両サイド型待ち行列における戦略的な挙動
—多集団ゲーム理論的な解析—

Nguyen Quoc Hung, Phung-Duc Tuan

タクシーやモビリティシェアリングは需要側と供給側とのマッチングシステムである．このシステムでは，需要（乗車客など）と供給（タクシーなど）がともにランダムに到着し，マッチングが成立した場合，システムから離脱する．このようなシステム（両サイド型待ち行列と呼ぶ）の最適な設計を行うためには，需要と供給（エージェント）の戦略的な挙動を理解することが重要であるが，両サイド型待ち行列は多次元となり，解析が難しい．本稿では需要と供給の片方もしくは両方が戦略的である場合について，ゲーム理論的な解析結果を紹介する．

キーワード：両サイド型待ち行列，均衡戦略，多集団ゲーム理論

1. はじめに

待ち行列はスーパーマーケット，空港，道路，人気レストランなどのさまざまな場所で日常的に観察される．これらの待ち現象に対する数理モデルとして待ち行列モデルがよく使われる．待ち行列モデルは客の到着過程，客のサービス過程と到着時にすぐにサービスを受けられない客が待機するための待合室から構成される．待ち行列をケンドール記号によって A/B/c/K として表すとき，A は到着過程（たとえばポアソン過程，M），B は客のサービス時間分布（たとえば指数分布，M），c はサーバの数，K はシステムに許容できる最大の客数であり，特に K が ∞ の場合は省略されることが多い．従来の待ち行列モデルは客が到着して，システムに空きがあれば参加し，サービス施設（サーバ）があるルール（たとえば先着順）によってサービスを行う．空きがない場合はその客は必ずシステムから離脱する．つまり，客が自分の意志でシステムに参加するかどうかを決めることがないと仮定している．このような待ち行列の解析の対象は，たとえば，待ち行列長の期待値や分布，そして客の待ち時間（あるいはサービス時間も含む滞在時間）の期待値や分布である．待ち時間の分布を用いることで，客が到着してからサービス開始までの待ち時間が 5 分以上である確率を 5%以下にするために必要なサーバ数やサービス速度が算出できる．このようなモデルは客が必ずシステム側が提供するサービスを受けるという前提であり，この前提を満たす事例において大変役に立つが，すべてのサービスシステムにおいて前提が成り立つとは考えられない．たとえば，客が人間である場合，サービスを受ける場合に得られるメリットとサービスを受けるまでに発生するコストを比較して，サービスを受けるかどうかを決めるのが自然である．

この発想に基づき，客の戦略的な挙動を考慮する待ち行列の研究は Naor [1] により創始された以降，さまざまな発展を遂げている．Naor モデルでは到着客が行列の長さを観測して，それに基づく期待滞在時間（システムに入ってから出るまでの時間の期待値）とそのコストを計算し，サービスを受ける場合に得られる報酬と比べて報酬が大きい場合はシステムに参加し，小さい場合は参加しない．両方が等しい場合は任意の確率で参加・不参加を決める．

それでは実際に M/M/1 待ち行列モデルについて，客の戦略的な行動がある場合を考える．到着客がポアソン過程に従って到着したときに，システムに到着客自身も含め n 人がいる場合を想定する．このとき，この客がシステムに入る場合に自分のサービスが完了するまでに要する時間の期待値を計算する．それは，到着した自分以外の $n-1$ 人の客のサービスが完了するまでの時間と自分のサービス時間の和となり，その期待値が n/μ である．単位時間のコストが C，サービスの報酬が R とすると，客の期待利得は $R-nC/\mu$ となり，$R-nC/\mu \geq 0$ の場合に参加する．この結果から，客の均衡戦略は閾値 $n^{(s)}=\lfloor \frac{R\mu}{C} \rfloor$ を用いて到着時に n 人の客がシステムにいる場合 $n \leq n^{(s)}-1$ であれ

ぐえん くぉっく ふんぐ
株式会社日立製作所研究開発グループ先端 AI イノベーションセンタ データサイエンスラボラトリ
〒 185–8601 東京都国分寺市東恋ヶ窪一丁目 280 番地
quochung.nguyen.ap@hitachi.com
ふんどっく とぅあん
筑波大学システム情報系
〒 305–8573 茨城県つくば市天王台 1–1–1
tuan@sk.tsukuba.ac.jp

ば参加し，$n = n^{(s)}$ であればシステムに参加しない．

一方，この閾値では社会全体において最適にならない．社会全体の単位時間当たりの利得（社会厚生）は参加した客の利得から，全待ち客の単位時間当たりの待ちコストを引いたものである．社会的に最適な閾値 $n^{(o)}$ があるとすると，$n^{(o)}$ は社会厚生の関数を最大化する閾値である．M/M/1 モデルについて，これを求めると $n^{(o)}$ が一意に決まる [1]．簡単な解析から $n^{(o)} \le n^{(s)}$ を示すことができる．つまり，社会全体にとって最適な閾値は個人にとっての最適な閾値以下である．そのため，客の行動が社会的に最適になるために $n^{(s)}$ を $n^{(o)}$ にシフトする必要があり，その方法の一つは客に参加料を課すことである．たとえば，参加する場合に θ だけのお金がかかると，客にとってのサービスの報酬は $R-\theta$ になる．θ を適切に設定することにより，$n^{(s)}$ を $n^{(o)}$ に下げることが可能である．具体的に料金 θ が次式を満たせばよい [1].

$$(R-\theta) - C\frac{n^{(o)}}{\mu} \ge 0, \quad (R-\theta) - C\frac{n^{(o)}+1}{\mu} < 0.$$

つまり，

$$R - C\frac{n^{(o)}+1}{\mu} < \theta \le R - C\frac{n^{(o)}}{\mu}.$$

さて，この綺麗な結果はどこまで拡張できるだろうか．M/M/1 のさまざまな変種モデルについて同様の結果が報告されている．詳細は専門書 Hassin and Haviv [2] や Hassin [3] などを参考にされたい．本稿では M/M/1 を超えて両サイド型待ち行列について同様の議論を拡張する．両サイド型待ち行列は，客が行列に並ぶだけでなく供給側（サーバ）も行列に並び，客とサーバとがマッチングしてシステムを去る．このようなモデルはタクシースタンドやライドシェアのマッチングプラットフォームなどで現れている．客とサーバのマッチングが一瞬で終わる場合はマッチング時間を無視するものとして主に 2 節で紹介し，マッチング時間がかかる場合は 3 節で扱う．

2. 両サイド型待ち行列：ゼロマッチング時間

2.1 すべての均衡パターン

前節の待ち行列は最も基本的な待ち行列であり，サーバは客がいる限りサービスを提供する．しかし，タクシースタンドやシェアリングサービスなどで観察する行列は必ずしもそうではない．たとえば，タクシースタンドでは時にはタクシーだけが行列を作り，時には客だけが行列を作る．さらに，客とタクシーとがマッチングして，客がタクシーに乗って出ていくまでの時間が無視できないほど長い場合はタクシーと客の両方の行列ができる場合もある．本稿は，まず客がタクシーに乗って出ていくまでの時間が無視できる場合において，次に無視できない場合において，客かタクシー，あるいは両方が戦略的な行動をとる場合の解析結果 [4–7] を簡単に紹介したい．

両サイド型待ち行列とはタクシースタンドで現れるような，顧客の行列とタクシーの行列を表すモデルである．このモデルではタクシーと客の両方がタクシースタンドに到着し，客がタクシーに乗り，タクシーと客の両方がシステムから去る．M/M/1 と異なる点は常にサービスを提供するサーバがあるとは限らないことである．サーバも客と同じようにシステムに到着する．この意味で，客とサーバは対等の立場である．タクシーが客にサービスを提供するとみれば，サーバの役割を果たすが，逆の見方もできる．まず，最も簡単な場合でタクシー（集団 1）と客（集団 2）がそれぞれ率 λ_1 と λ_2 のポアソン過程に従って，タクシースタンド（マッチングプラットフォーム）に到着するものとする．タクシーと客のサービスの報酬と待ちコストはそれぞれ R_1, C_1 と R_2, C_2 とする．つまり，タクシーにとって，客とマッチングができて出発する場合に得られる報酬が R_1 であり，待ち時間が生じる場合の単位時間当たりのコストは C_1 である．客の R_2, C_2 も同様の定義である．また，タクシーと客の行列の最大長が N_1 と N_2 とする．このときシステムの状態空間は $\{-N_1, -N_1+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N_2-1, N_2\}$ となる．

ここでは状態 s は，$s<0$ であればタクシーが $|s|$ 台が並んでいて，状態 $s>0$ であれば s 人の客が並んでいることを意味する．また，$s=0$ であればシステムが空である．本節ではタクシースタンドでの乗車時間（マッチング時間）が無視できると考えるため，任意の時点でタクシーだけの行列か客だけの行列かのいずれかになる．タクシー（タクシードライバも含む）と客の両方が戦略的な行動をとると，両者はどのような戦略になるだろうか．客から見れば，到着時にタクシーが存在すれば待ち時間がゼロになり，必ず乗車するのは得であろう．では，客が到着するときにタクシーがなく，自分の前にすでに $n-1$ 人の客がいる場合はどうなるだろう．待つ客がいればタクシーは来てすぐに客を乗せて出発していくことは自然である．仮にタクシーがそう考えて来れば，該当到着客にとって n 台のタクシーが来たら自分の前の $n-1$ 人の客と自分を運んでいくから，その客の期待滞在時間が n/λ_1 となり，M/M/1 の場合とほぼ同じことになる．そうすると客の戦略が閾値戦略

となり，その閾値が $n_2^{(s)}$ となる．同じようにタクシーについても同様の議論ができる．つまり，タクシーの戦略も閾値戦略となり，閾値 $n_1^{(s)}$ が存在する．そうすると，タクシーと客の戦略が $(n_1^{(s)}, n_2^{(s)}) \neq (0,0)$ でよさそうである．ここで，$n_1^{(s)} = \min\{\lfloor \frac{R_1\lambda_2}{C_1} \rfloor, N_1\}$ および $n_2^{(s)} = \min\{\lfloor \frac{R_2\lambda_1}{C_2} \rfloor, N_2\}$ である．これらの右辺の第一項目は M/M/1 の Naor 閾値であることを注意されたい．Naor はバッファの制限がない場合を考えるが，制限があった場合ではこの閾値がバッファサイズより大きければ当然ながらバッファサイズがその閾値となる．しかし，実際に (0,0) も均衡戦略となる．なぜなら，客はタクシーが何らかの理由で来ないと考えたら，自分が来ても待ち時間が無限になるから，結果として来ないためである．タクシーにとっても同様である．つまり，(0,0) も均衡戦略である．それでは，他にどのような戦略があり得るのだろうか．また，どうやって (0,0) のような均衡戦略を発見できるだろうか？

実は上記の閾値戦略 $(n_1^{(s)}, n_2^{(s)})$ を導出する際，相手側が戦略的でないことを暗に仮定している．また，空システム（客もタクシーもいない場合）に到着する客（もしくはタクシー，以下では客とタクシーを区別しない場合はエージェントと呼ぶ）が必ずシステムに参加することを仮定している．

以下ではある客（エージェント）がシステムに到着してからシステムを離脱するまでの滞在時間を考えるとき，その客を注目客と呼ぶことにする．M/M/1 の解析が簡単であった理由として注目客がシステムに来るときの期待滞在時間はその客の前に並んでいた客のサービス時間のみで決まって，注目客の後に到着する客の影響がないことが挙げられる．しかし，両サイド型待ち行列で注目客が到着する際に並んでいた客のサービス時間はもちろんのこと，その客が参加するかどうかはその後に来るタクシーの戦略に影響を及ぼす．さらに，それらのタクシーの行動が注目客の後の客の行動にも影響を及ぼし，注目客の後の客の行動がさらにタクシーの到着戦略に影響を及ぼす可能性がある．そのため，両サイド型待ち行列では，単純な閾値戦略ではなく，タクシーと客の社会的均衡戦略プロファイル $\bar{X} = (\bar{\sigma}^{(1)}, \bar{\sigma}^{(2)})$ を考える必要がある．ここで $\bar{\sigma}^{(1)}$ はタクシーの均衡戦略プロファイルベクトルであり，$\bar{\sigma}^{(2)}$ は客の均衡戦略プロファイルベクトルである．

$$\bar{\sigma}^{(1)} = (\bar{\sigma}^{(1)}_{-N_1}, \cdots, \bar{\sigma}^{(1)}_{-1}, \bar{\sigma}^{(1)}_{0}, \bar{\sigma}^{(1)}_{1}, \cdots, \bar{\sigma}^{(1)}_{N_2}),$$
$$\bar{\sigma}^{(2)} = (\bar{\sigma}^{(2)}_{-N_1}, \cdots, \bar{\sigma}^{(2)}_{-1}, \bar{\sigma}^{(2)}_{0}, \bar{\sigma}^{(2)}_{1}, \cdots, \bar{\sigma}^{(2)}_{N_2}).$$

ここでは $\bar{\sigma}^{(i)}_s$ は集団 i $(i = 1, 2)$ のエージェントが状態 s に到着した場合の参加確率である．社会的均衡戦略プロファイル $\bar{X}$ の下の定常状態における状態推移を図 1 に示す．

M/M/1 の場合のように注目エージェントはシステムに到着したら自身の期待待ち時間を計算し，参加するかどうかを決める．上述したように，両サイドのエージェントが戦略的である場合，注目エージェントの期待待ち時間を計算する場合にそのエージェントの前にいる同集団のエージェントに加え，そのエージェントの後に到着するエージェントも考慮する必要がある．集団 i の注目エージェントが位置 u（自分の前に $u-1$ エージェントがいる）であり，後ろにいるエージェント数が v である場合の残り滞在時間を $T_i(u,v)(u+v \leq N_i)$ とする．この $T_i(u,v)$ はマルコフ連鎖の一段階推移解析法 (First step analysis) より決まる．具体的には $T_i(u,v)$ は次のイベントが起こるまでの時間に加え，$T_i(u-1,v)$（次のイベントが相手側の到着）および $T_i(u,v+1)$（自分と同じ集団の到着）で表せる．また，境界条件 $T_i(0,v) = 0$（注目エージェントがマッチングし，システムを去った）に注意するとすべての $T_i(u,v)$ を漸化式により計算できる（詳細は文献 [4] を参考にされたい）．到着したエージェントが参加するかどうかの意思決定は到着時の期待待ち時間，つまり，$T_i(u,0)$ に基づく．

均衡戦略に関する分析結果として，ある (s_1, s_2) が存在して $s_1 \leq 0, s_2 \geq 0$ であり，状態 $s \in [s_1, s_2]$ は再帰的な状態（その状態が出現する確率が正）であり，この範囲以外の状態は過渡的（その状態が出現する確率が 0）である．過渡的な状態における参加確率は任意であることを注意されたい．この均衡状態のパターンを図 2 に示す．このパターンではタクシーが到着するときにすでに閾値 $|s_1|(-n_1^{(s)} \leq s_1 < 0)$ よりも少ないタクシーがいればある確率で参加して，$|s_1|$ 人以上のタクシーがすでにいれば参加しない．また，到着時に待機中の客がいると当然ながら確率 1 で参加する．客の方も同様に $0 < s_2 \leq n_2^{(s)}$ の閾値があり，タクシーと同様の戦略をもっている．状態 $s \in [s_1, s_2]$ における参加確率が以下の条件を満たせばよいため，その解が無数にあり得る．

- $\bar{\sigma}^{(1)}_s > 0$, $s_1 < s \leq 0$; $\bar{\sigma}^{(2)}_s > 0$, $0 \leq s < s_2$.
- $T_1(|s|+1, 0) \leq \frac{R_1}{C_1}$; $T_1(|s|+1, 0) < \frac{R_1}{C_1}$ の場合は $\bar{\sigma}^{(1)}_s = 1$; その他の場合は $\bar{\sigma}^{(1)}_s \in (0,1)$, $s_1 < s \leq 0$.
- $T_2(s+1, 0) \leq \frac{R_2}{C_2}$; $T_2(s+1, 0) < \frac{R_2}{C_2}$ の場合は $\bar{\sigma}^{(2)}_s = 1$; その他の場合は $\bar{\sigma}^{(2)}_s \in (0,1)$,

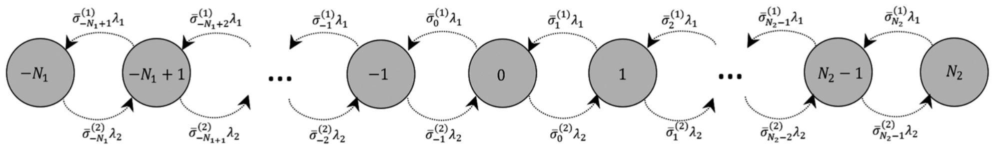

図 1　均衡状態における状態遷移

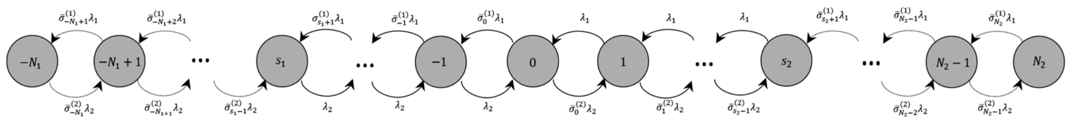

図 2　均衡パターン 1

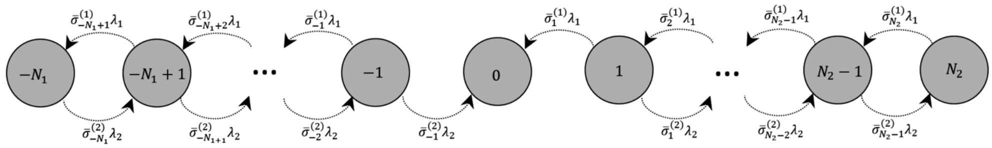

図 3　均衡パターン 2

$0 \leq s < s_2$.

- $T_i(|s_i|+1, 0) > \frac{R_i}{C_i}$; $\bar{\sigma}^{(i)}_{s_i} = 0$.

図 2 とは異なる均衡戦略パターン $(s_1, s_2) = (0, 0)$ を図 3 に示す．客がいるときに，タクシーがある確率で到着し，逆に客もタクシーがいるときにある確率で到着する．しかし，両者ともシステムに来るときにシステムが空の場合にはシステムに参加しない．そして，未知の参加確率は $T_i(1, 0) > R_i/C_i$ のとき，$\bar{\sigma}^{(2)}_0 = \sigma^{(1)}_0 = 0$ だけを満たせばよい．ほかにも $s_1 < 0, s_2 = 0$ と $s_1 = 0, s_2 > 0$ の場合がある．有限バッファ N_1,N_2 がどのように均衡戦略に影響するかの議論もある．これらについて興味のある読者は文献 [4] を参考にされたい．

上記のようにさまざまな均衡戦略のパターンが存在しているが，はたしてどのようにその均衡戦略になるのだろう．誤った情報，たとえば道路が壊れているのでタクシーが来れない，を信じて客が来なくなり，実際には到着可能なタクシーは客がいないため結局来なくなる．このため，結果としてシステムはいつまでも空のままである．

では客とタクシーは合理的に行動する場合はどのような結果になるか？ 合理的に行動するとは，客が到着時のシステムの状態のみに基づいて，戦略的に行動する場合である．この場合の結果は部分ゲーム完全均衡と呼ばれるものになる．つまり，客もしくはタクシーはシステムに到着するときのシステムの状態だけで最適な行動を行い，その結果の均衡戦略は閾値 $(n^{(s)}_1, n^{(s)}_2)$ となり，M/M/1 における Naor の方法で導出した結果と一致する．

2.2　最適化：部分ゲーム完全均衡

本節のモデルの設定はタクシーの行列に制限 N_1 があるが，客の行列の制限がないものとする．そのため，状態空間は $\{-N_1, -N_1+1, \ldots, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ となる．客とタクシーそれぞれの行動から均衡戦略が社会全体の厚生を最大化するとは限らない．そこで社会の厚生を最大化する均衡戦略を議論するために，客とタクシーがともに合理的に行動する場合に限定することで問題設定を簡単にする．つまり，いわゆる部分ゲーム完全均衡に限定すると，タクシーと客の両方の戦略が閾値 $(n^{(s)}_1, n^{(s)}_2) = \left(\min(\lfloor \frac{R_1\lambda_2}{C_1} \rfloor, N_1), \lfloor \frac{R_2\lambda_1}{C_2} \rfloor\right)$ となる．社会厚生を最大化するタクシーの閾値と客の閾値の組を $(n^{(o)}_1, n^{(o)}_2)$ とする．ここでは，$n^{(o)}_1$ の探索空間が有限になるが，$n^{(o)}_2$ については無限であるため，全場合を試し，社会厚生を最大化することが難しい．しかし，各々の $n^{(o)}_1$ について社会厚生が最大となる $n^{(o)}_2$ が存在することが証明できるため，この問題は厳密にユニークな閾値の組を求めることが可能である．詳細は文献 [5] を参考にされたい．しかし，$(n^{(o)}_1, n^{(o)}_2)$ は必ずしもタクシーや客の自己最適化で導出された均衡戦略 $(n^{(s)}_1, n^{(s)}_2)$ と一致しない．

そこで，文献 [1] を参考に，参加費を客とタクシーの両方に課すポリシーを設定した．具体的には，タクシーと客に対する参加費を θ_1 と θ_2 として，それぞれの参加費は次の不等式を満たすことを考えた．

$$R_1 - C_1\frac{n_1^{(o)}+1}{\lambda_2} < \theta_1 < R_1 - C_1\frac{n_1^{(o)}}{\lambda_2}.$$
$$R_2 - C_2\frac{n_2^{(o)}+1}{\lambda_1} < \theta_2 < R_2 - C_2\frac{n_2^{(o)}}{\lambda_1}.$$

上記を満たす参加費 θ_1 と θ_2 を課せば，社会厚生最大化を達成することがわかる．

ほかのポリシーとして，客がタクシーに乗るために料金 p を払う必要があるとする．そして，タクシーがこのサービスに参加するために一人の客を乗せるとシステムに固定のコスト C_f を払うとする．客にとっての報酬は $R_2 - p$ となり，タクシーにとっての報酬は $R_1 = p - C_f$ となり，客とタクシーが社会的に最適な閾値で参加してもらうためには料金 p（もしくは補助金）が次の不等式系に満たさなければならない．

$$p \in \left(R_2 - C_2\frac{n_2^{(o)}+1}{\lambda_2}, R_2 - C_2\frac{n_2^{(o)}}{\lambda_2}\right),$$
$$p \in \left(C_f + C_1\frac{n_1^{(o)}}{\lambda_2}, C_f + C_1\frac{n_1^{(o)}+1}{\lambda_2}\right).$$

この料金はシステムの均衡状態において社会厚生が最大化されている．上の 2 本の式の区間に共通部分がなれば p が存在せず，このポリシーで社会厚生最大化は達成できない．両サイドに料金を課する方法と料金を設定する方法のほかに，待合室の容量 N_1，N_2 を調整するポリシーがある．つまり，自己最適化の閾値の組が社会厚生最大を与える閾値の組よりも大きい場合，待合室の容量を社会厚生最大を与える閾値とする．

本節は両集団のエージェントがシステムに到着する際にシステムの状態を観測できると仮定している．一方，システムの状態が観測できない状況も考えられ，その場合にエージェントがある確率でシステムに参加することとする．両集団がそれぞれの確率で参加する場合の均衡状態におけるこれらの自己最適化の確率も計算できることが知られている．また，社会的に望まれる参加確率も社会厚生の関数を最大化して陽に求めることができる．前者を後者にシフトする問題は同様に考えられ，上記の両サイドの参加料金やサービスを受ける側のサービス料金を適切に設定することで実現できる．紙面の都合上ここで割愛するが，興味のある読者は文献 [5] を参考にされたい．

3. マッチング時間がある場合

3.1 両方が合理的な戦略をとる場合

2.1 節ではマッチング時間がゼロの場合であるとして客とタクシーの両方が戦略的場合に両者のすべての均衡戦略を導出した．さらに 2.2 節では合理的な均衡戦略（部分ゲーム完全均衡）を導出した．本節ではタクシーと客の到着はこれまでと同じ設定であるが，両者がマッチングする時間が正であり，パラメータ μ の指数分布に従うとする．また，マッチングポイントが一つとして，同時にマッチングできるのはタクシーと客の一組である．このため，このモデルにおいて，タクシーと客の行列の両方が存在することもある．さらに両サイドのバッファの制限を設けていないため，システムの状態は集団 1（タクシー）の数 x_1 と集団 2（客）の数 x_2 の組 (x_1, x_2) とすると，状態空間は $\{0, 1, \dots\} \times \{0, 1, \dots\}$ となる．ここでは，タクシーと客は両方とも戦略であるとし，集団 i のエージェントがシステムに到着する際に状態 (x_1, x_2) を観測する場合の参加確率 $\sigma^{(i)}_{(x_1,x_2)}$ を求める．そのため，このエージェントがシステムに到着するときにシステムの状態が (x_1, x_2) であるときの期待待ち時間 $T_i(x_1, x_2)$ を求める必要がある．しかし，2.1 節のように，両集団が戦略的であるため，注目エージェントの前に並んでいる同集団のエージェント数と相手集団のエージェント数だけではなく，注目エージェントの後ろにいるエージェント数も記録する必要があるため，三次元の期待待ち時間を計算する必要がある．しかし，この問題において，両サイドの合理的な戦略に限った場合，注目エージェント数の後ろに並んでいるエージェント数の影響が期待待ち時間に影響しないことが証明できるため，$T_i(x_1, x_2)$ を陽に計算することができ，参加する確率 $\sigma^{(i)}_{(x_1,x_2)}$ も陽に求まる．結果として，両集団の参加戦略が閾値型であることが証明された．つまり，たとえばタクシーが到着したときに x_2 の客がいる場合にある閾値 $\nu^{(1)}_{x_2}$ が存在し，$x_1 < \nu^{(1)}_{x_2}$ であれば $\sigma^{(1)}_{x_1,x_2} = 1$，$x_1 = \nu^{(1)}_{x_2}$ であれば $\sigma^{(1)}_{x_1,x_2} = p$ $(0 \le p \le 1)$，$x_1 > \nu^{(1)}_{x_2}$ であれば $\sigma^{(1)}_{x_1,x_2} = 0$ である．逆に客の均衡参加戦略も同様の閾値型となる．詳細は文献 [7] を参考にされたい．

両サイドの参加戦略は閾値型であるので，両サイドに参加閾値を設定して，これらの閾値の関数とする社会厚生の最大化問題を解くことを考える．これは M/M/1 における Naor 流の考え方である．しかし，この場合閾値が多次元であり，さらに探索空間に制限がないため，極めて難しい問題となる．そこで，需要側（客）がタクシーに払う料金を設定することで社会厚生を最大化する方法を考える．まずは，料金を払う前に，集団 i のサービスの価値を V_i として，タクシーと客はそれぞれ供給側と需要側とする．客がタクシーを利用する場合，料金 p をタクシーに払う．そうすることで，マッチングしたタクシーと客それぞれが報酬 $R_1 = V_1 + p$

と $R_2 = V_2 - p$ を得る．上記の解析結果の数値計算に基づき，料金 p を適切に設定することで，社会厚生を最大化することが可能である．

本稿では紙面の都合上，$T_i(x_1, x_2)$ の導出を省略するが，状態 $(0,0)$ を例にして計算過程を直感的に説明する．部分ゲーム完全均衡では到着した客（タクシー）がそのときのシステムの状態に基づき，参加行動を決める．たとえば，タクシーが状態 (0,0) に到着するとする．タクシーの行動は最初に来る客の行動に依存する．

サブゲーム 1：仮にタクシーが状態 $(0,0)$ に到着すれば，最初に来たこのタクシーの行動は参加・不参加の 2 択である．タクシーが状態 (0,0) に参加する場合をサブゲーム 1 では考える．システムの状態が (1,0) になるが，自分の期待滞在時間を計算するために，参加した後に最初に来る客の行動を推定する必要がある．最初の客が参加すればタクシーと客の期待利得は (U_1^*, U_2^*) である．ここで，$U_1^* = R_1 - C_1(1/\lambda_2 + 1/\mu), U_2^* = R_2 - C_2/\mu$ はそれぞれタクシーと客の期待利得であり，$U_1^* > 0, U_2^* > 0$ と仮定する．一方，最初の客が参加しない場合のタクシーと客との利得の組は $(U_1, 0)$ となる．ここで，タクシーの利得が決まっていない値 U_1 になる理由は次の客の行動に依存するからである．以上から、サブゲーム 1 では，合理的に考える最初の客は必ず参加行動を選ぶことがわかる．最初の客が不参加を選択して得る期待利益は 0 であるが，参加を選択すれば待つことがなくタクシーに乗れてその期待利得は $U_2^* > 0$ であるからである．

サブゲーム 2：次は仮に最初のタクシーが状態 $(0,0)$ のシステムに参加しないとする．このとき，最初の客の行動が 2 択があり，参加する場合はタクシー・客の利得の組が $(0, U_2)$ となる．U_2 が未定の理由は次のタクシーの行動に依存するためである．一方，タクシーは参加しないため明らかに利得が 0 となる．

サブゲーム 3：状態 $(0,0)$ に参加するかどうかを決める最初のタクシーは残りの可能性 $(U_1^*, U_2^*), (0, U_2), (0,0)$ を考えて，行動を決めるが，$U_1^* > 0$ の場合は参加を決め，$\sigma_{0,0}^{(1)} = 1$ となる．そして，客が状態 $(1,0)$（$U_2^* > 0$ のため）に参加するため，$\sigma_{1,0}^{(2)} = 1$ である．ゲームの流れは図 4 で示す．

このように客とタクシーは後退帰納法 (backward induction) を行い，どの状況であっても最終的に明らかな解がある状況に至り，そこから逆算し，現在の最適な選択をすることができる．推論の過程は滞在時間の期待値を計算するマルコフ連鎖の一段階推移解析法 (First step analysis) の過程と同様である．たとえば，ある

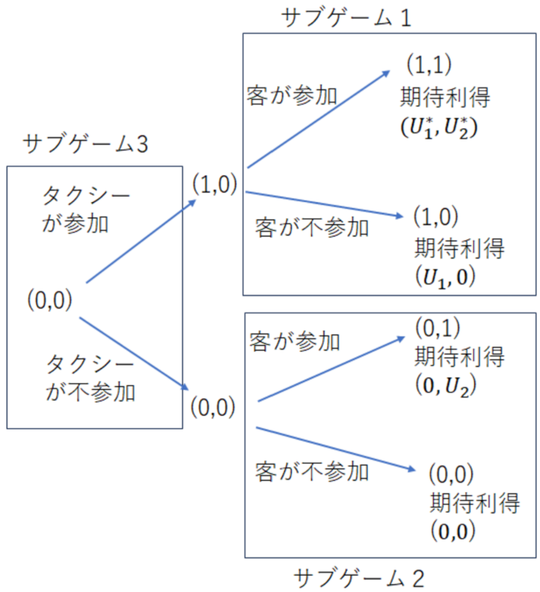

図 4　ゲームの展開の例

待ち行列での滞在時間を計算する場合に，注目客がシステムに到着するときに状態 s_i を見るとして，その客がシステムを去るまでの平均滞在時間を推論する．次のシステムのイベントはさまざまであり，イベントごとにこの滞在時間は変わるため，起こるイベントにより場合分けして計算する．この注目客はいつかはサーバに入る（あるいはサービス完了する）状態にたどり着くことから，この客の期待滞在時間を計算可能である．それを使って，さかのぼれば必ず注目客が状態 s_i に参加するときの期待滞在時間を計算することができる．文献 [7] はこの仕組みを使って，状態 $(0,0)$ だけではなくすべての状態における参加確率を計算している．

3.2　片方が戦略的：複数のマッチングポイント

3.1 節では一つのマッチングポイントがある場合を考えたが，空港や大きい駅などのタクシースタンドでは複数のマッチングポイントがあるのは一般的である．文献 [6] では複数のマッチングポインがあり，客のみが戦略的な場合を考える．客は到着するときに二つの情報を観察しており，一つ目は何人の客が待っているか，もう一つは何台のタクシーがいるかである．到着客が観察したこの二つの情報に基づきシステムの期待滞在時間を計算し，自分の期待利得を計算し，それが非負であれば参加して，負であれば参加しない．

このようにして行動する客はどの戦略をとるのだろうか．到着した客がシステムの中に i 人の他の客と j 台のタクシーを観測する場合，自分がマッチングスタンドに入れるまでの期待待ち時間を $T_{i,j}$ とする．これに

マッチング時間の期待値 $1/\mu$ を加えると期待滞在時間を得る．文献 [6] では $T_{i,j}$ が j を固定したとき，i について単調増加であることを証明している．その結果，システム内のタクシー数ごとに客は一つの閾値があり，システムに到着したときにその閾値よりも小さい数の客がいる場合にシステムに参加し，そうでない場合は諦める．系内に最大 K 台のタクシーが許容できる場合，客の参加戦略は $(n_0, n_1, \ldots, n_{K-1}, n_K)$ である．

M/M/1 での解析に倣って，客の閾値戦略が判明したため，客が任意の閾値戦略に従うと仮定して，社会厚生を計算し，それが最大になるような閾値のベクトル $(n_0, n_1, \ldots, n_{K-1}, n_K)$ を求める．しかし，この方法は現実的ではない．なぜならば，最適化問題の解の探索空間が多次元であり，しかもこれらの閾値に制限がないからである．また，この最適解を見つけたとしても一つの参加費で自己最適化の閾値のベクトルをこの社会的最適化のベクトルにシフトするのは困難である．そこで，客に参加費を課して，その参加費を少しずつ増やすことで，この閾値を動かして，社会厚生が最大になるような参加費を求める．参加費を少しずつ増やしていくと，最初は社会厚生が増加し，あるところで参加費が高くなり，社会厚生が下がる．そして，社会厚生が最大となる参加費の区間を採用する．この方法は文献 [6] で提案している．具体的な結果は文献 [6] を参考にされたい．

4. おわりに

本稿は両サイド型待ち行列におけるエージェントの戦略的な挙動について多集団ゲーム理論的な解析を紹介した．両サイド型待ち行列は需要側だけではなく供給側も待ち行列に並び，両者のマッチングを行ってからシステムから去る．このような状況はタクシースタンドに於けるタクシーと乗客が一番わかりやすいが，昨今飛躍的に発展しているマッチングプラットフォームや二面市場でも同様な仕組みが見られる．もちろんこれらのシステムの詳細な仕組みをモデル化しようと考えるとさまざまな要素を考慮しなければならないが，ここで紹介した解析のアイデアやテクニックが使えるかもしれない．筆者らが一連の研究を紹介したが，紙面の都合上，詳細に紹介することができなかった．興味がある読者は是非とも参考文献を読んでいただきたい．

謝辞　本研究は JSPS 科研費 JP21K11765 の助成を受けたものである．また，本記事の執筆機会を提供し，初稿に貴重なコメントをいただいた防衛大学校の佐久間大様に御礼を申し上げたい．また，数々のご指摘をいただいた編集委員会にこの場を借りて，謝意を表したい．

参考文献

[1] P. Naor, “The regulation of queue size by levying tolls,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, **37**, pp. 15–24, 1969.
[2] R. Hassin and M. Haviv, *To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems*, Springer, 2003.
[3] R. Hassin, *Rational Queueing*, Chapman & Hall/CRC, 2016.
[4] H. Q. Nguyen and T. Phung-Duc, “A two-population game in observable double-ended queueing systems,” *Operations Research Letters*, **50**, pp. 407–414, 2022.
[5] H. Q. Nguyen and T. Phung-Duc, “Supply-demand equilibria and multivariate optimization of social welfare in double-ended queueing systems,” *Computers & Industrial Engineering*, **170**, 108306, 2022.
[6] H. Q. Nguyen and T. Phung-Duc, “Strategic customer behavior and optimal policies in a passenger-taxi double-ended queueing system with multiple access points and non-zero matching times,” *Queueing Systems*, **102**, pp. 481–508, 2022.
[7] H. Q. Nguyen and T. Phung-Duc, “The rational outcome of a two-population game in a matching queue,” 2022 年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」, 2023.

