フォワードルッキングなリターン分布の資産運用への応用

霧生　拓也

資産運用においてはフォワードルッキングな情報を意思決定に反映することが重要である．しかし，フォワードルッキングな分布を資産運用プロセスに組み込む方法は確立されておらず，その有効性も十分に検証されていない．本研究ではオプション価格から推定したフォワードルッキングな分布を資産配分の決定およびパフォーマンス分析に利用する方法を提案し，その有効性を実証分析を通して検証する．分析の結果からフォワードルッキングなリターン分布の利用が運用効率の向上やパフォーマンス分析の実効性向上に繋がることを示す．

キーワード：資産運用，分布推定，インプライド分布，Recovery Theorem

1. はじめに

資産運用においてはフォワードルッキングな視点（市場参加者の将来見通し）を意思決定プロセスに反映することが望ましい．しかし，リターン分布をフォワードルッキングに推定する方法は少なく，ヒストリカルデータから推定したバックワードルッキングな分布が定量分析に利用されることが多い[1]．近年 Ross [1] によって，複数満期のオプション価格データからフォワードルッキングな分布を推定する定理 (Recovery Theorem, RT) が示された[2]．RT に関連して理論的な拡張や推定方法に関する研究が進められている一方で，その応用に関する実証研究は乏しい．本研究では[3]RT を用いて推定したフォワードルッキングな分布を資産配分およびパフォーマンス分析の各プロセスに応用する方法を検討し，有効性を実証分析を通して検証する．

2. フォワードルッキングなリターン分布

オプション市場参加者は将来見通しをもとにオプション取引を行っている．この見通しを逆算する形で，オプション価格から市場参加者の予想分布（インプライド分布）を計算することができる．ただし，オプション価格から計算できる分布はリスク中立分布であるため，投資家のリスク選好を考慮して実分布へと測度変換（リスク調整）する必要がある．

以下ではフォワードルッキングな実分布の推定手順を (1) リスク中立分布の推定，(2) 実分布の推定（RT を用いたリスク調整），の二つに分けて説明する．

2.1 リスク中立分布の推定

将来時点 T の原資産価格 x に対するインプライドリスク中立分布 $f_T^Q(x)$ は，行使価格 k，満期 T のヨーロピアンコールオプション価格 $c(k,T)$ を k で 2 階微分して得られる [6]．

$$f_T^Q(x) = e^{r^f T} \frac{\partial^2 c(k,T)}{\partial k^2}\bigg|_{k=x} \tag{1}$$

ここで r^f は無リスク金利を表す．

2.2 実分布の推定 (Recovery Theorem)

Ross [1] および Jensen et al. [7] はリスク中立分布から投資家のリスク選好を特定し，実分布を計算できることを示した．市場の完備性および時間分離可能な効用をもつ代表的投資家の存在を仮定する．また，市場の状態 $n\,(=1,\ldots,n_0,\ldots,N)$ を原資産価格 x_n によって定義し，現在の状態 n_0 から $m\,(=1,\ldots,M)$ 期間後（1 期間の長さは τ）の状態 n への推移に関する状態価格を $\pi_{m,n}(=e^{-r_f m\tau} f^Q_{m\tau,n})$, 主観的割引係数を δ，状態 n における限界効用を h_n とする．このとき，以下の方程式が成り立つ．

[1] 実務ではフォワードルッキングな視点はアナリストや運用者の定性判断という形で運用プロセスに組み込まれることが多い．しかし，客観性や一貫性の観点からはフォワードルッキングな視点を定量的に組み込むことがより望ましい．

[2] Ross [1] 以前にもオプション価格に内包されているリターン分布の推定方法は多く研究されていたが，推定にヒストリカルデータを必要とする点で完全にフォワードルッキングな方法とはいえないという問題があった．

[3] 本稿は慶應義塾大学大学院理工学研究科在学中に執筆した論文 [2–4] および博士論文 [5] を再構成したものである．

きりう　たくや
大阪大学大学院経済学研究科
〒 560–0043　大阪府豊中市待兼山町 1–7
kiriu@econ.osaka-u.ac.jp

$$\begin{bmatrix} \pi_{1,1} & \cdots & \pi_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{M,1} & \cdots & \pi_{M,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{-1} \\ \vdots \\ h_N^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta^{\tau} \\ \vdots \\ \delta^{M\tau} \end{bmatrix} \tag{2}$$

方程式の数は M であるのに対して，未知変数の数は $N(\delta, h_1^{-1}, \ldots, h_{n_0-1}^{-1}, h_{n_0+1}^{-1}, \ldots, h_N^{-1})$ であるため，$N \leq M$ の場合に未知変数を特定でき，実確率 $f_{m,n}^P$ を計算できる (RT)．直感的には RT はヒストリカルデータ（過去方向への時系列情報）の代わりに複数満期に対するオプション価格データ（将来方向への時系列情報）を用いることで，フォワードルッキングな実分布推定を可能にした方法と解釈できる．

$$f_{m,n}^P = \frac{1}{\delta^{m\tau}} h_n^{-1} \pi_{m,n} \tag{3}$$

ただし，(2) の方程式は非適切問題となる（ノイズに対して解が敏感に反応する悪い性質をもつ）ことが知られている．そこで，この問題に対して効用関数形を仮定して推定パラメータ数を削減する [7]，正則化項を加える [8, 9] といった方法が提案されている．

3. 資産配分への応用

投資家が株式や債券などの資産クラスに対する投資比率を決める問題を資産配分問題という．資産配分問題を解く場合にはリターン分布をインプットする必要があり，リターン分布の予測は運用パフォーマンスの優劣に直結する重要なプロセスである．Kostakis et al. [10] や霧生・枇々木 [11] などの先行研究において分布推定アプローチの違いが運用パフォーマンスに与える影響を検証しているが，その対象はヒストリカルデータを用いた推定アプローチ間の比較に限られている．投資家の将来見通しを反映したフォワードルッキングなアプローチを利用することでヒストリカルデータを用いたアプローチと比較して高いパフォーマンスを獲得できる可能性があるが，フォワードルッキングなアプローチを含めた包括的な比較はなされてない．

そこで，本研究では実務で多く扱われる伝統的 4 資産（国内株・外国株・国内債・外国債）に対する資産配分問題の枠組みでフォワードルッキングな（周辺）分布を用いたモデルを構築する[4]．そして，ヒストリカルデータを用いたアプローチとバックテストのパフォーマンスを比較する．モデルおよび検証の概要を図 1 に示す．

3.1 フォワードルッキングな分布の推定：株式

株式（国内株・外国株）の分布は 2 節で説明した RT を用いて推定を行う．代表的投資家の効用関数形

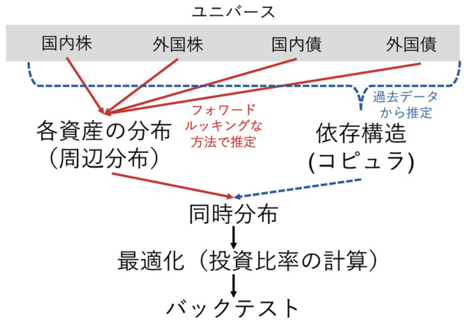


図 1 モデルおよび検証の概要

に CRRA 型を仮定し ($h_n^{-1} = (x_n/x_{n_0})^{\gamma}$)，(2) 式から主観的割引係数 δ と相対的リスク回避度 γ の二つのパラメータを最小 2 乗法で推定する．

3.2 フォワードルッキングな分布の推定：債券

債券（国内債・外国債）に関しては，取引が短い満期のみに集中している（複数満期のオプション価格が入手できないことが多い）ため，株式と同様に RT を用いて分布を推定することは難しい．一方，株式と異なり満期時点までのキャッシュフローが確定しているため，投資時点で期待リターン（利回り）が計算可能である．そこで，本研究では実分布の平均が債券利回り y に一致するという仮定をおき，次式から代表的投資家の相対的リスク回避度 γ を推定してインプライドリスク中立分布を実分布に変換する．

$$\min_{\gamma} \left(E^P[r] - (e^{y\tau} - 1) \right)^2 \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \min_{\gamma} \left(\frac{\int_{-1}^{\infty} r(1+r)^{\gamma} f_{\tau}^Q(r)dr}{\int_{-1}^{\infty} (1+u)^{\gamma} f_{\tau}^Q(u)du} - (e^{y\tau} - 1) \right)^2 \tag{5}$$

3.3 分析条件

上で説明したフォワードルッキングなアプローチに，先行研究で多く用いられてきたヒストリカルデータを用いたアプローチ（カーネル密度推定法），インプライド分布をヒストリカルデータを用いてリスク調整するアプローチ（代表的投資家の効用関数形として CRRA 型を仮定）を加えた 3 通りのアプローチで分布を推定し，バックテストのパフォーマンスを比較する．過去データを利用する場合のパラメータ推定期間は 48 カ

[4] 霧生ら [2] は一つのリスク資産（株式）と無リスク資産への投資の枠組みにおいて分析を行い，Kiriu and Hibiki [4] は伝統的 4 資産への投資の枠組みで検証を行っている．本稿では紙面の都合上，伝統的 4 資産への資産配分に対する検証結果を示すが，一つのリスク資産と無リスク資産への投資を考えた場合でもフォワードルッキングなアプローチが相対的に高いパフォーマンスを獲得できることを確認している．

表 1　比較対象

方法	説明
Historical	ヒストリカル分布（カーネル密度推定）
Implied (Hist)	インプライド分布（過去データを用いたリスク調整）
Implied (FL)	インプライド分布（フォワードルッキングなリスク調整）

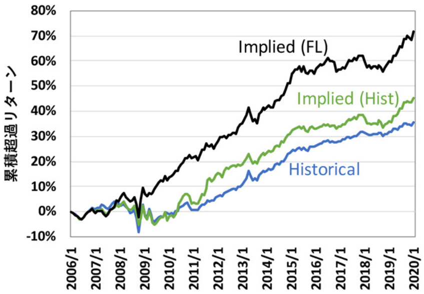


図 2　累積超過リターンの比較

表 2　パフォーマンス（月率）の比較
（太字は最もパフォーマンスが高いアプローチ）

	超過リターン	80% CVaR	80%CVaR レシオ	回転率
国内株	0.49%	7.76%	0.06	0%
外国株	0.66%	5.48%	0.12	0%
国内債	0.14%	0.75%	0.19	0%
外国債	0.26%	1.70%	0.15	0%
等ウェイト	0.39%	2.74%	0.14	0%
Historical	0.18%	**1.20%**	0.15	19.5%
Implied (Hist)	0.23%	1.43%	0.16	22.1%
Implied (FL)	**0.32%**	1.30%	**0.25**	**12.5%**

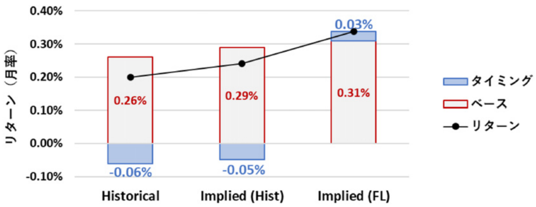


図 3　パフォーマンスの要因分解

月とするが，推定期間を変更した場合でも同様の結論が得られる．表 1 に比較対象をまとめておく．

資産間の依存構造は正規コピュラを用いて過去 48 カ月間の月次リターンから推定する．運用期間は 2006 年 1 月から 2020 年 1 月までとし，各月末に 80%CVaR レシオ（=期待超過リターン/80%CVaR）最大化問題を解いて翌月の投資比率を決定する．推定される同時分布は複雑なため，解析的に最適な投資比率を計算することは難しい．そこで，同時分布に基づいてモンテカルロシミュレーションで 10,000 通りのシナリオを発生させ，最適投資比率を数値的に計算する[5]．国内株・外国株・国内債・外国債の各資産クラスのプロキシーとして，日経 225・S&P 500・JGB 先物・T-Note 先物をそれぞれ採用する．

3.4　分析結果と考察

各推定アプローチのバックテストのパフォーマンスを図 2 および表 2 に示す．国内株・外国株・国内債・外国債のそれぞれに投資した場合と 4 資産に等ウェイトで投資した場合のパフォーマンスをあわせて示す．

目的関数である 80%CVaR レシオは Implied (FL) が最も高く，フォワードルッキングな推定アプローチを用いることで高いパフォーマンスを獲得している．三つのアプローチでリスク水準に大きな違いはないものの，超過リターンに 2 倍近くの差が存在することが 80% CVaR レシオの差異に繋がっている．さらに，三つのアプローチの中で Implied (FL) の回転率は最も低く，取引コストを考慮した場合も Implied (FL) の優位性は変わらない．また，Implied (FL) 以外のアプローチに関しては Implied (Hist), Historical の順に高い 80%CVaR レシオを獲得しており，推定においてヒストリカルデータへの依存度が強いアプローチほどパフォーマンスが低い傾向にあった．これらの結果は資産配分におけるフォワードルッキングな視点の重要性を示唆している．

Implied (FL) が相対的に高いパフォーマンスを獲得できた要因を明らかにするため，時点 t におけるポートフォリオのリターン $r_{p,t}$ を (6) 式のように平均的な投資比率に起因するベース要因（第一項）と平均的な投資比率からの乖離に起因するタイミング要因（第二項）に分解した場合の，各要因の平均を図 3 に示す．

$$r_{p,t} = \sum_j w_{j,t-1} r_{j,t} = \sum_j \bar{w}_j r_{j,t} + \sum_j (w_{j,t-1} - \bar{w}_j) r_{j,t} \tag{6}$$

ここで，j は資産を表す添字である．また，$w_{j,t-1}$ は投資比率，$\bar{w}_j$ は分析期間における投資比率の平均，$r_{j,t}$ は実現リターンを表す．

Implied (FL) のタイミング要因はプラスであるのに対してそれ以外の方法のタイミング要因はマイナスであり，Implied (FL) とそれ以外の方法のパフォーマンスの差異は主にタイミング要因に起因している．この結果はフォワードルッキングな推定アプローチが将来の見通しをもとに，適切に投資比率を変化させたことが相対的

[5] 線形計画問題として定式化することが可能である．

に高いパフォーマンスに繋がったことを示唆している．

4. パフォーマンス分析への応用

資産運用を行ううえでは投資する資産の価格がどのような要因で変化したのかを分析することも重要である．Campbell [12] をはじめとする時系列モデルによるアプローチと Chen et al. [13] をはじめとするアナリスト予想を用いたアプローチなどこれまでに複数のリターン変動要因の分解方法が提案されている．しかし，これらのアプローチは日次など短期の価格変動要因を分析するのに適さず[6]，先行研究はいずれも月次以上の中長期のリターンを対象に変動要因を分析している．一方で短期のリターン変動要因の特定は，金融イベントと紐づけて要因を分析したり，短いスパンで Plan–Do–See のサイクルを回すために重要である．本研究では，短期の価格変動要因を分析可能な新たな分解方法を提案する．この方法ではオプション価格から RT を用いて推定した実分布と確率的ディスカウントファクター (SDF) をもとに，資産価格の変化をキャッシュフロー要因（CF 要因）と割引率要因（DR 要因）に分解する．オプション価格には投資家の取引を通して情報が迅速に織り込まれるため，長期の価格変動だけでなく短期の価格変動に対しても変動要因を分析できる．提案方法を用いて S&P 500 指数の日次リターンの変動要因を分析する．

4.1 資産価格変動要因の分解

時点 t における資産価格 p_t は将来時点 $t+\Delta t$ における資産価格 p を時点 t における SDF $s_t(p,\Delta t)$ で割り引いた期待値として表現できる．

$$p_t = \int_0^\infty p f_t^P(p,\Delta t) s_t(p,\Delta t) dp \qquad (7)$$

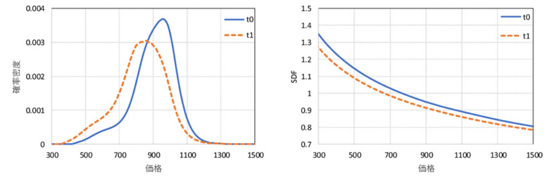
ここで，$f_t^P(p,\Delta t)$ は実測度 P の下での条件付き密度関数(実分布)である．この関係より，時点 t_0 から時点 t_1 までの資産価格リターン r に対する分解式を導出できる．

$$r = \frac{p_{t_1} - p_{t_0}}{p_{t_0}} = r_{CF} + r_{DR} \qquad (8)$$

$$r_{CF} = \frac{1}{p_{t_0}} \int_0^\infty p \left(f_{t_1}^P(p,\Delta t) - f_{t_0}^P(p,\Delta t)\right) \left(\frac{s_{t_1}(p,\Delta t) + s_{t_0}(p,\Delta t)}{2}\right) dp \qquad (9)$$

$$r_{DR} = \frac{1}{p_{t_0}} \int_0^\infty p \left(\frac{f_{t_1}^P(p,\Delta t) + f_{t_0}^P(p,\Delta t)}{2}\right) (s_{t_1}(p,\Delta t) - s_{t_0}(p,\Delta t)) dp \qquad (10)$$

6 時系列モデルによるアプローチでは短期の価格変動を別の変数で説明する時系列モデルを特定する必要があるが，短期の価格変動を説明するモデルの構築は容易ではない．アナリスト予想を用いたアプローチでは情報がアナリスト予想に反映されるまでのラグの影響から，短期リターンの変動要因を説明することは難しい．



(a) 実分布 (b) SDF

図 4 推定結果の例

(8) 式は，資産価格リターンが将来キャッシュフローに対する期待（実分布）の変化による部分（CF 要因）r_{CF} と割引率 (SDF) の変化による部分（DR 要因）r_{DR} に分解できることを表している．Δt には任意の期間を設定でき，どの期間の実分布や SDF に注目してリターンを説明するかを表す．以降では，$\Delta t = 30$ 日と設定した場合の結果を示すが，Δt の設定が分析結果に与える影響は軽微であることを確認している．また，この関係式を用いてリターンの分散 $\mathrm{Var}(r)$ も CF 要因と DF 要因に分解できる．

$$\mathrm{Var}(r) = \mathrm{Cov}(r_{\mathrm{CF}}, r) + \mathrm{Cov}(r_{\mathrm{DR}}, r) \qquad (11)$$

4.2 分析条件

提案法を用いて S&P 500 指数の 2007 年 1 月 3 日から 2018 年 8 月 31 日の日次リターンの変動要因を分析する．精度よく要因分解を行うためには投資家の効用関数形を仮定することによるバイアスを抑制しつつ，ノイズに対して頑健性のある推定方法を利用することが望ましい．そこで本研究では，伊藤ら [9] の 2 段階推定法を利用して RT の解を推定する．この方法はパラメトリックな仮定の下で変数の数を減らして解を推定し，その情報を反映した正則化項を目的変数に加えてノンパラメトリックに解を推定し直すことで，フィッティングと安定性の両立を目指した方法である．

4.3 具体例

提案法の具体例として -8.93% と非常に大きな下落幅を記録した 2008 年 12 月 1 日の S&P 500 リターンの分解結果を考察する．図 4 に各時点における実分布と SDF の推定結果を示す．まず，実分布の変化に注目すると，2008 年 11 月 30 日 (t_0) と比較して 2008 年 12 月 1 日 (t_1) の分布は全体的に左側にシフトしており，将来の資産価格に対する投資家の予想が悲観的に変化していることがわかる．これを反映して，CF 要因は大きくマイナスとなり，-6.00% となった．次に，SDF の変化に注目すると，2008 年 11 月 30 日と比較して 2008 年 12 月 1 日のグラフが下側にシフトしてい

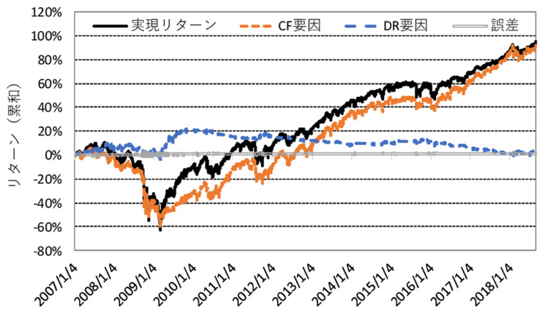


図 5　S&P 500 リターンの分解

表 3　S&P 500 リターンの分解（年率）

	平均	（比率）	分散	（比率）
実現リターン	8.12%		0.0391	
CF 要因	7.84%	96.6%	0.0315	80.6%
DR 要因	0.19%	2.4%	0.0068	17.4%
誤差	0.08%	1.0%	0.0008	1.9%

る．一般に投資家の主観的割引率が大きくなるほどグラフは下側にシフトする．それを反映して DR 要因もマイナスとなり，−2.88% であった．つまり，CF 要因と DR 要因の両方がマイナスとなり，リターンの大きな下落につながったが，その中でも特に CF 要因の寄与が大きかったといえる[7]．2008 年 12 月 1 日は世界的な金融危機の中にあり，経済の先行きに対する見通しが悪化していた時期であることを考えると，直感に沿った結果と考えられる．

4.4　S&P 500 日次リターンの分解

図 5 に (9) 式，(10) 式において Δt を 30 日に設定し，S&P 500 の日次リターンを分解した結果を示す．また，表 3 には実現リターンの平均と分散を要因分解した結果を示す．

通期では CF 要因が年率 7.84% と実現リターンの 8.12% のほとんどの部分を占めていることが確認できる．一方で，DR 要因は 0.19% の寄与と小さかった．ただし，DR 要因の寄与は常に小さいわけではなく，2009 年には約 20% 寄与するなど時期によって傾向が異なっている．また，リターンの分散に対する寄与についても DF 要因の占める割合が 17.4%であったのに対して CF 要因の占める割合が 80.6% と大きく，CF 要因が価格変動の主要因となっている．また，誤差の変動は CF 要因や DF 要因と比較して十分に小さい．

[7] これらの要因の和を計算すると −8.88% となり，実現リターンである −8.93% と一致しない．この誤差は主に RT を用いた推定の際の最適化問題の残差に起因して発生する．

5.　まとめと今後の課題

本研究では RT で推定した分布を利用してフォワードルッキングな視点を資産運用のプロセスに組み込む方法を検討し，実証分析を通して運用効率の向上やパフォーマンス分析の実効性向上に繋がることを示した．これらの結果を踏まえると資産運用会社は運用プロセス高度化に向けて分析プロセスにフォワードルッキングな視点を組み込むことの検討を進めるべきと考えられる．ただし，利用にあたってはフォワードルッキングな見通しは必ずしも実現値と整合的であるとは限らないことには十分留意する必要があるだろう．

参考文献

[1] S. Ross, “The recovery theorem,” *The Journal of Finance*, **70**, pp. 615–648, 2015.
[2] 霧生拓也，枇々木裕太，枇々木規雄，“最適資産配分問題における収益率分布推定方法の比較，”ジャフィー・ジャーナル，**19**, pp.1–26, 2021.
[3] 霧生拓也，枇々木規雄，“オプション価格情報を利用した資産価格変動要因の分解—米国株式市場における実証分析—，”現代ファイナンス，**43**, pp.27–48, 2021.
[4] T. Kiriu and N. Hibiki, “Asset allocation with forward-looking distribution,” *International Journal of Portfolio Analysis and Management*, 2022 (in press).
[5] 霧生拓也，“フォワードルッキングなリターン分布の資産運用への応用，”慶應義塾大学大学院博士論文，2022.
[6] D. T. Breeden and R. H. Litzenberger, “Prices of state-contingent claims implicit in option prices,” *The Journal of Business*, **51**, pp. 621–651, 1978.
[7] C. S. Jensen, D. Lando, and L. H. Pedersen, “Generalized recovery,” *Journal of Financial Economics*, **133**, pp. 154–174, 2019.
[8] T. Kiriu and N. Hibiki, “Estimating forward looking distribution with the Ross recovery theorem,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **62**, pp. 83–107, 2019.
[9] 伊藤雅剛，霧生拓也，枇々木規雄，“Generalized recovery theorem を用いた forward looking な収益率分布の推定，”ジャフィー・ジャーナル，**17**, pp. 76–99, 2019.
[10] A. Kostakis, N. Panigirtzoglou and G. Skiadopoulos, “Market timing with option-implied distributions: A forward-looking approach,” *Management Science*, **57**, pp. 1231–1249, 2011.
[11] 霧生拓也，枇々木規雄，“複数資産にインプライド分布を用いた最適資産配分モデル，”日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，**57**, pp. 112–134, 2014.
[12] J. Y. Campbell, “A variance decomposition for stock returns,” *The Economic Journal*, **101**, pp. 157–179, 1991.
[13] L. Chen, Z. Da and X. Zhao “What drives stock price movements?” *The Review of Financial Studies*, **26**, pp. 841–876, 2013.

