Least-distance Range Adjusted Measureに基づく効率性評価およびベンチマーキング

王　緒

経済のグローバル化が進むにつれ，喫緊の課題として，企業などの事業体が効率的に運営されているかどうかの指標策定や適切な改善目標の設定が挙げられる．オペレーションズ・リサーチの中のデータ包絡分析法 (Data Envelopment Analysis, DEA) は事業体の効率性評価や改善のツールとして広く使われている．DEA の中では，品質の良い伝統的な Range Adjusted Measure (RAM) がよく知られている．本稿では，近年に注目されている最短距離 DEA に基づいた新しい Least-distance Range Adjusted Measure (LRAM) について，紹介する．

キーワード：データ包絡分析法，最短距離，Range Adjusted Measure，効率性評価，改善目標

1. はじめに

DEA は多入力多出力の事業体 (Decision Making Unit, DMU) の効率性を相対的に測るための手法として 1978 年に提案されて以来，学校，銀行，病院といった事業体の効率性評価や改善の道具として広く使われている．DEA の特徴としては，評価対象の DMU が効率的であるかどうかを判断するだけではなく，非効率的な DMU に対して，その効率値や改善目標の情報を与えることができる．しかし，伝統的な DEA モデル [1–3] では，提供される改善目標は評価対象の DMU から遠く離れており，実現するのが困難であるため，適切ではないとしばしば批判されている．DEA の役割は単に効率性を測るだけではなく，改善方法も提案できることが重要である．そこで，伝統的な DEA モデルの出発点と異なり，ℓ_p-norm を使って，実現しやすさを最短距離で対応させ，最短距離改善目標を求める考え方（最短距離 DEA）が 1999 年に提唱された [4].

最短距離 DEA が提唱されてから，そのモデルの計算や性質に関する研究 [5–7] が近年盛んに行われている．まずは，距離の最小化によって与えられた改善目標（最短距離改善目標）の有効な計算アプローチが必要である．そして，DEA では，DMU に対する品質が保証された効率性測定が必要である．そのため，距離の最小化によって与えられる効率値は効率性尺度として，いくつかの性質[1]を満たさなければならない．伝統的な Range Adjusted Measure (RAM)[3] は前述した性質を満たしているので，品質が優れている．そのため，RAM モデルと最短距離 DEA モデルの考え方を結合する新しい Least-distance Range Adjusted Measure (LRAM) の実用性が期待される．ただ，LRAM モデルを解くのは困難とされているため，博士論文では，LRAM モデルの有効な解法を提供するとともに，数値実験を通じて，RAM モデルと比較しながら，LRAM モデルの優位性・有効性を示している．本稿では，博士論文や文献 [9] に基づいて，LRAM モデルの紹介を行う．具体的な内容は LRAM モデルの定式化，モデルの有効な解法や一部の数値の結果となる．

2. Least-distance Range Adjusted Measure

DEA では，n 個の事業体があり，それぞれの事業体が m 個の入力を用いて s 個の出力を産出する活動をするものとする．このとき，j 番目の事業体を DMU_j とし，その m 個からなる入力ベクトルを $\boldsymbol{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})^\top$，その s 個からなる出力ベクトルを $\boldsymbol{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{sj})^\top$ とする．DEA では，生産可能な活動の集まりは生産可能集合と呼ばれ，以下のように表される．

$$T = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \text{ can produce } \boldsymbol{y}\}$$

いくつかの生産上の仮定（凸性や加法性など）をしたうえで，よく用いられる VRS (variable returns to scale) 型生産可能集合は以下のように定義されている．

おう　しょ
早稲田大学創造理工学部経営システム工学科
〒 169–8555 東京都新宿区大久保 3–4–1
xu.wang@ruri.waseda.jp

[1] たとえば，単調性，単位不変性や原点移動不変性などが挙げられる．これらの性質は文献 [8] の中で詳しく紹介されている．

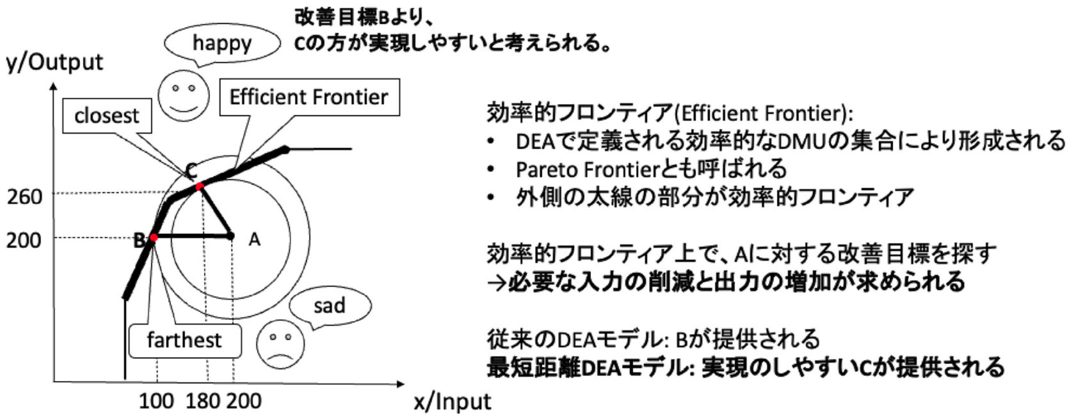

図 1　最短距離 DEA

$$T = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{X\lambda} \leq \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y\lambda} \geq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{\lambda} = 1, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}\}$$

ここに，$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ は入力データ行列を表し，$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$ は出力データ行列を表す．$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^\top$ はウェイトである．ベクトル $\boldsymbol{1}$ のすべての要素は 1 である．$\boldsymbol{0}$ はゼロベクトルである．生産可能集合 T に対して，DEA ではベストプラクティス (best practice) のフロンティアを効率的フロンティアと呼ぶ．効率的な DMU が決まると，効率的フロンティアも決まり，一般的には以下のように定義されている．

$$E = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T \mid (\bar{\boldsymbol{x}}, -\bar{\boldsymbol{y}}) \leq (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}), \\ (\bar{\boldsymbol{x}}, -\bar{\boldsymbol{y}}) \neq (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}) \Rightarrow (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \notin T\}.$$

DEA はすべてのデータを包んで分析する手法である．具体的には，E を基準として，T の中のすべての DMU の効率性を評価する．E の上にある DMU は効率的であり，E の上にない DMU は非効率であると判断される．そして，非効率的な DMU に対し，効率値と改善目標が両方与えられる．しかし，従来の DEA モデルでは，評価対象の DMU を効率化するため，最大の改善量の効率点（改善目標）を提供している．結局，提供された効率点は評価対象の DMU から遠く離れ，実現するのは困難であるとしばしば批判されている．前述したように，DEA の役割は単に効率性を測るだけではなく，改善方法も提案できることが重要である．そうした観点から，最小の改善量で効率化を実現するモデルは最適であると思われる．そこで，近年，非常に注目されているのが最短距離 DEA であり，これは ℓ_p-norm を（非）効率尺度として，最小の改善量で効率化を実現できるモデルである．図 1 で最短距離 DEA の概要を示す．

最短距離 DEA では，距離を表すには，以下の ℓ_p-norm が使われている．

$$||\boldsymbol{z}||_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} |z_\ell|^p\right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\} & p = \infty \end{cases}$$

評価対象を DMU_o とする．$\mathrm{DMU}_o(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ の非効率値を $f(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ とする．最短距離 DEA モデルは $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ から E までの最短距離を DMU_o の非効率値として与え，以下のように表すことができる．

$$f^p(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) = min\{||(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})||_p : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E\} \tag{1}$$

そして，モデル (1) の最適解における $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ は評価対象 $\mathrm{DMU}_o(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ の改善目標を表す．イメージとして，非効率性尺度は DMU から効率的フロンティアまでの距離で表されており，DMU が効率的フロンティアから離れれば離れるほど，その効率性は低くなる．そして，従来の DEA と同様に，最短距離 DEA による非効率性尺度 $f(\cdot)$ も DEA の中での望ましい性質を満たさなければならない．

従来の DEA（最長距離 DEA）では，望ましい性質を満たし，品質が保証された効率性測定モデルが存在する．RAM モデルはその中の一つとして挙げられ，単調性[2]，単位不変性[3]や原点移動不変性[4]といった三つの望ましい性質を同時に満たしている．最短距離 DEA においては，モデルの単調性を満たすのは難しいことが知られている．そのまま，評価対象の DMU から効

[2] 優れた DMU の効率値はそれより劣った DMU の効率値より大きい．
[3] 効率値は入力と出力データの単位の取り方に影響されない．
[4] 効率値は入力と出力データの原点の取り方に影響されない．

率的フロンティアまでの最短距離を求め，その距離を（非）効率性尺度とする場合，単調性を満たさない．つまり，モデル (1) は単調性を満たさない．単調性を満たすようにするためには，(1) に基づき，モデルの改変が必要である．先行研究 [5, 6] では，(1) に基づき，いくつの単調性を満たすモデル[5]が提案されている．改変版モデルによって，提供される改善目標が最も近い改善目標ではなくなる可能性が高いが，単調性を満たすようになった．そこで，RAM モデルと単調性を満たす最短距離 DEA モデルを結合し，品質に優れ，最短距離ベンチマーキング情報の提供ができる LRAM モデルは以下のように表せる[6]．

$$\begin{aligned}&\mathrm{LRAM}(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o)=\\&\qquad 1-\frac{1}{m+s}\min\{\|((\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\Gamma\|_1:\\&\qquad\qquad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in E,(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\in D_\varepsilon(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o)\end{aligned}$$

ここで，LRAM モデルの最適値を K^* とする．LRAM モデルの特別な構造により，RAM モデルと同様に，任意の $DMU(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ に対して[7]，K^* が常に [0,1] の間であり，効率値として，扱いやすい．先行研究 [6] と同様に，集合 $D_\varepsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と正の値 ε が導入されているため，LRAM モデルは単調性を満たす．LRAM モデルの中の行列 Γ により，K^* は入力と出力データの単位の取り方に影響されない．そこで，LRAM モデルは性質が優れている一方，最短距離ベンチマーキング情報も提供できる．

LRAM モデルの解き方に関しては，効率的フロンティアの等価式変形によって，相補性条件付き最適化問題に帰着させることでき，混合整数計画法で解くことが可能である．具体的には，LRAM モデルの中の $\min\{\|((\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\Gamma\|_1\}$ の部分は以下のように定式化できる．

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \|((\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\Gamma\|_1\\ \text{subject to} & \boldsymbol{X}_E\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{Y}_E\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0},\\ & \boldsymbol{1}^\top\boldsymbol{\lambda}=1,\\ & \boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{1}=\boldsymbol{0},\\ & -\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_4-\boldsymbol{1}=\boldsymbol{0},\\ & \boldsymbol{X}_E^\top\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{Y}_E^\top\boldsymbol{u}_4-\boldsymbol{u}_5+\boldsymbol{1}u_6=\boldsymbol{0},\\ & \bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{x}_0},\bar{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{y}_0},\\ & \boldsymbol{\lambda}\le M\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}_5\le M(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{b}),\\ & \boldsymbol{b}\in\{0,1\}^n,\\ & (\boldsymbol{d}^{x_0},\boldsymbol{d}^{y_0})I(\varepsilon)\ge\boldsymbol{0},\\ & \boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4,\boldsymbol{u}_5\ge\boldsymbol{0}.\end{array}\tag{2}$$

M は十分に大きい正の値である．問題 (2) は数理最適化ソルバー Gurobi で解くことができ，その最適解を $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\bar{\boldsymbol{x}}^*,\bar{\boldsymbol{y}}^*,\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{x}_o*},\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{y}_o*},\boldsymbol{u}_1^*,\boldsymbol{u}_2{}^*,\boldsymbol{u}_3{}^*,\boldsymbol{u}_4{}^*,\boldsymbol{u}_5^*,u_6^*,\boldsymbol{b}^*)$ とし，最適値を k^* とする．まず，LRAM モデルの効率値は以下のように算出される．

$$K^*=1-\frac{k^*}{m+s}.$$

そして，$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ は評価対象 $\mathrm{DMU}_o(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o)$ の改善目標として与えられる．

3. 数値実験の結果

数値実験では，LRAM モデルを実データ（日本銀行データセット）への適用を通じて，その有効性について，検証する．用いるデータは Balance sheet（貸借対照表）や Statement of income（損益計算書）から取得した．入力と出力指標選択に関しては，既存研究 [10, 11] を参考にしながら，入力と出力をそれぞれ三つずつ選択した．入力は中間投入の預金 (x_1)，資本に相当する有形固定資産 (x_2) と労働投入に相当する一般営業経費 (x_3) となる．出力は貸出金 (y_1)，証券取引による収入 (y_2) やその他の経常利益 (y_3) となる．比較のため，RAM モデルの結果も述べ，特に二つのモデルによって，得られる改善目標の違いを調べる．比較結果や結論については，こちらで簡単に述べる．

---

5 しかし，これらの改変版モデルの有効な解法が提供されず，課題として残されている．

6 LRAM モデルの定式化のため，使う記号などは先行研究 [5, 6] を参照するものである．具体的には以下のようになる．

$$\begin{aligned}\gamma^{max}=(&\max_{j=1,\dots,n}x_{1j},\dots,\max_{j=1,\dots,n}x_{mj},\\&\max_{j=1,\dots,n}y_{1j},\dots,\max_{j=1,\dots,n}y_{sj}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^{min}=(&\min_{j=1,\dots,n}x_{1j},\dots,\min_{j=1,\dots,n}x_{mj},\\&\min_{j=1,\dots,n}y_{1j},\dots,\min_{j=1,\dots,n}y_{sj}),\end{aligned}$$

$$\Gamma=diag(\gamma^{max}-\gamma^{min})^{-1},$$

$$D_\varepsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left\{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\;\middle|\;\begin{array}{l}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}^x,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{d}^y)\\ \boldsymbol{0}\le(\boldsymbol{d}^x,\boldsymbol{d}^y)I(\varepsilon)\end{array}\right\},$$

$$I(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&\varepsilon&\dots&\varepsilon\\ \varepsilon&1&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\varepsilon\\ \varepsilon&\dots&\varepsilon&1\end{pmatrix},\varepsilon\ge0.$$

7 ここで，

$$\Omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in T|\gamma^{min}\le(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\le\gamma^{max}\}$$

とおく．

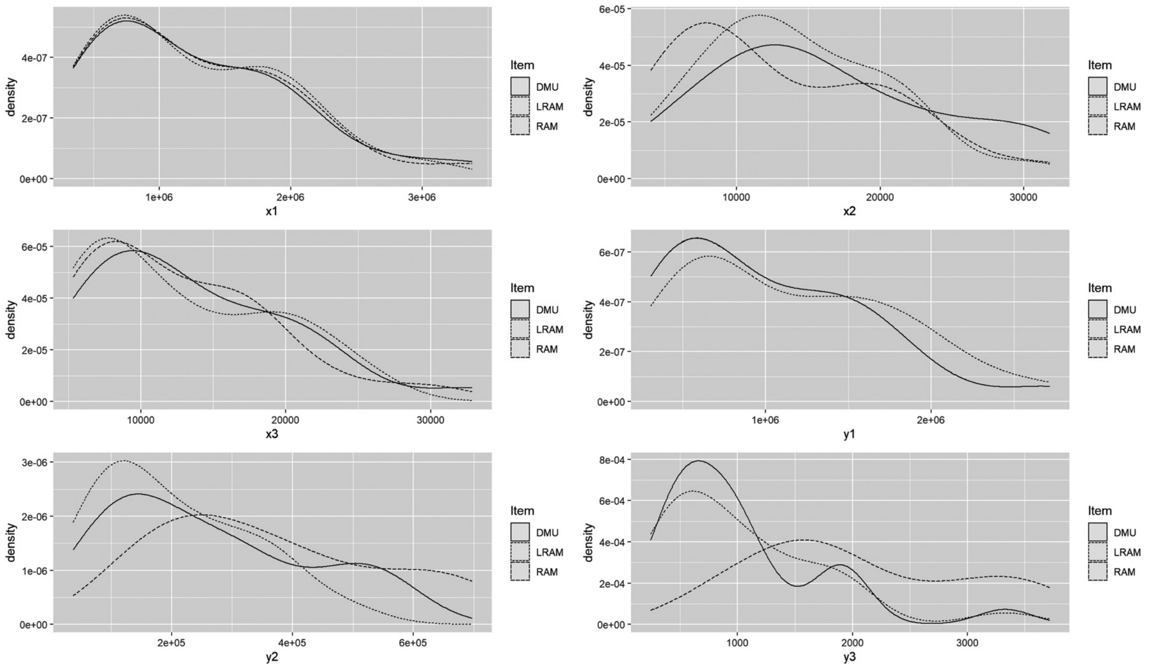

図 2　LRAM と RAM モデルによる改善目標の密度図の比較

全体的に，(a) RAM モデルや LRAM モデルで得られる効率値に注目し，LRAM モデルは DEA モデルとして，効率性評価に有効であることを示した．(b) RAM モデルや LRAM モデルで得られる改善目標に注目し，非効率的な銀行が効率的になるため，入力と出力に必要な調整範囲を定量化したうえで，得られる改善目標の間で比較を行う．この比較により，LRAM モデルはいつもより小規模な入力と出力の調整方向を提供することがわかる．すなわち，LRAM モデルが提供した効率性改善のための入力と出力調整案がより実現しやすく，合理的であると考えられる．

また，図 2 は 23 個の非効率的な銀行[8]の生データ（DMU），LRAM モデルによる改善目標（LRAM）と RAM モデルによる改善目標（RAM）の三つの入力と三つの出力の密度図を表している．図 2 により，LRAM モデルによる改善目標は，多くの入力と出力について，評価対象の DMU とより一致する．このデータセットでは，RAM モデルによって，非効率的な銀行の出力 1 (y_1) はほぼ調整する必要がないことがわかる[9]．それに対して，LRAM モデルによって，非効率的な銀行にとって，調整が必要となる入力と出力の数は多いが，合計の調整量はより小さい．したがって，LRAM はよりバランスの取れた効率性改善方向（入力と出力の調整方向）を提供することがわかる．

以上により，LRAM モデルを日本銀行データセットに適用した結果では，LRAM モデルはいつもより小規模な入力と出力の調整方向を提供することがわかる．すなわち，達成・実現しやすい効率性改善方向を提供することを示唆している．そこで，LRAM モデルは DEA の一つのモデルとして，効率性評価ができるとともに，より実現しやすい改善目標の提供もできることがわかる．

4.　おわりに

本稿では，より実用性があり，品質の優れた LRAM モデルの紹介を行った．LRAM モデルを定式化し，モデルの有効な解法を提供した．実データを用いて，従来の RAM モデルと比較しながら，LRAM モデルの優位性・有効性を示した．新しい LRAM モデルは効率性評価やベンチマーキングのため，多くの分野への適用が期待できる．

DEA 自体も本研究の提案も，その実用化が課題となっている．DEA の結果は，効率値も改善目標も理論的・数値的な参考結果となり，それに関するさらなる実証研究は課題として挙げられる．そして，DEA では，ほとんどの場合が複数の入力と出力となっている．改善方向ごとに改善コストが異なる可能性があるため，

[8] この評価対象銀行は 2019 年度の 39 個の第 2 地方銀行 (Regional Banks II) である．
[9] 図 2 の y_1 では，DMU の線と RAM の線が重なっている．

距離が一番近くても，改善にかかる総コストが一番低いとは限らない．そこで，DEA モデルにコスト関数を導入できるか検討する必要もある．さらに，LRAM モデルの実用性や柔軟性を高めることも課題として挙げられる．本来であれば，改善目標の提供だけではなく，改善目標にたどり着く経路，すなわち，改善目標を実現するために最適な経路を提供できる動的な手法が望ましい．その際に，改善にかかる予算や改善期間などの要素も合わせて考える必要があるかもしれない．

謝辞　本稿に対し，有益なコメントを頂いた日本オペレーションズ・リサーチ学会機関誌編集委員会の皆様に感謝致します．

参考文献

[1] A. Charnes, W. W. Cooper and E. Rhodes, "Measuring the efficiency of decision making units," *European Journal of Operational Research*, **2**, pp. 429–444, 1978.

[2] R. D. Banker, A. Charnes and W. W. Cooper, "Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis," *Management Science*, **30**, pp. 1078–1092, 1984.

[3] W. W. Cooper, K. S. Park and J. T. Pastor, "RAM: A range adjusted measure of inefficiency for use with additive models, and relations to other models and measures in DEA," *Journal of Productivity Analysis*, **11**, pp. 5–42, 1999.

[4] W. Briec, "Hölder distance function and measurement of technical efficiency," *Journal of Productivity Analysis*, **11**, pp. 111–113, 1999.

[5] K. Ando, A. Kai, Y. Maeda and K. Sekitani, "Least distance based inefficiency measures on the Pareto-efficient frontier in DEA," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **55**, pp. 73–91, 2012.

[6] H. Fukuyama, Y. Maeda, K. Sekitani and J. Shi, "Input–output substitutability and strongly monotonic p-norm least distance DEA measures," *European Journal of Operational Research*, **237**, pp. 997–1007, 2014.

[7] J. Aparicio, J. M. Cordero and J. T. Pastor, "The determination of the least distance to the strongly efficient frontier in data envelopment analysis oriented models: Modelling and computational aspects," *Omega*, **71**, pp. 1–10, 2017.

[8] T. Sueyoshi and K. Sekitani, "An occurrence of multiple projections in DEA-based measurement of technical efficiency: Theoretical comparison among DEA models from desirable properties," *European Journal of Operational Research*, **196**, pp. 764–794, 2009.

[9] X. Wang and T. Hasuike, "Least-distance range adjusted measure in DEA: Efficiency evaluation and benchmarking for Japanese banks," *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2022 (In Press).

[10] H. Fukuyama, "Technical and scale efficiency of Japanese commerical banks: A non-parametric approach," *Applied Economics*, **25**, pp. 1101–1112, 1993.

[11] L. Drake and J. M. Hall, "Efficiency in Japanese banking: An empirical analysis," *Journal of Banking & Finance*, **27**, pp. 891–917, 2003.

