

とある若手の研究活動

—数理・計量ファイナンスの観点から—

下清水 慎

本稿では、筆者の博士後期課程から現在までの研究活動について、およびそこから感じたさまざまなことについて概説する。その中で、博士後期課程在籍中に苦勞したことや行ってきてよかったことについて言及している。また、博士後期課程在学中およびそれ以降の研究についての概略も記載する。

キーワード：博士後期課程、最適執行戦略、マルコフ決定過程、マルコフゲーム、マルコフ完全均衡、確率制御、期待効用最大化、statistical arbitrage

1. はじめに

博士後期課程の3年間を振り返ると、思い出す言葉がある。「じっくり、丁寧、迅速に」。これは、筆者が博士後期課程に進学して間もなく師匠が（少しニコツとしながら）おっしゃった言葉である。一見すると、「じっくり」と「迅速」という言葉は同時に成り立たないように思える。筆者はこの言葉の意味を「(研究内容については)じっくり、丁寧(に取り組み)、(研究に取りかかるのは)迅速に」と解釈している。たとえば、研究業績を出すために中身が完全でないまま焦って投稿する、または、丁寧に論文を執筆するがなかなか投稿できないという人がいるかもしれない。(少なくとも、筆者の周りにはこのような人がいた。)また、論文の執筆・投稿には一般に締め切りがない。特に博士後期課程に在学している間は、このような状況に陥りがちであることから、迅速に研究に取りかかり、じっくり、丁寧に研究を進めるのを心掛けることが大切である。筆者はこの言葉をいただいてから現在まで、この言葉(解釈)のとおり研究活動を行ってきたと自負している。今後もこの言葉を胸に研究を続けていきたい。

本稿では、僭越ながら筆者の博士後期課程在学中および修了後の活動についての概略を述べていく。筆者は経済学部・経済学研究科出身であり、文系の立場からファイナンスの理論研究を行っている。そこで、以下の話が必ずしも理系の研究科に所属されている方々に当てはまるかどうかはわからない。しかし、できる

しもしみず まこと
 東京都立大学大学院経営学研究科
 〒100-0005 東京都千代田区丸の内 1-4-1 丸の内永楽ビルディング 18階 研究室 09
 shimosshi1q94@gmail.jp, shimoshimizu@tmu.ac.jp

限りあらゆる分野の「研究」に共通するような内容について記載したつもりである。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、筆者の博士後期課程での活動について概略を述べ、その中で行ってきて良かったことについていくつか述べていく。この内容が博士後期課程に現在在籍している、または、今後進もうと考えている方々の参考になることを願う。3節では、筆者の博士後期課程での研究内容について概略を述べる。4節では、博士後期課程を修了した後の研究内容について述べる。

2. 博士後期課程での活動について

2.1 論文執筆

博士後期課程に在籍していた3年間でもっとも尽力したのは論文執筆活動である。特に、丁寧に論文の加筆・修正を行うことが大事であると実感した。具体的には、査読付き国際学術雑誌に投稿するために何度も何度も原稿を読み直し、論文の構成などに加え一つ一つの文章や単語にまで細心の注意を払って何度も加筆・修正を行った。初めての投稿であったので、この作業は筆者にとってはとても大変であった。しかし、振り返ると、この緻密な作業があったために論文が採択された部分もあると思う。投稿した後にこうしておくべきだったと後悔することがないように、最大限加筆・修正した状態で投稿することが大事であると考えている。

2.2 国内外での学会発表

博士後期課程在学中に研究成果を国内・国際学会で発表することは重要であるというのが筆者の考えである。なぜなら、自分の既存の研究を発展させたり、新たな研究につながる可能性が高まるからである。筆者は博士後期課程在学中から研究内容を国内外の学会で積極的に発表してきた。学会発表した際には、有益な

質問やフィードバックなどをいただくことがあった。また、発表を聞いてくださった先生と共同研究もさせていただいた。このように、積極的に学会発表を行い、ほかの研究者の方々に自分の研究を知ってもらうことは重要である。さらに、学会発表には自身の研究分野を紹介するという側面もある。自身の研究分野について知ってもらうことで、その分野へ参入する研究者が増え、分野の発展につながると考えられる。

2.3 博士後期課程で苦労したこと

率直に述べると、博士後期課程での3年間は筆者にとって苦労の連続であった。まず、筆者は経済学部・経済学研究科(文系)出身であり、数学の学習には相当な努力が必要であった。ファイナンスの理論分析は測度論や確率論など高度な数学に基づいて行われることが多いため、これらの数学を学ぶ必要がある。筆者の場合は複数の勉強会で数学を学ぶ機会があり、とても恵まれていた。誰かと一緒に数学を学ぶ機会があればたいへん貴重なことなので、ぜひ大切にしてほしいと思う。また、国際学会での発表も大変であった。準備に関しては、英語で研究内容を説明するのが難しかった。発表当日には、見知らぬ土地で見知らぬ人に研究発表するという自体に困難を感じた。筆者が得た教訓としては、基本的なことではあるが、初めのうちは事前発表の練習を何度も行うことが重要であったと思う。

2.4 その他

論文執筆、学会発表のほか、学部・大学院開講科目や大学の附属図書館におけるティーチング・アシスタント(Teaching Assistant; TA)やティーチングフェロー(Teaching Fellow; TF)を務めた。TA、TFとしては、大学院生向けの補講を行ったり、学部生の経済学・数学・統計学関連の質問に答えたりしていた。学生に解説することで学ぶことが多数あったので、博士後期課程の学生にとってはこのような機会も学びの場となるであろう。また、筆者は博士後期課程在学中複数の勉強会に参加していた。専門が異なる人と一緒に勉強することで、同じ対象でも異なる見方をすることがしばしばあるので、大変勉強になると思う。

3. 具体的な研究の内容

ここからは筆者の具体的な研究内容について述べていく。筆者はこれまで**執行問題(execution problem)**という研究分野に取り組んできた。自らの取引量(売買注文量)があまりにも多い、年金運用会社などの機関投資家は、実際の売買取引価格(**執行価格(execution price)**)に影響を与える。このような投資家をラージ

トレーダー(**large trader**)と呼び、ラージトレーダーが与えた価格への影響を**価格インパクト(price impact)**と呼ぶ。執行問題とは、価格インパクトを考慮したラージトレーダーの最適売買取引戦略(**執行戦略(execution strategy)**)を理論的に分析する研究分野である¹。Bertsimas and Lo [1]やAlmgren and Chriss [2]に端を発し、約20年ほどで数多の研究が研究者および実務家によって行われてきた。この研究分野の概要についてはCartea et al. [3]やLaruelle and Lehalle [4]などが参考となる。

筆者は主に「小口投資家の売買取引量がラージトレーダーの最適執行戦略に与える影響」に関する理論研究を行ってきた。これまで行ってきた研究はKunou and Ohnishi [5]、Kuno and Ohnishi [6]、およびKuno et al. [7]のモデルを拡張・発展させたものである。以下、3.2節のモデルでは、離散時間の枠組みにおいて確率動的計画法(stochastic dynamic programming)を用いて小口投資家全体の売買取引が単一のラージトレーダーの最適な売買取引戦略に与える影響を分析した。3.3節のモデルでは、連続時間の枠組みへの拡張を行った。さらに、3.4節のモデルでは、複数のラージトレーダーが存在する市場を研究し、マルコフ完全均衡における執行戦略の導出および定性的な分析についてゲーム理論の枠組みで行った。これらのモデルについては、大西と下清水 [8]において基本的な解説を行っている。

3.1 関連文献

筆者の研究内容に入る前に、いくつか関連文献について述べておく。上で述べたBertsimas and Lo [1]やAlmgren and Chriss [2]は、価格インパクトのうち**一時的価格インパクト(temporary price impact)**および**恒久的価格インパクト(permanent price impact)**を考慮した単一のラージトレーダーの最適執行戦略について分析している²。Cartea and Jaimungal [9]や

¹ 最適の意味は、期待コスト最小化や期待効用最大化など多様である。

² ここで価格インパクトについて概説する。上で述べた価格インパクトは、大きく分けて3種類に分類される。ある時点で投資家たちが買い/売りの注文を提出することで、瞬間的に価格インパクトが発生し、付加的なコストを伴った取引価格(執行価格)において売買取引を行う。その次の時点 $t+1$ (または $t+\Delta t$)において、(市場の流動性により)一定の割合で価格が減少する(回復する)。このとき、時点 $t+1$ ($t+\Delta t$)において消えた部分の価格インパクトを一時的価格インパクト(**temporary price impact**)と呼び、残っている部分の価格インパクトを恒久的価格インパクト(**permanent price impact**)という。さらに、一時的価格インパクトが取引期間をかけて減少していくとき、**過渡的価格インパクト(transient price impact)**という。

Cartea and Jaimungal [10] ではこれらのモデルに小口投資家たちのランダムな総注文量の影響を考慮して最適執行戦略を導出している。一方, Bouchaud et al. [11] では価格インパクトは時間をかけて減衰していくことを実証的に明らかにした。そこで, Gatheral [12] や Obizhaeva and Wang [13] は価格インパクトのうち過渡的価格インパクト (**transient price impact**) を考慮したモデルを考案している。筆者の研究では, これらすべてを考慮したモデルを考案し, 最適または均衡における執行戦略を導出し, その性質について分析している。

3.2 最適執行問題

まず初めに, 単一のラージトレーダーのみ存在するモデルを考える。

3.2.1 小口投資家による影響を考慮したモデル

本研究は, 筆者のこれまでの研究内容の基礎をなすモデルであり, Ohnishi and Shimoshimizu [14] の前半のモデルに対応している。本モデルでは, 小口投資家全体の売買取引量による価格インパクトが単一のラージトレーダーの最適執行戦略に対してどのような影響を与えるのかを理論的に分析した。単一のラージトレーダーの, 購入計画期間の最終時点における手持ち資金から得られる期待効用最大化問題 (**expected utility maximization problem**) を離散時間の枠組みでマルコフ決定過程 (**Markov decision process**) の問題として定式化している³。そして, ベルマン方程式 (**Bellman equation; dynamic programming equation**) から最適執行戦略を導出し, 小口投資家全体の売買取引量が過渡的な価格インパクトを通してラージトレーダーの最適執行戦略に影響を与えることを明らかにした。

3.2.2 マルコフな依存性の考慮

本研究の結果は Fukasawa et al. [15] に掲載されている。3.2.1 節と同様の問題を小口投資家全体の売買取引量に時系列的な相関がある場合に拡張したモデルについて分析した。具体的には, 小口投資家の総売買取引量は時系列的な相関を表す **AR(1)** モデルに従うと仮定する。3.2.1 節のモデルと同様に最適執行戦略を導出し, 小口投資家全体の売買取引量が過渡的な価格インパクトを通して, および, 直接的に最適執行戦略に

影響を与えることを明らかにした。また, ある条件下でラージトレーダーにある種の裁定機会 (**statistical arbitrage**) が存在することを明らかにした。これらの結果から, 小口投資家たちの売買取引量に時系列的な相関を考慮する必要性を確認した。

3.2.3 2 資産の売買取引に関するモデル

本研究の結果は Ohnishi and Shimoshimizu [16] に掲載されている。3.2.2 節の問題を拡張し, ラージトレーダーおよび小口投資家たちが複数資産 (2 資産) の売買取引を行う場合を分析している。この研究により, 複数資産の売買取引によるクロス・インパクト (**cross-impact**) がラージトレーダーの最適執行戦略に与える影響を分析することができる。ただし, 小口投資家全体の売買取引量は時系列的な相関を表す **VAR (1)** モデルに従うと仮定した。クロス・インパクトを考慮することで小口投資家全体による資産 i の売買取引量がラージトレーダーの資産 $j (\neq i)$ の最適執行戦略に影響を与えることを明らかにした。これらの結果は, 複数資産の売買取引量に時系列的な相関を考慮する重要性を示している。

3.3 連続時間への拡張

本研究の結果は Fukasawa et al. [17] に掲載されている。本研究では連続時間の枠組みにおいて小口投資家全体の売買取引量に時系列的な相関がある場合における 3.2.2 節の問題を考える。ただし, 小口投資家の総売買取引量は **Ornstein-Uhlenbeck (OU)** プロセスに従うと仮定する。**Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)** 方程式から最適執行戦略を導出し, 小口投資家全体の売買取引量が過渡的な価格インパクトを通して, および, 直接的に最適執行戦略に影響を与えることを明らかにした。また, HJB 方程式に付随する微分方程式の系は行列型のリッカチ微分方程式 (**Matrix-type Riccati differential equation; MRDE**) と線形微分方程式 (**linear differential equation**) によって特徴付けられることを明らかにした。

3.4 ゲームモデルへの拡張

本研究は 3.2.1 節のモデルにおいて複数 (2 者) のラージトレーダーが存在する市場において, お互いの取引による売買取引価格への影響を考慮した均衡における執行戦略 (以下, 均衡執行戦略) を導出し, それぞれの戦略が互いにどのように影響を与えあうのかを分析した。本研究の結果は Ohnishi and Shimoshimizu [14] の後半のモデルに対応している。また, n 人のラージトレーダーが存在する場合への拡張を Ohnishi and Shimoshimizu [18] で行っている。確率ゲーム (マル

³ 効用関数 $U(x)$ には, 以下の形で定義される **Constant Absolute Risk Averse type (CARA-type; 負の指数型)** の効用関数を用いた。

$$U(x) := -\exp\{-\gamma x\}. \quad (1)$$

ここで, 上式の γ はリスク回避係数 (**risk aversion parameter**) と呼ばれ, 大きければ大きいほどリスク回避的であることを表す。

コフゲーム；Stochastic game; Markov game) として定式化することによりマルコフ完全均衡 (Markov perfect equilibrium) における均衡執行戦略を導出し、互いの売買取引戦略に関する相互作用を明らかにした。3.2.1 節のモデルとの比較により、複数のラージトレーダーが存在する場合の方が単一の場合よりも売買取引の時期を早めることが確認された。このことから、複数のラージトレーダーが存在する場合、単一のラージトレーダーのみ存在する場合と比べ、より市場（価格）に影響を与えるというメカニズムが明らかになり、複数のラージトレーダーが存在するモデルを考える重要性が明らかになった。

4. 博士後期課程修了後の研究

博士後期課程修了後も主に執行問題に取り組んでいる。既存研究から、ラージトレーダーの売買取引にはさまざまな要因が影響を与えることが明らかとなっている。また、その要因のダイナミクスはマルコフな依存性 (Markovian dependence) をもっていることが多い。たとえば、Lehalle and Neuman [19] は、価格の上昇・下落に対して予測力をもつといわれている order book imbalance という特徴量が、時系列的な相関をもつことを実証研究により明らかにしている。そこで、彼らはマルコフな依存性をもつ外的な価格への影響と (i) 過渡的価格インパクトが存在する場合、(ii) 一時的価格インパクトと恒久的価格インパクトが存在する場合、の二つについて分析を行っている。筆者は、そのような要因をマルコフな依存性をもつ状態として定式化し、最適または均衡における執行戦略に関する研究を連続時間モデルおよび離散時間のゲームモデルにおいて研究している。また、これまでの筆者の研究は取引コスト (transactoin cost) とも深く関わっている。そこで、これまでの研究で用いてきた概念、分析方法などを用いてあいまいさ (ambiguity) と取引コストを考慮した投資家の売買取引行動に関する研究も行っている。

5. おわりに

本稿では、筆者の博士後期課程およびその後の研究活動について述べてきた。改めて博士後期課程での3年間を顧みると、基本的なこと（論文の原稿を何度も見直す、学会の発表練習を何度も行うなど）を地道に積み重ねることが博士後期課程およびその後の研究や仕事にとって重要だと思う。博士後期課程での研究活動は、研究活動を行う人にとっても行わない人にとってもその後の人生の根本となると筆者は考える。そこ

で、本稿が今後 OR やその他の分野で研究活動を行う、またはこれから行おうと考えている方々の一助になれば幸いである。また、本稿を読んでファイナンスや執行問題に関心をもつ方が少しでも増えることがあれば筆者としては嬉しい限りである。

謝辞 筆者が大阪大学大学院経済学研究科の博士後期課程を修了することができたのは学部ゼミから博士後期課程を修了するまでの6年間指導していただいた(現)大和大学政治経済学部の大西匡光教授のご指導があったからであると確信しています。この場を借りて最大限の感謝の意を述べさせていただきます。また、大阪大学基礎工学研究科の深澤正彰教授には、研究科が異なるにもかかわらず多くのご指導をいただきました。最後に、本稿を執筆する機会をいただいた日本オペレーションズ・リサーチ学会および OR 機関誌編集委員のみなさまに感謝申し上げます。

参考文献

- [1] D. Bertsimas and A. W. Lo, "Optimal control of execution costs," *Journal of Financial Markets*, **1**, pp. 1–50, 1998.
- [2] R. Almgren and N. Chriss, "Optimal execution of portfolio transactions," *Journal of Risk*, **3**, pp. 5–40, 2000.
- [3] Á. Cartea, S. Jaimungal and J. Penalva, *Algorithmic and High-frequency Trading*, Cambridge University Press, 2015.
- [4] S. Laruelle and C. A. Lehalle, *Market Microstructure in Practice Second Edition*, World Scientific, 2018.
- [5] S. Kunou and M. Ohnishi, "Optimal execution strategies with price impact," *RIMS Kokyuroku*, **1645**, pp. 234–247, 2010.
- [6] S. Kuno and M. Ohnishi, "Optimal execution in illiquid market with the absence of price manipulation," *Journal of Mathematical Finance*, **5**, pp. 1–14, 2015.
- [7] S. Kuno, M. Ohnishi and P. Shimizu, "Optimal off-exchange execution with closing price," *Journal of Mathematical Finance*, **7**, pp. 54–64, 2017.
- [8] 大西匡光, 下清水慎, "金融市場における価格インパクトを考慮した取引執行ゲーム," オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, **65**, pp. 271–278, 2020.
- [9] Á. Cartea and S. Jaimungal, "Incorporating order-flow into optimal execution," *Mathematics and Financial Economics*, **10**, pp. 339–364, 2016.
- [10] Á. Cartea and S. Jaimungal, "A closed-form execution strategy to target volume weighted average price," *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **7**, pp. 760–785, 2016.
- [11] J. P. Bouchaud, Y. Gefen, M. Potters and M. Wyart, "Fluctuations and response in financial markets: The subtle nature of 'random' price changes," *Quantitative Finance*, **4**, pp. 176–190, 2004.
- [12] J. Gatheral, "No-dynamic-arbitrage and market impact," *Quantitative Finance*, **10**, pp. 749–759, 2010.
- [13] A. A. Obizhaeva and J. Wang, "Optimal trading

- strategy and supply/demand dynamics,” *Journal of Financial Markets*, **16**, pp. 1–32, 2013.
- [14] M. Ohnishi and M. Shimoshimizu, “Optimal and equilibrium execution strategies with generalized price impact,” *Quantitative Finance*, **20**, pp. 1625–1644, 2020.
- [15] M. Fukasawa, M. Ohnishi and M. Shimoshimizu, “Discrete-time optimal execution under a generalized price impact model with Markovian exogenous orders,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **24**, 2150025, 2021.
- [16] M. Ohnishi and M. Shimoshimizu, “Optimal pair-trade execution with generalized cross-impact,” *Asia-Pacific Financial Markets*, **29**, pp. 253–289, 2022.
- [17] M. Fukasawa, M. Ohnishi and M. Shimoshimizu, “Optimal execution under a generalized price impact model with Markovian exogenous orders in a continuous-time setting,” *RIMS Kokyuroku*, **2207**, pp. 1–22, 2021.
- [18] M. Ohnishi and M. Shimoshimizu, “Equilibrium execution strategies with generalized price impacts,” *RIMS Kokyuroku*, **2111**, pp. 84–106, 2019.
- [19] C. A. Lehalle and E. Neuman, “Incorporating signals into optimal trading,” *Finance and Stochastics*, **23**, pp. 275–311, 2019.