように表す。

トラスの部材は変形後も直線状であるから、部材の変形は伸び縮みのみであり、したがって部材には材軸方向の力(軸力)のみが生じる。このため、ほかの構造形式に比べて、トラスの特性は単純な形で記述できる。また、トラスは、ドームの屋根や鉄塔、鉄橋などとして、工学の多くの分野で用いられている。これらのことから、トラスは構造物の最適設計においても基本的な対象として扱われている。

トラスの最適設計では、グランドストラクチャ法 [1] とよばれる方法が用いられることが多い。グランドストラクチャ法では、まず、図3のように、なるべく多

かんの よしひろ
東京大学数理・情報教育研究センター
〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1
kanno@mist.i.u-tokyo.ac.jp

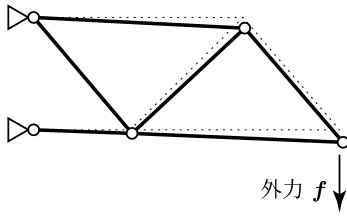


図2 図1のトラスの変形の例

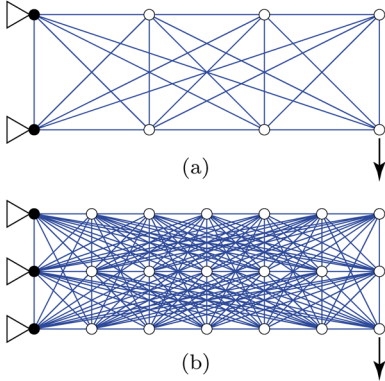


図3 グランドストラクチャの例

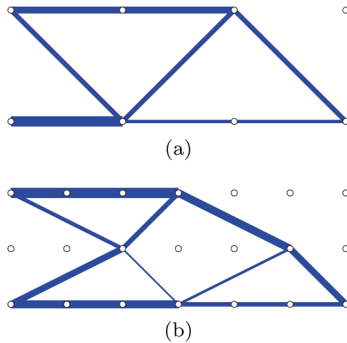


図4 図3のそれぞれのグランドストラクチャから得られる最適解の例(線分の太さが、対応する部材の断面積の大きさを表している)

くの部材の候補を用意する。次に、それぞれの部材の断面積を決定変数として最適化問題を定式化し、それを解く。そして、最適解において断面積が0になった部材を取り除くことによって、図4のような設計解を得る。このように、部材どうしの接続関係を初期設定から変化させる最適設計法を、トラスのトポロジー最適化とよぶ(数学におけるトポロジーとは意味が異なる)。トポロジー最適化のほかに、節点の位置を最適化の決定変数とするなど、いくつかの問題設定がある。

3. コンプライアンス最小化

図3のように外力が一つの節点のみに作用する場合、

その節点の外力方向の変位を最小化することは、ある意味で自然であろう。外力 \mathbf{f} は定ベクトルであり、したがって外力方向の変位の最小化は $\mathbf{f}^T \mathbf{u}$ の最小化ともみなせる。この量 $\mathbf{f}^T \mathbf{u}$ をコンプライアンスとよび、外力が作用する節点の一つとは限らない場合にも、構造物の変形しやすさの指標として用いる。この節では、限られた材料の量でできる限り変形しにくい構造物を設計するための最適化問題を取り上げる。

3.1 最適設計問題の定式化

トラスのグランドストラクチャ(図3)の部材数を m で表し、節点変位の自由度を n で表す。また、部材 i の断面積を $x_i (\geq 0)$ で表す。最適化における決定変数は、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ である。

部材 i の伸びを $e_i \in \mathbb{R}$ で表すとき、 e_i と節点変位 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ の関係を適合条件とよぶ。トラスの変形が十分に小さいという仮定の下では、部材の伸びは節点変位の1次関数で表せる。つまり、適合条件は、ある定ベクトル $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ を用いて

$$e_i = \mathbf{b}_i^T \mathbf{u}, \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

と書ける。一方、部材に生じる軸力 $q_i \in \mathbb{R}$ と外力 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ の釣合いは、同じ $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ を用いて

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i q_i = \mathbf{f} \quad (2)$$

与えられる。さらに、伸び e_i と軸力 q_i の関係は、フックの法則より

$$q_i = \frac{E}{c_i} x_i e_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

と書ける。ここで E はヤング率とよばれる材料に固有の正の定数であり、 c_i は変形前の部材の長さを表す。

式(1)を式(3)に代入し、その結果を式(2)に代入すれば、未知数である e_i および q_i を消去できる。その結果、 \mathbf{u} を未知数とする線形方程式(釣合式)

$$K(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4)$$

が得られる。ここで $K(\mathbf{x})$ は剛性行列とよばれる n 次の対称行列で、次のように定められる:

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m x_i K_i, \quad (5)$$

$$K_i = \frac{E}{c_i} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

E および c_i は正の定数であるから、 K_i は半正定値対称な定行列である。

以下では、節点変位 \mathbf{u} が部材の断面積 \mathbf{x} の関数であることを明確にするために、釣合い式の解を $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ と書く：

$$K(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}. \quad (7)$$

このとき、コンプライアンスは

$$w(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^\top \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

で定義される。

断面積をいくらかでも大きくしてよいのであれば節点変位はいくらでも小さくできるので、部材の体積の総和に上限値 \bar{V} を定める。部材の体積の総和は、 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)^\top$ とおくと、 $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ で表せる。また、部材の断面積は非負である。以上より、コンプライアンス最小化問題は、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ を決定変数として次の非線形最適化問題として定式化できる：

$$\text{Minimize } w(\mathbf{x}) \quad (9a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \bar{V}, \quad (9b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (9c)$$

図4は、図3のグランドストラクチャに対するコンプライアンス最小化問題(9)の最適解である。

3.2 最適性条件

この節では、問題(9)の最適解が満たすべき条件を求めてみる。

まず、関数 w の勾配は次のように求められる。式(7)の両辺を x_i で偏微分し、式(5)を用いると

$$K_i \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + K(\mathbf{x}) \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

が得られる。これを用いると、 w の勾配は

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}^\top \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \\ &= -\mathbf{f}^\top K(\mathbf{x})^{-1} K_i \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \\ &= -\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})^\top K_i \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

のように計算できる。ただし、最後の等式には再び式(7)を用いた。

行列 K_i は半正定値なので、釣合い式(7)を満たす $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) (\neq \mathbf{0})$ が存在するような任意の \mathbf{x} に対して

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \leq 0$$

が成り立つ。特に、式(1)と式(6)より、伸び $\mathbf{b}_i^\top \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ が0でない部材に対しては

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x}) < 0$$

が成り立つ。つまり、そのような部材の断面積 x_i を大きくすれば、目的関数値 $w(\mathbf{x})$ は減少する。したがって、体積制約(9b)は最適解において等号で成立する。

以下では、簡単のために、最適解では断面積 x_i が0になる部材は存在しないことを仮定する。すると、この最適設計問題は、目的関数 $w(\mathbf{x})$ を等式制約 $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} = \bar{V}$ の下で最小化する問題とみなせる。等式制約をもつ非線形最適化に対するラグランジュ乗数法により、最適解 \mathbf{x}^* では、ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して条件

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*)^\top K_i \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*) = \lambda c_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (10)$$

が成立する。つまり、 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*)^\top K_i \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*) / c_i$ の値はすべての部材で共通である。式(10)に式(6)を代入して

$$E \frac{(\mathbf{b}_i^\top \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*))^2}{c_i^2} = \lambda, \quad i = 1, \dots, m$$

を得る。つまり、断面積が0でない部材については、 $E|\mathbf{b}_i^\top \mathbf{u}|/c_i$ の値が共通であることがわかる。さらに式(1)および式(3)を用いると、この値は $|q_i|/x_i$ と書ける。つまり、最適解での部材の断面積 x_i は、軸力 q_i の大きさに比例する。平たく言えば、最適解では各部材が「同等に頑張っている」、あるいは「ほかより余裕のある部材はない」ということであり、コンプライアンスを目的関数とする合理性が表れているといえる。

3.3 コンプライアンスの凸性

トラスのコンプライアンスは、凸関数である。このことは、式(8)とは少し異なる表現を用いると、容易に示せる。

部材断面積 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ に対して、関数 $\Phi(\mathbf{x}; \cdot)$ を

$$\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{u}) = 2\mathbf{f}^\top \mathbf{u} - \mathbf{u}^\top K(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (11)$$

で定義する。式(5)と K_i ($i = 1, \dots, m$) の半正定値性より $K(\mathbf{x})$ は半正定値であるから、 $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{u})$ は \mathbf{u} について凹関数である。このとき、コンプライアンスは

$$\tilde{w}(\mathbf{x}) = \sup\{\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$$

と表せる。右辺の最大化問題の最適性条件は釣合い式(4)であり、これを式(11)に代入することで $\tilde{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^\top \mathbf{u}$ が成り立つことを確認できる¹。

関数 \tilde{w} が凸関数であることを示すには、任意の点 \mathbf{x} 、 $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ と任意のスカラー $\alpha \in [0, 1]$ に対して不等式

¹ より正確には、式(11)を満たす $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ が存在するときに $\tilde{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^\top \mathbf{u}$ が成り立ち、存在しないときには $\tilde{w}(\mathbf{x}) = +\infty$ である。このため、前節までのコンプライアンス $w(\mathbf{x})$ とは記号を少し変えている。

$$\tilde{w}(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) \leq \alpha\tilde{w}(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)\tilde{w}(\mathbf{y}) \quad (12)$$

が成り立つことを示せばよい。式 (5) より $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{u})$ は \mathbf{x} に関して線形関数であるから、

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}; \mathbf{u}) \\ = \alpha\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{u}) + (1 - \alpha)\Phi(\mathbf{y}; \mathbf{u}) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、不等式

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{u}} \{\Phi(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}; \mathbf{u})\} \\ = \sup_{\mathbf{u}} \{\alpha\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{u}) + (1 - \alpha)\Phi(\mathbf{y}; \mathbf{u})\} \\ \leq \sup_{\mathbf{u}} \{\alpha\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{u})\} + \sup_{\mathbf{u}} \{(1 - \alpha)\Phi(\mathbf{y}; \mathbf{u})\} \\ = \alpha \sup_{\mathbf{u}} \{\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{u})\} + (1 - \alpha) \sup_{\mathbf{u}} \{\Phi(\mathbf{y}; \mathbf{u})\} \end{aligned}$$

が得られる (ただし、不等号は、一般に \mathbf{u} が $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{u})$ と $\Phi(\mathbf{y}; \mathbf{u})$ の両方を同時に最大化できないことから成り立つ)。このことと \tilde{w} の定義から、式 (12) が得られる。

コンプライアンス最小化問題 (9) の制約はすべて 1 次式であるから、この問題は凸最適化問題である。このため、問題 (9) の局所最適解は大域的最適解であることが保証される。したがって、最適解で断面積が 0 になる部材が存在しない場合には、3.2 節で導いた最適性条件を満たす解が大域的最適解である。

4. 応力制約の下での最適設計

トラスの部材が伸び縮みすると、部材の内部に軸力 (材軸方向の力) が生じる。軸力を部材の断面積で除した量を応力とよび、部材 i の応力を

$$\sigma_i = \frac{q_i}{x_i} \quad (13)$$

で表す。変形により部材が受ける負荷の大きさは応力で決まるため、応力の大きさに関する制約

$$|\sigma_i| \leq \bar{\sigma}, \quad i = 1, \dots, m$$

を満たす設計解を求めることは重要である。ここで、 $\bar{\sigma}$ は応力の大きさの上限値 (指定値) である。

この節では、応力制約の下でトラスの部材の体積の総和を最小化する最適設計問題をとりあげ、それがどう定式化され、どのようにして解かれるかを見る。

各部材の応力は、式 (1), (3), (13) より、節点変位の関数として

$$\hat{\sigma}_i(\mathbf{u}) = \frac{E}{c_i} \mathbf{b}_i^\top \mathbf{u} \quad (14)$$

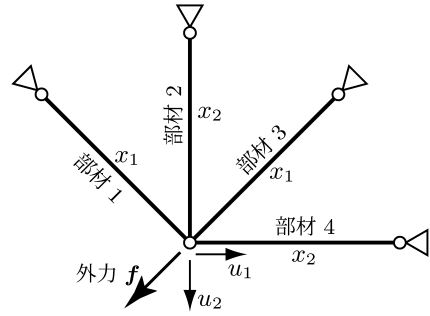


図 5 応力制約の最適設計問題の例題

と書ける。また、釣合い状態での節点変位は、式 (4) で与えられる。したがって、応力制約の下での最適設計問題は、 \mathbf{x} および \mathbf{u} を決定変数として、次のように定式化すればよいように思える：

$$\text{Minimize} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad (15a)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (15b)$$

$$|\hat{\sigma}_i(\mathbf{u})| \leq \bar{\sigma}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (15c)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (15d)$$

例 1. 図 5 に示す、4 部材 2 自由度のトラスを考える [2]。部材の長さはすべて 1 とし、ヤング率も 1 とする (簡単のため、物理量の単位を省略する)。また、部材 1 と 3 の断面積は同じで x_1 とし、部材 2 と 4 の断面積は同じで x_2 とする。応力の上限値は、部材 1 と 3 については 1 とし、部材 2 と 4 については 2 とする。また、外力を $\mathbf{f} = (-1, 1)^\top$ とする。

非線形最適化問題の標準的な解法としては、逐次 2 次計画法や内点法があげられる [3, 4]。そこで、問題 (15) を逐次 2 次計画法で解いてみる。MATLAB の関数 `fmincon` を用いると、 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0.7071 (= \sqrt{2}/2)$ が最適解として得られる。目的関数値は $\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} = 2.8284 (= 2\sqrt{2})$ である。 ■

図 5 の例題においてトラスのトポロジーの変化も考慮すると、実は、例 1 の解よりも目的関数値の小さい解が存在する。すなわち、解 $\mathbf{x}^* = (0, 0.5)^\top$ における目的関数値は $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = 1$ である。このとき、部材 2 と部材 4 の応力は 2 であり、上限値と一致している。一方、式 (14) に従って部材 3 の応力を計算すると 2.8284 となり上限値である 1 を超えているが、解 \mathbf{x}^* では部材 3 は存在しない (断面積が $x_3^* = 0$ である) ためにこれは差し支えない。あとで示すように、この解 \mathbf{x}^* がこの例題の最適解である。

このように、応力制約は断面積 x_i が 0 でない部材

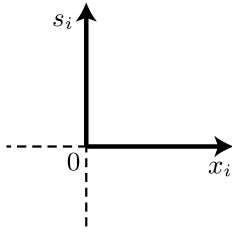


図6 相補性制約 $x_i s_i = 0$ および不等式制約 $x_i \geq 0$, $s_i \geq 0$ を満たす領域 (図の太線部分)

のみに対して課すべきで, $x_i = 0$ になった部材については制約をとり除く必要がある. そこでまず

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_i(\mathbf{u}) \leq \bar{\sigma} & (x_i > 0 \text{ のとき}), \\ \hat{\sigma}_i(\mathbf{u}) \text{ には制約なし} & (x_i = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (16)$$

という条件を考えると, これは補助的な変数 $s_i \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\hat{\sigma}_i(\mathbf{u}) \leq \bar{\sigma} + s_i, \quad s_i \geq 0, \quad (17)$$

$$x_i s_i = 0 \quad (18)$$

と書くことができる². 同様に, 条件

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_i(\mathbf{u}) \geq -\bar{\sigma} & (x_i > 0 \text{ のとき}), \\ \hat{\sigma}_i(\mathbf{u}) \text{ には制約なし} & (x_i = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (19)$$

は, 補助的な変数 $t_i \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\hat{\sigma}_i(\mathbf{u}) \geq -\bar{\sigma} - t_i, \quad t_i \geq 0, \quad (20)$$

$$x_i t_i = 0 \quad (21)$$

と書くことができる.

例 2. 問題 (15) の制約 (15c) を条件 (17), (18), (20), (21) に変更して, 逐次 2 次計画法 (MATLAB の `fmincon`) で解いてみる. ただし, 決定変数は \mathbf{x} , \mathbf{u} , \mathbf{s} , \mathbf{t} である. 逐次 2 次計画法で得られる解は, 例 1 と同じ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0.7071$ であった. 次に, `fmincon` で内点法のオプションを使用した場合は, 実行結果は初期点に依存した. たとえば $x_1 = x_2 = 2$ を初期点とすると $(x_1, x_2) = (0, 0.5249)$ が得られ, $x_1 = x_2 = 4$ を初期点とすると $(x_1, x_2) = (0, 0.8694)$ が得られた. いずれの場合も, 目的関数の値は解 \mathbf{x}^* のそれよりも大きい. ■

² $x_i > 0$ のとき, 式 (18) より $s_i = 0$ が得られるから, 式 (17) は $\hat{\sigma}_i(\mathbf{u}) \leq \bar{\sigma}$ を意味する. また, $x_i = 0$ のときは, s_i が十分に大きな値をとることにより, 式 (17) は実質的に $\hat{\sigma}_i(\mathbf{u})$ の値を制限しない. なお, 式 (16) と等価な条件という意味では, 式 (17) の 2 番目の不等式はなくてもよい.

例 2 で最適解 \mathbf{x}^* が得られなかったのは, この最適化問題の制約に相補性条件 (18), (21) が含まれるからである (図 6). このような最適化問題は, 相補性制約をもつ数理計画問題 (MPCC) [5] や均衡制約をもつ数理計画問題 (MPEC) [6, 7] とよばれており³, 通常非線形最適化問題とは異なる特別な取り扱い方を要することが知られている.

通常非線形最適化問題では, KKT (Karush–Kuhn–Tucker) 条件が最適性の必要条件を与える. このため, 非線形最適化の多くの解法は, KKT 条件を満たす点を求めることを目標としている. ここで, KKT 条件が最適性の必要条件であることを保証するには, 何らかの制約想定 (制約に関する仮定) が必要である [6] (3.6 節). ところが, 相補性条件とそれに伴う不等式制約 (図 6) を制約にもつ最適化問題では, 任意の実行可能解において, 標準的な制約想定が満たされない [6] (補題 5.3). このため, そのような最適化問題の最適解では, KKT 条件を満たすラグランジュ乗数が存在するとは限らない. これが, 例 2 において最適解 \mathbf{x}^* が得られなかった原因と考えられる.

例 3. 応力制約の例題の実行可能領域を, 図示してみよう. 図 5 のトラスに対して

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_3 &= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_4 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であり, これを用いると剛性行列は

$$K(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)I$$

である. したがって, 節点変位は

$$\mathbf{u} = \frac{1}{x_1 + x_2} \mathbf{f}$$

と求められる. 各部材の応力は, $\mathbf{f} = (-1, 1)^\top$ および式 (14) より, 断面積 \mathbf{x} の関数として

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_4 = \frac{1}{x_1 + x_2}, \quad \sigma_3 = \frac{\sqrt{2}}{x_1 + x_2}$$

と得られる.

$x_1 > 0$ のとき, 部材 3 の応力制約 $\sigma_3 \leq 1$ より条件

³ MPCC は, mathematical program with complementarity constraints の略である. また, MPEC は, mathematical program with equilibrium constraints の略である.

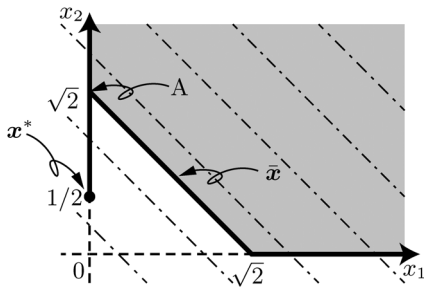


図7 応力制約の問題の実行可能領域と目的関数

$x_1 + x_2 \geq \sqrt{2}$ が得られる. 一方, $x_1 = 0$ のときは部材 3 には制約が課されないで, 部材 2 および 4 の応力制約 $\sigma_2 \leq 2$ より条件 $x_1 + x_2 = x_2 \geq 1/2$ が得られる. 以上より, 実行可能領域は図 7 に示すとおりである. ■

例 3 の図 7 において, 実行可能領域は点 \mathbf{x}^* から点 A までの線分を含んでいる. これが, 相補性条件を制約に含む場合の特徴といえる. この特徴は, 最適設計の分野では応力制約の特異性とよばれ, 古くから知られている [2, 8]. 次の例 4 および例 5 では, 相補性条件を少し変更することで, 非線形最適化の標準的な解法を適用可能にする方法を紹介する.

例 4. 定数 $\epsilon > 0$ を用いて, 相補性制約 (18) および (21) を制約

$$x_i s_i \leq \epsilon, \quad x_i t_i \leq \epsilon$$

へと緩和する [9]. すると, 標準的な制約想定が満たされるため, 通常非線形最適化の解法が適用できる. そこで, この緩和問題を, $\epsilon > 0$ を逐次的に小さくしながら解くという手法が考えられる.

実際に, 逐次 2 次計画法を適用してみた. パラメータ ϵ の初期値を 0.1 とし, これを 0.1 倍しながら緩和問題を逐次的に解いたところ, $\epsilon = 10^{-5}$ となった時点で最適解 $(x_1^*, x_2^*) = (0.0000, 0.5000)$ が得られた. ■

例 5. 最適設計の分野では, 応力制約の特異性を解消する方法として, ϵ 緩和法 [10] とよばれるものがよく知られている. まず, 断面積に非負制約 $x_i \geq 0$ が課されていることに注意すると, 応力制約 (16) および (19) は, 補助的な変数 y_i および z_i を用いて次のように書き直せる⁴:

$$y_i = \hat{\sigma}_i(\mathbf{u}) - \bar{\sigma}, \quad z_i = -\hat{\sigma}_i(\mathbf{u}) - \bar{\sigma}, \quad (22)$$

$$x_i y_i \leq 0, \quad x_i z_i \leq 0. \quad (23)$$

ϵ 緩和法では, 十分に小さなパラメータ $\epsilon > 0$ を用いて制約 (23) および $x_i \geq 0$ を次のように変更する⁵:

$$x_i y_i \leq \epsilon, \quad x_i z_i \leq \epsilon, \quad x_i \geq \epsilon^2.$$

この変更を施した問題を逐次 2 次計画法で実際に解いてみると, $\epsilon = 10^{-5}$ に対して最適解 $(x_1^*, x_2^*) = (0.0000, 0.5000)$ が得られた⁶. ■

なお, この節のように外力が 1 パターンのみの場合には, この節の解説とは別の論理⁷により線形計画を用いて最適解を求めることができる [12]. したがって, この節の考察が真に必要なのは, 複数パターンの外力を考慮する場合である. しかし, 説明の簡単のために, この節では 1 パターンのみの外力を扱った.

5. おわりに

本稿では, 構造物の最適設計を題材にして, 非線形最適化の理論や解法がどのように適用されるかを見た. 具体的には, 等式制約付き最適化問題の最適性の必要条件を導くラグランジュ乗数法, 大域的な最適性の議論に関わる関数の凸性, 制約に現れる場合には特別な注意を要する相補性条件, などの話題を扱った.

本稿では, 直線状の部材から構成される構造物のうち, トラスとよばれる構造物を対象とした. このほかに, 骨組構造も, 主に直線状の部材から成る構造物である (部材どうしの接合の仕方が, トラスとは異なる). トラスや骨組構造の最適設計については, 文献 [13, 14] にまとめられている. 一方, 任意形状の構造物は連続体として扱われることが多いが, 連続体の最適設計については文献 [15, 16] などがある. また, 工学における最適設計の全般に関するハンドブックに, 文献 [17]

⁴ $x_i > 0$ のとき, 式 (23) より $y_i \leq 0$ および $z_i \leq 0$ が成り立つが, この不等式に式 (22) を代入することで $|\hat{\sigma}_i(\mathbf{u})| \leq \bar{\sigma}$ が得られる. また, $x_i = 0$ のときは, 式 (23) は任意の y_i および z_i について成り立つので, 式 (22) の $\hat{\sigma}_i(\mathbf{u})$ も任意の値をとれる.

⁵ この変更は最適設計の分野では「 ϵ 緩和法」という名前がよく知られているが, ここで導入する制約 $x_i \geq \epsilon^2$ は元の制約 $x_i \geq 0$ を狭めている. したがって, 「元の問題の任意の実行可能解は, 緩和した問題の実行可能解でもある」という意味での「緩和」ではない.

⁶ 実際に得られた数値は $(x_1, x_2) = (1.0000 \times 10^{-10}, 4.9999 \times 10^{-1})$ であり, x_1 の値が下限値 ϵ^2 に等しくなっている.

⁷ 具体的には, 適合条件 (1) を無視することで線形計画問題として定式化できる. この問題の端点解は静定トラス (つまり, 任意の部材の伸び \mathbf{e} に対して適合条件を満たす節点変位 \mathbf{u} が存在するようなトラス) であるため, 適合条件を無視したことが正当化される [11].

がある。

3節では、トラスのコンプライアンス最小化問題を非線形最適化の観点で扱い、それが凸最適化問題であることを示した。この問題は、2次錐計画問題 [18] や半正定値計画問題 [19] に帰着できることが知られている。

4節では、応力制約を相補性条件の形で扱った。この制約は、相補性条件の中でも特別な形をしているため、特に vanishing constraint [20] として考察している文献もある。非線形最適化を利用して相補性条件をもつ数値計画問題を解く手法としては、例4で紹介した正則化のほかに、相補性条件の再定式化とその平滑化とよばれる変形を用いる手法もある [21, 22]。

参考文献

- [1] W. S. Dorn, R. E. Gomory and H. J. Greenberg, “Automatic design of optimal structures,” *Journal de Mécanique*, **3**, pp. 25–52, 1964.
- [2] G. Cheng and Z. Jiang, “Study on topology optimization with stress constraints,” *Engineering Optimization*, **20**, pp. 129–148, 1992.
- [3] 矢部博, 『工学基礎・最適化とその応用』, 数理工学社, 2006.
- [4] 山下信雄, 『非線形計画法』, 朝倉書店, 2015.
- [5] H. Scheel and S. Scholtes, “Mathematical programs with complementarity constraints: Stationarity, optimality, and sensitivity,” *Mathematics of Operations Research*, **25**, pp. 1–22, 2000.
- [6] 福島雅夫, 『非線形最適化の基礎』, 共立出版, 2001.
- [7] Z.-Q. Luo, J.-S. Pang and D. Ralph, *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, 1996.
- [8] G. Sved and Z. Ginos, “Structural optimization under multiple loading,” *International Journal of Mechanical Sciences*, **10**, pp. 803–805, 1968.
- [9] S. Scholtes, “Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints,” *SIAM Journal on Optimization*, **11**, pp. 918–936, 2001.
- [10] G. Cheng and X. Guo, “ ε -relaxed approach in structural topology optimization,” *Structural Optimization*, **13**, pp. 258–266, 1997.
- [11] C. Y. Sheu and L. A. Schmit, “Minimum weight design of elastic redundant trusses under multiple static loading conditions,” *AIAA Journal*, **10**, pp. 155–162, 1972.
- [12] G. Cheng, “Some aspects of truss topology optimization,” *Structural Optimization*, **10**, pp. 173–179, 1995.
- [13] M. Ohsaki, *Optimization of Finite Dimensional Structures*, CRC Press, 2010.
- [14] J. S. Arora, *Introduction to Optimum Design (2nd Edition)*, Elsevier Academic Press, 2004.
- [15] 西脇真二, 泉井一浩, 菊池昇 (著), 日本計算工学会 (編), 『トポロジー最適化』, 丸善出版, 2013.
- [16] 畔上秀幸, 『形状最適化問題』, 森北出版, 2016.
- [17] 山川宏 (編), 『最適設計ハンドブッカー基礎・戦略・応用一』, 朝倉書店, 2003.
- [18] 寒野善博, “2次錐計画の構造力学への応用,” *オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学*, **59**, pp. 725–731, 2014.
- [19] Y. Kanno, *Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization*, CRC Press, 2011.
- [20] W. Achtziger and C. Kanzow, “Mathematical programs with vanishing constraints: Optimality conditions and constraint qualifications,” *Mathematical Programming*, **114**, pp. 69–99, 2008.
- [21] M. Fukushima, Z.-Q. Luo and J.-S. Pang, “A globally convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints,” *Computational Optimization and Applications*, **10**, pp. 5–34, 1998.
- [22] F. Tin-Loi, “A smoothing scheme for a minimum weight problem in structural plasticity,” *Structural Optimization*, **17**, pp. 279–285, 1999.