

都市経済モデルにおける非線形最適化 —Fujita-Ogawa モデルを例に—

林 俊介

都市は空間上に不均一にかつ集積しながら分布しているが、その集積メカニズムを理論的かつ数理的に説明すべく提案されたのが Fujita-Ogawa (FO) モデルである。本稿では、都市経済モデルにおける非線形最適化の一例として FO モデルを挙げ、このモデルにおける均衡解を求める問題がどのように非線形最適化問題に帰着されるかについて概説する。また、既存の求解アプローチや図を用いた計算結果についてもいくつか紹介する。なお、本稿はあくまで非線形最適化をテーマとした特集記事の一つであるので、難しい経済理論の導入や結果の経済的な意味づけはなるべく避け、非線形最適化を学び始めた学生でもわかるような内容に抑えてある。

キーワード：非線形最適化, Fujita-Ogawa モデル, 相補性問題

1. はじめに

多くの都市では中心部に商業施設などが集積する都心が形成され、都市規模によっては都心から少し離れたところに副都心が形成されることがある。たとえば、東京ならば銀座・丸の内周辺に都心が形成され、少し離れた渋谷・新宿・池袋に副都心が形成されている。また、もっと離れたところに目を向けてみると、吉祥寺・立川・八王子・町田といったより小規模の経済圏がある程度の間隔で形成されている。

また、日本地図を俯瞰で見てみると、最大の経済圏として首都圏があり、そこから数百キロ離れて中京圏と近畿圏が形成されている。さらに離れたところに札幌・仙台・広島・福岡と呼ばれる地方経済圏がある。日本の人口減少、それに伴う地方の衰退が叫ばれて久しいが、札幌・仙台・広島・福岡の4都市は地方都市でありながらもいまだに成長を続けている。

このように、都市は空間上に均一に分布するのではなく、不均一にかつ数か所に集積しながら分布している。その集積がどのようなメカニズムで起こるのか、またどのような集積パターンが形成されるのか、を理論的に説明すべく提案された数理モデルの一つが Fujita-Ogawa (FO) モデル [1] である。

FO モデルでは、都市の集積・分散が企業間の交流便益による効用、家計の通勤費用による不効用、土地の制約による地代の上昇などによって起こるものと規定している。また、それらの集積力と分散力のバランス

によって生まれる均衡状態が相補性条件を用いて表現されており、その均衡状態を求める問題がある種のポテンシャル関数に対する最大化問題として帰着される。

本稿では、都市経済モデルの一つでもある FO モデルについて、その定式化プロセスと求解アプローチ、および計算結果を簡単に概説する。なお、非線形最適化の都市経済モデルにおける応用例の一つとして FO モデルを紹介するというスタンスであるので、詳細な理論的背景、経済的な意味づけについては深く立ち入らないものとする。また、均衡解における集積の様子が視覚的にわかるよう、具体的な計算例は図を用いて示すこととする。

2. Fujita-Ogawa モデルの定式化

本節では、FO モデルを定式化するうえで必要な概念、パラメータ、意思決定主体などを定義し、それらを用いて、FO モデルの均衡解を求める問題を非線形最適化問題として定式化する。

2.1 空間設定と意思決定主体

まず全体空間（長方形と想定）を図 1 のような K 個のメッシュに分割し、各グリッド（地点とよぶ）に $i = 1, 2, \dots, K$ とラベル付けを行う。このとき、全体空間の面積を S すると、各地点の土地面積は $\bar{S} = S/K$ である。また、地点集合を $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ とし、地点 i と地点 j の距離（通常はユークリッド距離）を $T_{ij} = \text{dist}(i, j)$ とする。

FO モデルでは、意思決定主体として企業と家計の2種類が存在する。ここで、 $m_i \geq 0$ を地点 $i \in \mathcal{K}$ に立地する企業（これを企業 i とよぶ）の数、 $n_{ij} \geq 0$ を地点 $i \in \mathcal{K}$ に居住し地点 $j \in \mathcal{K}$ に立地する企業に通

はやし しゅんすけ

法政大学理工学部

〒184-8584 東京都小金井市梶野町 3-7-2

s_hayashi@hosei.ac.jp

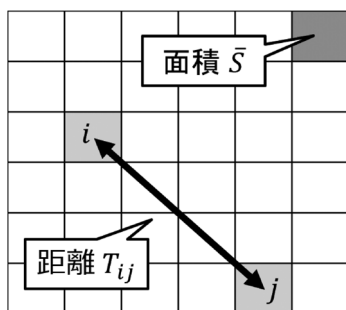


図1 $K = 6 \times 6$ の場合の分割例

する家計（これを家計 (i, j) とよぶ）の数とする¹。また、企業と家計の総数をそれぞれ M, N とし、1企業または1家計あたりに使用する土地面積を1とする。このとき、以下の3式が成り立つ。

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M \quad (1)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N \quad (2)$$

$$m_i + \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} \leq \bar{S} \quad (\forall i \in \mathcal{K}) \quad (3)$$

特に式(3)は各地点 $i \in \mathcal{K}$ における企業の使用土地面積 m_i と家計の使用土地面積 $\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij}$ の和が地点 i の土地面積 \bar{S} を超えないことを要求しており、これと式(1), (2)より $M + N \leq S$ が成り立たなければならぬことがわかる。なお、地点数 K が大きければ大きいほど、すなわちグリッド面積 \bar{S} が小さければ小さいほど、モデルとしてはより高精度になる。また、FOモデルでは企業や家計は連続体として表現されているため、 m_i, n_{ij} の値は整数でなくてもよい。

2.2 企業と家計の効用

FOモデルでは、企業と家計が自身の効用に基づいた立地選択を行う。企業 i の効用 Π_i は以下の式で表される。

$$\Pi_i = \sum_{j \in \mathcal{K}} d_{ij} m_j - R_i - L W_i \quad (4)$$

ここで、 d_{ij} は企業 i と企業 j の1企業あたりの相互交流便益であり、 $\sum_{j \in \mathcal{K}} d_{ij} m_j$ は企業 i がすべての企業から受ける総交流便益を表している。また、 R_i は地点 i の地代、 W_i は企業 i が1家計あたりに支払う賃金、 L は労働投入係数とよばれる所与の定数で、1企

業あたりに必要な家計数を表している。なお、相互交流便益 d_{ij} は所与の距離減衰係数 $\tau > 0$ を用いて

$$d_{ij} = \exp(-\tau T_{ij})$$

と与えられる。すなわち、 $i-j$ 間の距離が遠ければ遠いほど相互の交流便益は指数的に減衰し、さらに係数 τ が大きければ大きいほどその減衰速度は加速される。

一方、家計 (i, j) の効用 z_{ij} は以下の式で表される。

$$z_{ij} = W_j - R_i - t T_{ij} \quad (5)$$

ここで、 $t > 0$ は所与の通勤費用係数であり、 $t T_{ij}$ は通勤距離 T_{ij} に比例した通勤費用を表している。また、家計は賃金を受け取る側であるため、式(4)とは逆に W の係数が正となる。

2.3 企業と家計の立地選択に対する均衡条件

前節で、企業 i と家計 (i, j) の効用がそれぞれ式(4), (5)で表されることを述べた。ここで、企業 i はより効用の大きい立地点 $i' \in \mathcal{K}$ があれば、立地点を i から i' に変更する。また、家計 (i, j) はより効用の大きい立地点 $i' \in \mathcal{K}$ と勤務先 $j' \in \mathcal{K}$ があれば、立地点と勤務先をそれぞれ i', j' に変更する。このような変遷を経て、最終的にすべての企業・家計が単独で立地点および勤務先を変更する動機がなくなった状態が均衡状態である。

均衡状態では、各地点 $i \in \mathcal{K}$ に対して企業分布 m_i は以下の条件を満たす。

$$\bar{\Pi} > \Pi_i \implies m_i = 0$$

$$m_i > 0 \implies \bar{\Pi} = \Pi_i$$

ここで、 $\bar{\Pi} = \max_{i \in \mathcal{K}} \Pi_i$ である。すなわち、「地点 i の効用が最大でない場合、そのような地点に立地する企業は皆無」であり、「地点 i に立地する企業が少しでも存在する場合、その地点の効用は最大」となる。さらに、上記の条件は

$$0 \leq m_i \perp \bar{\Pi} - \Pi_i \geq 0$$

という相補性条件²で記述することができる。同様の考え方により、均衡状態での家計分布 n_{ij} も各 $(i, j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ に対して

$$0 \leq n_{ij} \perp \bar{z} - z_{ij} \geq 0$$

¹ ここで、企業 i 、家計 (i, j) に付けられたインデックス i, j は個々の企業・家計を区別するものではない。したがって、複数の企業 i や家計 (i, j) が存在しうことに注意する。

² 本稿では $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対する相補性条件 $\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0, \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0$ をまとめて $0 \leq \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \geq 0$ と表記する。特に $n = 1$ の場合、相補性条件は x と y の両方とも非負であり少なくとも一方が0であることを意味する。

を満たす。ただし、 $\bar{z} = \max_{(i,j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}} z_{ij}$ である。

2.4 地代と賃金に対する均衡条件

企業と家計の立地・勤務先選択に対する均衡条件と同様、地代と賃金が満たすべき均衡条件も相補性条件として記述することができる。

実際、均衡状態において各地点 $i \in \mathcal{K}$ における地代 R_i は次の相補性条件を満たす。

$$0 \leq R_i \perp \bar{S} - \left(\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \right) \geq 0 \quad (6)$$

ここで、式 (6) の解釈は次のとおりである。地点 i を立地点として選択する企業と家計の総面積が地点 i の土地面積 \bar{S} に達しない、すなわち $\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i < \bar{S}$ となり土地余剰が発生する場合、その土地の地代 R_i はゼロとなる。一方、その土地に正の地代が付く、すなわち $R_i > 0$ の場合、土地の余剰は発生せず $\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i = \bar{S}$ となる。

一方、各企業 $j \in \mathcal{K}$ が支払う賃金 W_j に関しても次の相補性条件が成り立つ。

$$0 \leq W_j \perp \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} - Lm_j \geq 0 \quad (7)$$

ここで、式 (7) は次のように解釈できる。企業 j に対する労働供給が過多となる場合、すなわち $\sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} > Lm_j$ となる場合、支払われる賃金 W_j はゼロとなる。一方、正の賃金 $W_j > 0$ が発生する場合、過剰な労働供給は発生せず、 $\sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} = Lm_j$ が成り立つ。なお、現実には土地の値段や企業が支払う賃金がゼロ円になることは考えにくい、その場合は上記の議論における地代 R_i と賃金 W_j の値は相対的なものと考えればよい。

2.5 相補性問題への定式化と等価最適化問題

これまでに出てきた条件をすべて整理してまとめると、次のようになる。

$$0 \leq m_i \perp \bar{\Pi} - \left(\sum_{j \in \mathcal{K}} d_{ij} m_j - R_i - L W_i \right) \geq 0 \quad (i \in \mathcal{K}) \quad (8)$$

$$0 \leq n_{ij} \perp \bar{z} - (W_j - R_i - t T_{ij}) \geq 0 \quad (i \in \mathcal{K}, j \in \mathcal{K}) \quad (9)$$

$$0 \leq R_i \perp \bar{S} - \left(\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \right) \geq 0 \quad (i \in \mathcal{K}) \quad (10)$$

$$0 \leq W_j \perp \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} - L m_j \geq 0 \quad (j \in \mathcal{K}) \quad (11)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M, \quad \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N \quad (12)$$

ここで、決定変数は $\mathbf{m} = \{m_i\}_{i \in \mathcal{K}} \in \mathbb{R}^K$, $\mathbf{n} =$

$\{n_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}} \in \mathbb{R}^{K^2}$, $\mathbf{R} = \{R_i\}_{i \in \mathcal{K}} \in \mathbb{R}^K$, $\mathbf{W} = \{W_j\}_{j \in \mathcal{K}} \in \mathbb{R}^K$, $\bar{\Pi} \in \mathbb{R}$, $\bar{z} \in \mathbb{R}$ である³。このように、相補性条件と等式条件を含む問題を混合相補性問題 (Mixed Complementarity Problem: MCP) という。一般に MCP を解く際には Fischer-Burmeister 関数や min 関数などを用いて等価なベクトル方程式を構築し、それに平滑化ニュートン法や一般化ニュートン法 [2] などを適用することが多い。しかしながら、MCP (8)–(12) は特殊な構造をもっており、次のような \mathbf{m} と \mathbf{n} のみを変数とした非線形最適化問題の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件と等価であることが確認できる。

$$\max_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} d_{ij} m_i m_j - t \sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} T_{ij} n_{ij} \quad (13)$$

$$\text{s.t. } m_i \geq 0 \quad (i \in \mathcal{K}) \quad (14)$$

$$n_{ij} \geq 0 \quad (i \in \mathcal{K}, j \in \mathcal{K}) \quad (15)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} + m_i \leq \bar{S} \quad (i \in \mathcal{K}) \quad (16)$$

$$L m_j \leq \sum_{i \in \mathcal{K}} n_{ij} \quad (j \in \mathcal{K}) \quad (17)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M \quad (18)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N \quad (19)$$

ここで、MCP (8)–(12) で変数だった \mathbf{R} , \mathbf{W} , $\bar{\Pi}$, \bar{z} はそれぞれ条件 (16), (17), (18), (19) の Lagrange 乗数に対応していることに注意する。また、目的関数 (13) は FO モデルに対するポテンシャル関数と解釈できる。以上のことより、MCP (8)–(12) を直接解く代わりに等価最適化問題 (13)–(19) を解けば、FO モデルの均衡解が導出できることがわかる。なお、行列 $\mathbf{D} = (d_{ij})$ は正定値対称行列であるため、問題 (13)–(19) には複数の局所最適解の存在が予想される。実際、ポテンシャル関数 (13) が大域的に最大となるような均衡解は安定性が強く、そのような解を求めることは重要な目標の一つではあるが、本稿では大域的最適解にはこだわらず、局所最適解を求めることに主眼を置くこととする。

3. 等価最適化問題の解法

前節では、非線形最適化問題 (13)–(19) を解くことにより、FO モデルの均衡解が導出できることを述べた。実際、 $\mathbf{x} = (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in \mathbb{R}^{K+K^2}$ とおき、

³ 相補性条件と $\sum_{i \in \mathcal{K}} m_i = M > 0$ および $\sum_{i \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{K}} n_{ij} = N > 0$ より、自由変数 $\bar{\Pi}$, \bar{z} に対して $\bar{\Pi} = \max_{i \in \mathcal{K}} \bar{\Pi}_i$, $\bar{z} = \max_{(i,j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}} z_{ij}$ が最終的に成り立つことに注意する。

$$\mathcal{F} := \left\{ (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mid \text{式 (14)-(19) を満たす} \right\}$$

とすると、行列 \mathbf{M} とベクトル $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ を適当に定めることにより、問題 (13)-(19) は、

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) := -\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad (20)$$

と書き換えることができる。(目的関数を -1 倍して最小化していることに注意。) ここで、行列 $\mathbf{D} = (d_{ij})$ は正定値対称行列であることが知られているため、行列 \mathbf{M} は半正定値対称であることがわかる。また、集合 \mathcal{F} は線形等式制約と線形不等式制約のみで記述されている多面体集合である。したがって、問題 (20) は凹二次計画問題にはかならない。

3.1 Frank-Wolfe 法

凹二次計画問題の解法はこれまで多く研究されてきたが、FO モデルの求解においては、決定変数の次元が大変大きいことと、局所最適解を求めることに主眼が置かれていることから、次のような Frank-Wolfe 法がしばしば用いられる。

アルゴリズム 1 (Frank-Wolfe 法)

Step 0 初期点 $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{F}$ を適当に定め、 $k := 0$ とする。

Step 1 \mathbf{x}^k における線形近似問題

$$\min \nabla f(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{y} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} \in \mathcal{F} \quad (21)$$

を解き、その最適解を \mathbf{y}^k とする。

Step 2 ステップサイズ $\lambda_k \in [0, 1]$ を適当に定め、 $\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \lambda_k (\mathbf{y}^k - \mathbf{x}^k)$ とする。

Step 3 適当な終了条件を満たせば \mathbf{x}^{k+1} を出力して終了。さもなくば、 $k := k + 1$ として Step 1へ。

Frank-Wolfe 法とは、非線形関数を多面体集合上で最小化する場合に用いられる古典的な手法であり、毎回の反復で目的関数を線形近似した線形計画問題 (Linear Program: LP) を解いて反復点を生成するという特徴がある。Step 2にあるように、通常の Frank-Wolfe 法では、次の反復点 \mathbf{x}^{k+1} を定める際、現在の反復点 \mathbf{x}^k と近似 LP の最適解 \mathbf{y}^k との線分上で一次探索を行いステップサイズ λ_k を決める。しかしながら、問題 (20) の目的関数は凹であるため、近似 LP(21) の最適解 \mathbf{y}_k が線分 $[\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k]$ 上での最小点となり、常に $\lambda_k = 1$ が選択される。すなわち、近似 LP(21) の最適解 \mathbf{y}_k がそのまま次の反復点 \mathbf{x}^{k+1} となる。

また、問題 (20) は凹最小化問題であるため、集合 \mathcal{F}

の端点に局所最適解および大域的最適解が存在する。通常、近似 LP(21) の最適解は集合 \mathcal{F} の端点になるため、アルゴリズム 1 で生成される点列は \mathcal{F} の端点を辿りながら有限回の反復で効率的に最適解を得られることが期待できる。

3.2 線形近似問題の解法

実際、アルゴリズム 1 においてネックとなるのは近似 LP(21) を解くところである。この問題は一見ただの LP であるので、内点法や単体法で簡単に解けそうに見える。しかしながら、FO モデルでは空間をメッシュで区切るため、たとえば縦横をそれぞれ 100 ずつで区切ると、 $K = 100 \times 100 = 10^4$ となり、決定変数の次元は $K^2 + K \approx 10^8$ という膨大な値となってしまう。この場合、近似 LP(21) を汎用ソルバーで直接解こうとしたら、データがメモリに乗り切れずエラーを起こしてしまう。そこで、問題 (21) の特殊な構造を活かして効率的に最適解を求めることが要求される。

一つの対処法として、記憶制限付き単体法の適用が考えられる。実際、問題 (21) は適当な補助変数を導入することにより、 $O(K^2)$ 個の非負変数と $O(K)$ 個の等式制約をもつ標準型の LP に書き換えることができる。よって、単体法を適用した場合に、基底変数が $O(K)$ 個、非基底変数が $O(K^2)$ 個となる。ここで、基底変数の情報のみをメモリに保存し、毎回のピボット操作で基底変数に移す非基底変数を数値計算により求めるのが記憶制限付き単体法である。この手法では基底変数に移す非基底変数を効率的に探すことが重要となる。

また、近似 LP(21) の特殊な構造に着目し、Benders 分解と Hitchcock 型輸送問題アルゴリズムを組み合わせた手法も提案されている [3]。この手法では、近似 LP(21) に Benders 分解法を適用し、変数 $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^K$ を決定する上位問題と、所与の \mathbf{m} に対して変数 $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{K^2}$ を決定する下位問題に分けて問題を取り扱う。さらに、下位問題は適当な補助変数を導入することにより Hitchcock 型輸送問題と同じ構造になるため、Hitchcock 型輸送問題に対する効率解法⁴を適用することができる。

3.3 その他の工夫

アルゴリズム 1 を実装する際に、warm-start の技法を活用すると、より効率的な求解が期待できる。具体的には、 $K = 2r \times 2r$ の問題を解く際に、 $K = r \times r$ の問題を前もって解き、得られた最適解を $K = 2r \times 2r$ の初期解として採用する、といったものである。実際、 $K = r \times r$ の最適解は $K = 2r \times 2r$ の実行可能基底

⁴ Hitchcock 型輸送問題には、二部グラフを用いたネットワーク単体法という効率的な解法が知られている。

解に容易に変換できるし、それは $K = 2r \times 2r$ の最適解に対する近似解になっていることが期待できる。

4. 具体的な計算例

本節では、FO モデルの均衡解の具体的な計算例として、文献 [4, 5] の実験結果を紹介する。なお、以下の計算例では、二次元空間を $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ とし、地点数は $K = 32 \times 32$ 、労働投入係数は $L = 2$ としている。また、次の二つの仮定を置いている。

(i) すべての地点が企業または家計に占められており、土地の余剰がない。すなわち、 $M + N = S (= K\bar{S})$ である。

(ii) すべての家計がいずれかの企業で働いており、労働者の余剰がない。すなわち、 $LM = N$ である。

このとき、等価最適化問題 (13)–(19) において、不等式制約 (16), (17) は必ず等式として成立する。さらに、この 2 条件のみで式 (18), (19) が $M = \frac{1}{1+L}S$, $N = \frac{L}{1+L}S$ として自動的に成立し、冗長な等式制約として削除できることがわかる。よって、以下の計算例では、等価最適化問題として式 (16), (17) の不等号を等式に置き換えた問題 (13)–(17) に対してアルゴリズムを適用する。

計算例 1

まずは二点間距離として単純なユークリッド距離を採用した FO モデルに対する均衡解の計算例を紹介する。具体的には、企業間交流便益の距離減衰係数を $\tau = 1$ で固定し、家計の通勤費用係数 t の値を 0.038 から 0.050 まで変化させて均衡解の振る舞いを観察する。得られた結果は図 2–5 のとおりである。ここで、黒く塗られたメッシュが企業立地、白く塗られたメッシュが家計立地であり、灰色で塗られたメッシュは両者の混合立地である。混合立地における企業と家計の割合は灰色の濃さでもって表現している。

図 2 が示すように、通勤費用係数 t の値が比較的小さいときは、企業が一極に集中した形で分布し、その周りに家計が分布する様子が観察される。これは、家計の通勤コストを下げる力よりも企業の集積力の方が相対的に高くなることが原因と考えられる。一方、 t の値が少しずつ大きくなるに連れて、家計の通勤コストが企業の集積力に匹敵するようになり、図 3–4 が示すように、中心部に企業と家計の混合立地が見られるようになる。最終的に、 t の値が十分大きくなると、図 5 が示すように均衡解として完全混合立地パターンが観察されるようになる。このとき、企業の集積力よりも家計の通勤コストの影響の方が強くなっているものと考えられる。

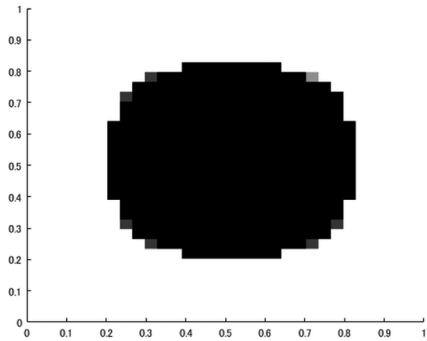


図 2 通勤費用係数 $t = 0.038$, 距離減衰係数 $\tau = 1$

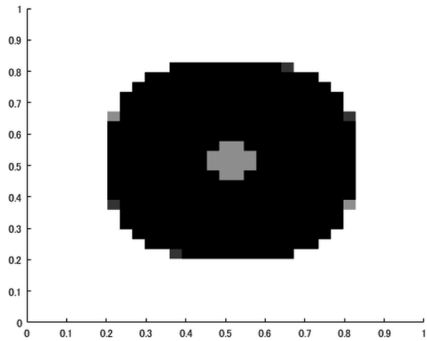


図 3 通勤費用係数 $t = 0.042$, 距離減衰係数 $\tau = 1$

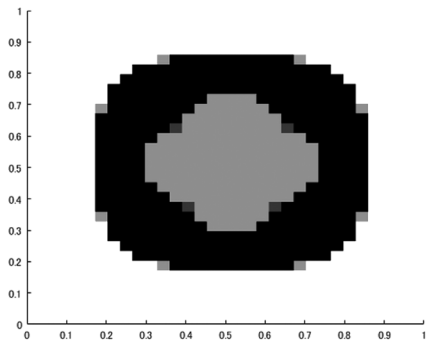


図 4 通勤費用係数 $t = 0.046$, 距離減衰係数 $\tau = 1$

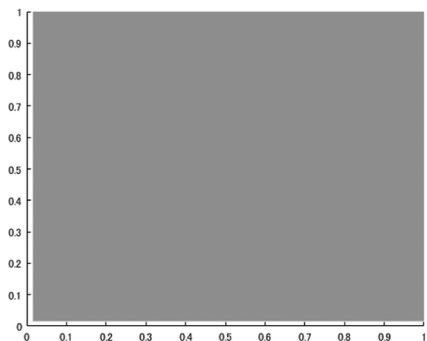


図 5 通勤費用係数 $t = 0.050$, 距離減衰係数 $\tau = 1$

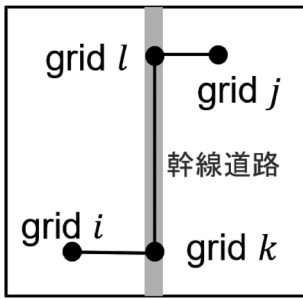


図 6 幹線道路を考慮に入れた立地空間

計算例 2

次に二点間距離として単純なユークリッド距離ではなく、自動車による時間距離割引の概念を導入した計算例を紹介する。具体的には、図 6 のように南北に幹線道路が走っており、幹線道路上の時間距離がほかの場所の時間距離よりも割り引かれるような状況を考える。そのとき、地点 i - j 間の時間距離は

$$T_{ij} := \min \left\{ \Delta_{ij}, \Delta_{ik} + \rho \Delta_{kl} + \Delta_{lj} \right\}$$

で表現されるものとする。ここで、地点 k, l はそれぞれ地点 i, j から見た幹線道路の最寄り地点を、 Δ_{ij} は i - j 間のユークリッド距離を表している。また、 $\rho \in (0, 1]$ は幹線道路上の時間距離割引係数であり、この値が小さいほど幹線道路における時間距離が割り引かれる。

得られた結果は図 7-9 のとおりである。ここで、メッシュの色の意味は計算例 1 と同じである。また、すべての例において $(t, \tau) = (0.1, 1)$ としてある。図 7 が示すように、割引係数が比較的大きい場合は、円に近い形での企業集積が見られるが、割引係数の値が小さくなればなるほど、図 8-9 のように幹線道路に沿った縦長な集積形状に変化していくことが見て取れる。

計算例 3

最後に二点間距離として電車による時間距離割引の概念を導入した計算例を紹介する。具体的には、図 10 のように地点 a, b, c の 3 箇所に駅があり、駅間の時間距離が割り引かれる状況を考える。この場合、計算例 2 とは異なり駅と駅の途中では下車できないため、地点 i - j 間の時間距離は

$$T_{ij} := \min \left\{ \Delta_{is_i} + \rho \Delta_{s_i s_j} + \Delta_{j s_j}, \Delta_{ij} \right\}$$

で表現される。ここで、 $s_i, s_j \in \{a, b, c\}$ はそれぞれ地点 i および j からの最寄り駅を表しており、 $\rho \in (0, 1]$ は電車による距離割引係数である。

得られた結果は図 11-13 のとおりである。ここで、メッシュの色の意味は計算例 1 と同じである。また、

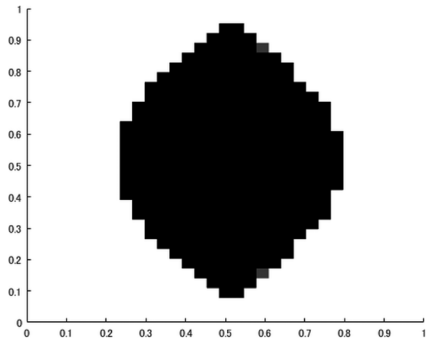


図 7 時間距離割引係数 $\rho = 0.5$ (計算例 2)

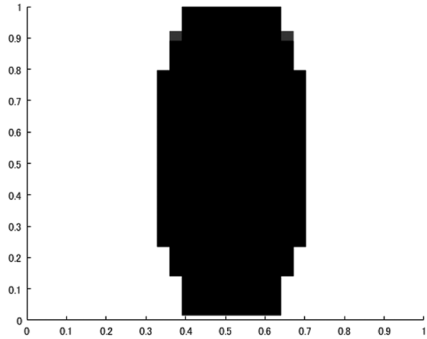


図 8 時間距離割引係数 $\rho = 0.2$ (計算例 2)

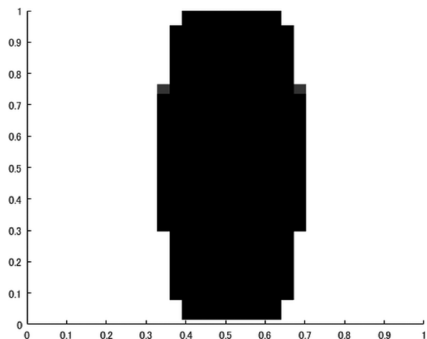


図 9 時間距離割引係数 $\rho = 0.1$ (計算例 2)

すべての例において $(t, \tau) = (0.1, 1)$ としてある。図 11 が示すように、割引係数が大きい場合は、ほとんどの 2 点間において電車を使わない方が時間距離が短くなるため、電車がない場合と同じ円形の企業集積が見られる。一方、図 12-13 が示すように、割引係数の値が小さくなればなるほど、それぞれの駅周辺に企業が集積していくことが見て取れる。

5. おわりに

本稿では、都市経済モデルにおける非線形最適化の一例として FO モデルを紹介し、簡単な計算例を図とともにいくつか示した。本来、FO モデルは都市の集

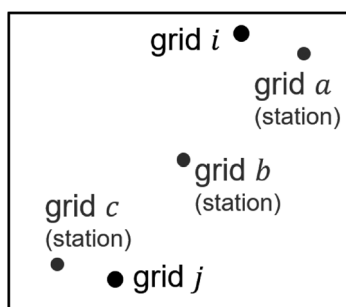


図 10 駅と電車を考慮に入れた立地空間

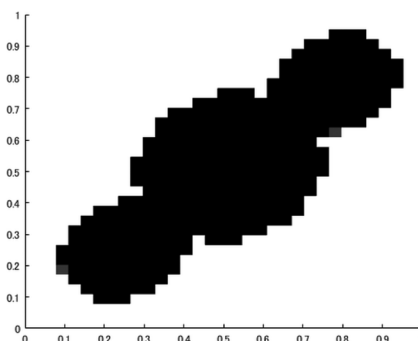


図 12 時間距離割引係数 $\rho = 0.1$ (計算例 3)

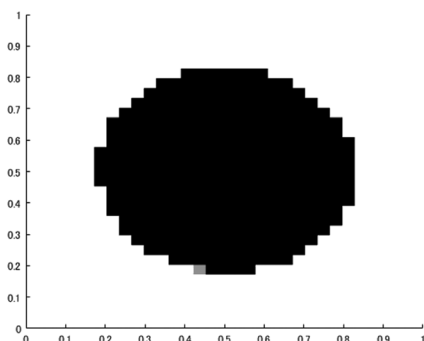


図 11 時間距離割引係数 $\rho = 0.5$ (計算例 3)

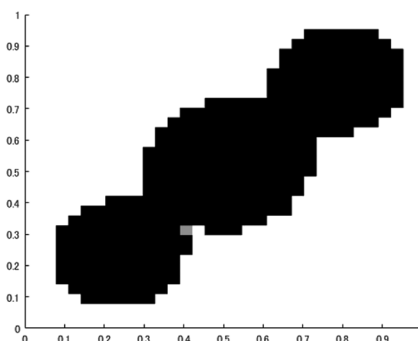


図 13 時間距離割引係数 $\rho = 0.01$ (計算例 3)

積メカニズムを解明するための経済モデルであり、経済学の知見・理論が重要であるが、そのような経済理論に興味のある方は書籍 [6] を参考にされたい。また、近年では土木計画学分野において、FO モデルの均衡解析およびアルゴリズム開発の研究が盛んになされている。たとえば、本稿では 2 次元空間を前提に話を進めてきたが、1 次元空間の場合は確率安定性の概念を用いたさらに詳細な解析結果がわかっている [7]。また、求解アルゴリズムに関しても、ランダム効用理論 (ロジットモデル) に基づいた一般化確率的モデルを構築することにより、近似解法ではあるが、既存アルゴリズムよりも遥かに高速なアプローチが提案されている [8]。ほかにも、交流便益の距離減衰の度合が異なる複数のタイプの企業が混在するような、企業の異質性を考慮した FO モデルの拡張研究などもなされている [9]。

空間をメッシュに区切ってメッシュ内の濃度を変数とする最適化問題は、トポロジー最適化とも通ずるものがある。この手の問題はメッシュの解像度を細かくすればするほどより精緻なモデルになるが、一方で決定変数の次元が膨大になり、現実的な時間で最適解が求められなくなるというジレンマがある。今後、このような困難を克服すべく、さらなるアルゴリズムの改良と計算機能力の向上が望まれるところである。

参考文献

- [1] M. Fujita and H. Ogawa, “Multiple equilibria and structural transition of nonmonocentric urban configurations,” *Regional Science and Urban Economics*, **12**, pp. 161–196, 1982.
- [2] F. Facchinei and J.-S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer-Verlag, 2003.
- [3] 清水廉, 長江剛志, “二次元空間を対象とした大規模な二主体集積経済モデルの効率的解法,” 土木学会論文集 D3 (土木計画学), **76**, pp. 223–235, 2020.
- [4] 夏井陸, “2 次元 Fujita-Ogawa モデルに対する記憶制付き単体法を用いた均衡解の導出,” 東北大学工学部建築・社会環境工学科卒業論文, 2020.
- [5] 梅澤太一, 柏木理希, 室賀大輝, “様々な距離尺度に対する Fujita-Ogawa モデルの均衡解析,” 法政大学理工学部経営システム工学科卒業論文, 2021.
- [6] M. Fujita and J.-F. Thisse, *Economics of Agglomeration: Cities, Industrial Location, and Globalization (Second Edition)*, Cambridge University Press, 2013. (徳永澄憲, 太田充訳, 『集積の経済学—都市, 産業立地, グローバル化—』, 東洋経済新報社, 2017.)
- [7] 山口修平, 赤松隆, “複数都心形成モデルの確率安定性解析—線分都市 vs. 円周都市—,” 土木学会論文集 D3 (土木計画学), **75**, pp. 109–127, 2019.
- [8] 酒井高良, 涌井優尚, 赤松隆, “超大規模離散空間における Fujita-Ogawa モデルの効率的解法,” 土木学会論文集, **79** (4), 22-00341, 2023.
- [9] 石橋知大, 齋藤和真, 根本侑汰, “企業の異質性を考慮に入れた Fujita-Ogawa モデルの定式化と均衡解析,” 法政大学理工学部経営システム工学科卒業論文, 2023.