基数制約つき平均・分散モデルに対する切除平面法

小林　健

筆者は博士課程に在籍している期間中，基数制約つきポートフォリオ最適化問題に対する切除平面法の研究に取り組んだ．本稿では筆者の研究のきっかけとなった Bertsimas and Cory-Wright の基数制約つき平均・分散モデルに対する切除平面法について紹介する．この切除平面法は基数制約を活用した計算量削減の工夫により大規模な問題例でも高速に最適解が得られたことが報告されており，大規模混合整数最適化問題に対する有効なアプローチの一つとして興味深い解法となっている．そこで本稿では基数制約つき平均・分散モデルに対する切除平面法のアルゴリズムとその計算高速化の工夫について解説し，その後関連する研究の動向について紹介する．

キーワード：ポートフォリオ最適化，平均・分散モデル，基数制約，切除平面法，劣勾配

1. はじめに

筆者は 2022 年 3 月に東京工業大学工学院経営工学系で博士号を取得した．筆者の博士論文は Study on Cutting-plane Algorithms for Mixed-integer Semidefinite Optimization（混合整数半正定値最適化問題に対する切除平面法の研究）と題するもので，混合整数半正定値最適化問題を中心とした混合整数最適化問題に対する切除平面法の研究の成果をまとめている．この博士論文に含まれる研究の成果は大きく以下の二つに分けられる：

混合整数半正定値最適化問題に対する汎用解法
　混合整数半正定値最適化問題に対する分枝切除法 [1];

個別の混合整数最適化問題に対する切除平面法
　多重共線性を考慮した変数選択問題 [2]，基数制約つきポートフォリオ最適化問題に対する問題の構造を活用した切除平面法 [3, 4].

ここで，前者の混合整数半正最適化問題に対する分枝切除法については以前機関誌の記事 [5] で研究の概要を説明している．そこで本稿では後者の成果のうち，特に基数制約つきポートフォリオ最適化問題に関連する話題について説明する．

ポートフォリオ最適化問題では，リスクが小さくリターンの大きいポートフォリオを設計することが目的となるが，多数の資産に分散投資するポートフォリオでは管理コストや取引コストが増大する．そこで実用上は投資する資産数を制御する基数制約を課した問題を解くことが望まれる．しかし一般に基数制約を課した問題は混合整数最適化問題となるため，候補資産数の多い問題では最適解を求めることが困難となる．

このような背景から，筆者は大規模な基数制約つきポートフォリオ最適化問題に対する解法の研究に取り組んだ．具体的には Bertsimas and Cory-Wright が基数制約つき平均・分散モデルに対して提案した切除平面法 [6] を拡張し，リスク尺度として条件つきバリュー・アット・リスク (CVaR) を用いた問題と収益率の不確実性を考慮した分布ロバストポートフォリオ最適化問題それぞれに対する切除平面法を提案した [3, 4].

そこで本稿では，これらの研究に取り組むきっかけとなった Bertsimas and Cory-Wright の切除平面法 [6] について解説する．この手法では，基数制約つき平均・分散モデルを連続変数と離散変数を分離して再定式化し，再定式化後の問題を切除平面法で解く．このようなアプローチは混合整数最適化問題に対する Benders 分解法 [7] に非常に近く，アイデアそのものが全く新しいという訳ではない．しかし，論文 [6] では基数制約を活用した計算量の削減により 1,000 資産以上の大規模な問題例で高速に最適解が求まったという実験結果が報告されており，それ以降さまざまな大規模混合整数最適化問題に対して切除平面法が用いられる契機となった．

本稿では，まず 2 節で Bertsimas and Cory-Wright [6] が扱う基数制約つき平均・分散モデルについて説明する．続いて 3 節で切除平面法のアルゴリズムについて述べ，基数制約の性質を活用して切除平面法の計算を高速化できることを説明する．そして 4 節

こばやし　けん
東京工業大学工学院経営工学系
〒 152–8552 東京都目黒区大岡山 2–12–1
kobayashi.k.ar@m.titech.ac.jp

で切除平面法に関連する近年の研究の動向について説明し，5 節で本稿のまとめを述べる．

本稿では N 次元実ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^N$ と表し，各成分が 0 か 1 である N 次元ベクトル全体の集合を $\{0,1\}^N$，各成分が区間 $[0,1]$ に属する N 次元ベクトル全体の集合を $[0,1]^N$ と表す．すべての成分が 1 の適当な長さのベクトルを $\mathbf{1}$，すべての成分が 0 の適当な長さのベクトルを $\mathbf{0}$ と表す．$\top$ は行列またはベクトルの転置を表す．ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ のすべての成分が 0 以上のとき，$\boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}$ と表し，二つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$ に対して，$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$ のとき $\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{u}$ と表す．また二つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$ に対して，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ の Hadamard 積（要素ごとの積）を $\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$ と表す．

2. 基数制約つき平均・分散モデルの定式化

本節では基数制約つき平均・分散モデルの定式化について説明する．候補資産全体の集合を $\mathcal{N} := \{1, 2, \ldots, N\}$ とし，各資産に対する投資比率をまとめたベクトル（ポートフォリオ）を $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ と表す．ポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ の実行可能領域を以下で定義する：

$$\mathcal{X} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = 1,\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

ここで $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^M$ は所与の定数とする．$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ は空売りを禁止する制約を表し，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ は収益率の下限制約などを含む線形制約である．またポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ には，投資資産数を制御する制約として基数制約

$$\|\boldsymbol{x}\|_0 \leq k$$

を課す．ここで $\|\cdot\|_0$ は ℓ_0 ノルム（非ゼロ成分数）を表し，k を投資資産数の上限を表す定数とする．

各資産の収益率の共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma}$ とし，本稿では以下の ℓ_2 正則化つき平均・分散モデルを解くことを考える：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}} \quad & \frac{1}{2\gamma}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{x} && \text{(1a)} \\ \text{s.t.} \quad & z_n = 0 \ \Rightarrow \ x_n = 0 \quad (\forall n \in \mathcal{N}), && \text{(1b)} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \quad \boldsymbol{z} \in \mathcal{Z}_N^k. && \text{(1c)} \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^N$ は各資産に投資しない/するを表す変数であり，$\mathcal{Z}_N^k := \{\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^N \mid \mathbf{1}^\top \boldsymbol{z} = k\}$ は成分の総和が k となる $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^N$ 全体の集合を表す．論理制約 (1b) は $z_n = 0$ のとき n 番目の資産をポートフォリオから取り除く制約を表す．

3. 基数制約つき平均・分散モデルに対する切除平面法

論理制約 (1b) は big-M 法を用いると $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ に関する線形不等式制約で表現できる．したがって問題 (1) は混合整数凸 2 次最適化問題に帰着可能であり，高性能な混合整数最適化ソルバーである Gurobi や CPLEX などで扱える問題となる．しかし big-M 法を用いた定式化ではしばしば線形緩和が弱くなる場合があり，候補資産数 N が増大するとソルバーの計算時間が増大する．そこで Bertsimas and Cory-Wright [6] は big-M 法とは異なる定式化を用いた切除平面法を提案した．

本節ではまず基数制約つき平均・分散モデルを凸関数最小化問題に帰着する再定式化について述べ，続いて再定式化した問題を解く切除平面法を説明する．そして，その切除平面法の計算を高速化するアルゴリズムの工夫について述べる．

3.1 連続変数と離散変数を分離した定式化

変数 $\boldsymbol{z}$ の各成分を対角成分に並べた対角行列を $\boldsymbol{Z}$ と表す．問題 (1) の $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}$ と置き換えて論理制約 (1b) を取り除くと，問題 (1) は以下の問題に書き換えられる：

$$\min_{\boldsymbol{z}} \ f(\boldsymbol{z}) \quad \text{s.t.} \ \boldsymbol{z} \in \mathcal{Z}_N^k. \tag{2}$$

ここで $f(\boldsymbol{z})$ は以下の下位問題の最適値として定義する：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{z}) := \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \frac{1}{2\gamma}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} (\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}) && \text{(3a)} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Z}\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. && \text{(3b)} \end{aligned}$$

注意 1. 問題 (1) の $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}$ と置き換えると，本来下位問題の目的関数に現れる正則化項は $(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}$ となるが，目的関数 (3a) の正則化項は $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}$ のままであることに注意する．ある $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^N$ で問題 (3) が実行可能ならば，その最適解では $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}$ が成り立つ．したがって問題 (1) のすべての $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}$ に置き換えた下位問題の最適解は問題 (3) の最適解から復元できる．この性質から，上位問題 (2) では目的関数 $f(\boldsymbol{z})$ を問題 (3) の最適値関数と定義している．

3.2 最適値関数の双対表現

前述の再定式化から，以降では上位問題 (2) を解くことを考える．まず上位問題 (2) で最小化する目的関数 $f(\boldsymbol{z})$ がどのような関数か考察する．

共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ は半正定値行列なので，適当な正方行列 $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ を用いて $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L}^\top \boldsymbol{L}$ と分解できる．行

列 $\boldsymbol{L}$ を用いて $\boldsymbol{r} = \sqrt{2}\boldsymbol{LZx}$ を満たす補助変数 $\boldsymbol{r}$ を導入すると，下位問題 (3) は以下の問題に等価に書き換えられる：

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{z}) := \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}} \quad & \frac{1}{2\gamma}\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}^\top\boldsymbol{r} && \text{(4a)}\\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{r} = \sqrt{2}\boldsymbol{LZx}, && \text{(4b)}\\
& \boldsymbol{Zx} \in \mathcal{X}. && \text{(4c)}
\end{aligned}
$$

ここで問題 (4) のラグランジュ双対問題を導出すると，$f(\boldsymbol{z})$ に関して以下の命題を得る．

定理 1（f の双対表現）**.** ある $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^N$ に対して下位問題 (3) が実行可能とする．このとき問題 (3) で強双対性が成り立ち，以下の等式が成り立つ：

$$
f(\boldsymbol{z}) = \max_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\lambda} -\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{z}^\top(\boldsymbol{\omega}\circ\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{\beta} - \lambda \quad \text{(5a)}
$$

$$
\text{s.t.} \quad \boldsymbol{\omega} \geq -\sqrt{2}\boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{\beta} - \lambda\boldsymbol{1}, \quad \text{(5b)}
$$

$$
\boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{0}. \quad \text{(5c)}
$$

ここで，$\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^N, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^M, \lambda \in \mathbb{R}$ は双対変数である．

証明. ラグランジュ乗数を $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N, \boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{0}, \lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\pi} \geq \boldsymbol{0}$ として，問題 (4) のラグランジュ関数を

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{d}) = & \frac{1}{2\gamma}\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}^\top\boldsymbol{r}\\
& - \boldsymbol{\alpha}^\top(\boldsymbol{r} - \sqrt{2}\boldsymbol{LZx})\\
& - \boldsymbol{\beta}^\top(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{AZx})\\
& - \lambda(1 - \boldsymbol{1}^\top\boldsymbol{Zx}) - \boldsymbol{\pi}^\top\boldsymbol{Zx}
\end{aligned}
$$

と定義する．ここで $\boldsymbol{p} := (\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}), \boldsymbol{d} := (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\lambda,\boldsymbol{\pi})$ はそれぞれ問題 (3) の変数，ラグランジュ乗数をまとめたものとする．次にラグランジュ関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{d})$ を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$ に関して最小化するラグランジュ緩和問題

$$
\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}} \quad \mathcal{L}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{d}) \quad \text{(6)}
$$

を考えると，この最適解は

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{x}}\mathcal{L}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{d}) &= \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Z}(\sqrt{2}\boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{\beta} + \lambda\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\pi})\\
&= \boldsymbol{0},\\
\nabla_{\boldsymbol{r}}\mathcal{L}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

を満たす．したがって，

$$
\boldsymbol{\omega} = -\sqrt{2}\boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{\beta} - \lambda\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\pi}
$$

となる補助変数 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ を導入すると，ラグランジュ緩和問題 (6) の最適値は

$$
-\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\omega}^\top\boldsymbol{Z}^2\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{\beta} - \lambda
$$

と表される．ベクトル $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^N$ に対して $\boldsymbol{\omega}^\top\boldsymbol{Z}^2\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{z}^\top(\boldsymbol{\omega}\circ\boldsymbol{\omega})$ が成り立つことに注意すると，ラグランジュ緩和問題 (6) の最適値を最大化するラグランジュ双対問題は

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\lambda,\boldsymbol{\pi}} \quad & -\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{z}^\top(\boldsymbol{\omega}\circ\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{\beta} - \lambda\\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\omega} + \sqrt{2}\boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{\beta} + \lambda\boldsymbol{1}\\
& \boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi} \geq \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

となり，この問題の一つ目の制約と $\boldsymbol{\pi} \geq \boldsymbol{0}$ から等価な定式化として問題 (5) を得る．

また問題 (3) は目的関数が真凸関数で制約式がすべて線形の最適化問題である．したがって問題 (3) が実行可能ならば強双対性が成り立ち，$f(\boldsymbol{z})$ はラグランジュ双対問題 (5) の最適値と一致する． □

定理 1 より，上位問題 (2) の目的関数 $f(\boldsymbol{z})$ は問題 (5) の最適値関数と再定義してよい．ここで問題 (5) の目的関数 (5a) に注目すると，再定義後の $f(\boldsymbol{z})$ は各点で $\boldsymbol{z}$ に関する線形関数の最大値をとる関数である．この観察から $f(\boldsymbol{z})$ に関して重要な二つの性質を得る：

補題 2. $f(\boldsymbol{z})$ は $[0,1]^N$ 上で凸関数である．

補題 3. ある $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^N$ に対して問題 (3) が実行可能とし，対応する双対問題 (5) の変数 $\boldsymbol{\omega}$ の最適解を $\boldsymbol{\omega}^\star(\boldsymbol{z})$ とする．このとき，

$$
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) := -\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\omega}^\star(\boldsymbol{z}) \circ \boldsymbol{\omega}^\star(\boldsymbol{z})
$$

と定義すると，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})$ は $\boldsymbol{z}$ における $f(\boldsymbol{z})$ の劣勾配である．すなわち，任意の $\hat{\boldsymbol{z}} \in [0,1]^N$ に対して

$$
f(\hat{\boldsymbol{z}}) \geq f(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})^\top(\hat{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{z})
$$

が成り立つ．

これらの性質から，上位問題 (2) の解法として劣勾配を用いた切除平面法が設計できる．

3.3 切除平面法のアルゴリズム

上位問題 (2) を解く切除平面法について述べる．切除平面法ではまず上位問題 (2) の緩和問題を構成し，緩和問題の求解と実行可能領域の更新を繰り返して元の問題の最適解を探索する．

まず上位問題 (2) の緩和問題を構成する．関数 $f(\boldsymbol{z})$ のエピグラフを

$$\mathcal{F} := \{(\boldsymbol{z}, \theta) \in \mathcal{Z}_N^k \times \mathbb{R} \mid \theta \geq f(\boldsymbol{z})\} \tag{7}$$

と定義すると，上位問題 (2) は以下の問題に等価に書き換えられる．

$$\min_{\boldsymbol{z},\theta} \ \theta \quad \text{s.t.} \ (\boldsymbol{z}, \theta) \in \mathcal{F}. \tag{8}$$

いま問題 (8) の最適値の下界の一つを θ_{LB} として，式 (7) の $\theta \geq f(\boldsymbol{z})$ を $\theta \geq \theta_{\mathrm{LB}}$ に置き換えた集合を

$$\mathcal{F}_1 := \{(\boldsymbol{z}, \theta) \in \mathcal{Z}_N^k \times \mathbb{R} \mid \theta \geq \theta_{\mathrm{LB}}\} \tag{9}$$

と定義する．このとき $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$ であるため，以下の問題は問題 (8) の 緩和問題（すなわち上位問題 (2) の緩和問題）となる：

$$\min_{\boldsymbol{z},\theta} \ \theta \quad \text{s.t.} \ (\boldsymbol{z}, \theta) \in \mathcal{F}_1.$$

続いて切除平面法の各反復で行う緩和問題の求解と実行可能領域の更新について述べる．t 反復目 $(t \geq 1)$ において，切除平面法では以下の緩和問題を解いて緩和解 $(\boldsymbol{z}_t, \theta_t)$ を求める：

$$\min_{\boldsymbol{z},\theta} \ \theta \quad \text{s.t.} \ (\boldsymbol{z}, \theta) \in \mathcal{F}_t. \tag{10}$$

ここで $\mathcal{F}_t$ は t 反復目における実行可能領域 $(\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_1)$ とする．次に $\boldsymbol{z} \leftarrow \boldsymbol{z}_t$ として下位問題の双対問題 (5) を解き，最適値 $f(\boldsymbol{z}_t)$ と最適解 $\boldsymbol{\omega}^\star(\boldsymbol{z}_t)$ を得る．そして劣勾配 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_t)$ を用いて

$$\mathcal{F}_{t+1} \leftarrow \mathcal{F}_t \cap \{(\boldsymbol{z}, \theta) \mid \theta \geq f(\boldsymbol{z}_t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_t)^\top (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_t)\} \tag{11}$$

と実行可能領域を更新する．以上の手続きを最適値の上界と下界が十分近づくまで繰り返す．上位問題 (2) を解く切除平面法を Algorithm 1 にまとめる：

続いて Algorithm 1 の収束性について述べる．まず Algorithm 1 が生成する解の点列に関して以下の補題が成り立つ：

補題 4. Algorithm 1 が生成する点列の集合を $\{(\boldsymbol{z}_t, \theta_t) \mid t = 1, 2, \ldots, T\}$ とする．ここで，$\boldsymbol{z}_u = \boldsymbol{z}_T$ を満たす u $(u < T)$ が存在するとき，$\boldsymbol{z}_T$ は最適解である．

証明. $u < T$ より $(\boldsymbol{z}_T, \theta_T) \in \mathcal{F}_u$ であり，$\boldsymbol{z}_T = \boldsymbol{z}_u$ とあわせて

$$\theta_T \geq f(\boldsymbol{z}_u) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_u)^\top (\boldsymbol{z}_T - \boldsymbol{z}_u) = f(\boldsymbol{z}_T)$$

が成り立つ．問題 (2) の最適値を $f^\star$ とすると，$f(\boldsymbol{z}_t) \geq f^\star$ であり，θ_T は緩和問題 (10) の最適値であることから $f^\star \geq \theta_T$ である．したがって

$$f^\star \leq f(\boldsymbol{z}_T) \leq \theta_T \leq f^\star$$

が成り立ち，$f(\boldsymbol{z}_T) = f^\star$ となる．よって $\boldsymbol{z}_T$ は最適解である． □

Algorithm 1 上位問題 (2) を解く切除平面法

Step 0 （初期化） 許容誤差 $\varepsilon \geq 0$ を設定する．$t \leftarrow 1$ とし，最適値の上界と下界の初期値をそれぞれ $\mathrm{UB}_0 \leftarrow \infty, \mathrm{LB}_0 \leftarrow \theta_{\mathrm{LB}}$ とする．初期実行可能領域 $\mathcal{F}_1$ を式 (9) と定義する．

Step 1 （緩和問題の求解） 緩和問題 (10) を解き緩和解 $(\boldsymbol{z}_t, \theta_t)$ を得る．$\mathrm{LB}_t \leftarrow \theta_t$ と更新する．

Step 2 （切除平面の生成） $\boldsymbol{z} \leftarrow \boldsymbol{z}_t$ として下位問題 (5) を解き，$\mathrm{UB}_t \leftarrow \min\{f(\boldsymbol{z}_t), \mathrm{UB}_{t-1}\}$ と更新する．式 (3.3) に従って実行可能領域を更新する．

Step 3 （終了条件の判定） $\boldsymbol{z}_u = \boldsymbol{z}_t$ となる u $(u < t)$ が存在する，あるいは $\mathrm{UB}_t - \mathrm{LB}_t \leq \varepsilon$ ならばアルゴリズムを終了する．そうでなければ $t \leftarrow t + 1$ として Step1 に戻る．

補題 4 から Algorithm 1 に関する有限回収束性を示すことができる：

定理 5. 任意の $\varepsilon > 0$ のもとで Algorithm 1 は有限回の反復回数で終了し，ε-最適解を出力する．

証明. $\boldsymbol{z} \in \mathcal{Z}_N^k$ である解の総数はたかだか有限個のため，有限回の反復回数で $\boldsymbol{z}_u = \boldsymbol{z}_t$ となる u $(u < t)$ が存在する $\boldsymbol{z}_t$ を出力して Algorithm 1 は終了する．このとき，補題 4 より $\boldsymbol{z}_t$ は最適解である．また $\mathrm{UB}_t - \mathrm{LB}_t \leq \varepsilon$ が先に満たされた場合，Algorithm 1 は ε-最適解を出力して終了する．したがって，Algorithm 1 は有限回の反復回数で終了し ε-最適解を出力する． □

切除平面法では各反復で緩和問題 (10) を解くが，この問題は本質的な変数が $\boldsymbol{z}$ だけであり，かつ制約式が非常に単純な混合整数線形最適化問題である．そのため高性能な混合整数最適化ソルバーを用いると，緩和問題 (10) は短時間で解ける．

3.4 劣勾配の効率的計算

Algorithm 1 では各反復で劣勾配を計算するために下位問題 (5) を解く．問題 (5) が含む変数の総数は N に依存するため，候補資産数 N が増大すると求解に要する計算時間が増大する恐れがある．そこでここでは下位問題 (5) の構造を活用した問題の縮小により劣勾配の計算を高速化できることを説明する．

下位問題 (5) の目的関数 (5a) に注目すると，$z_n = 0$ に対応する成分 ω_n の係数は 0 である．また制約 (5b) は $\boldsymbol{\omega}$ の成分ごとに分離できる．これらの性質から，下位問題 (5) の最適解は，$z_n = 0$ となる添字 n に対応する成分 ω_n を取り除いた問題の最適解から復元できることが示せる．

具体的には，まず下位問題 (5) から $z_n = 0$ に対応する変数 ω_n を取り除いて縮小した問題を解く．そして縮小した問題の最適解 $(\boldsymbol{\alpha}^\star, \boldsymbol{\beta}^\star, \lambda^\star)$ を用いて，取り除かれた変数 ω_n を

$$\omega_n^\star = \left[-\sqrt{2}\boldsymbol{\ell}_n^\top \boldsymbol{\alpha}^\star - \boldsymbol{a}_n^\top \boldsymbol{\beta}^\star - \lambda^\star\right]_+ \quad (n \in \mathcal{N}; z_n = 0) \tag{12}$$

と補完する．ここで，$\boldsymbol{\ell}_n, \boldsymbol{a}_n$ はそれぞれ行列 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{A}$ の第 n 列ベクトルとし，$[\xi]_+ \coloneqq \max\{\xi, 0\}$ とする．このように補完された変数 $\omega_n^\star$ は制約 (5b) を満たす．また目的関数 (5a) で $\omega_n^\star$ の係数が 0 であることから，補完した変数 $\omega_n^\star$ は問題 (5) の最適解の一つであるとわかる．

以上の議論から，劣勾配 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})$ は問題 (5) を縮小した問題の最適解から構成できることが示せる．$\boldsymbol{z} \in \mathcal{Z}_N^k$ のとき縮小した下位問題の変数の数は投資資産数の上限 k に依存し，N に依存しない．実用上 k は N と比べて非常に小さい値として設定されるため，N が大きい問題例でも劣勾配は高速に計算できる．

4. 切除平面法の拡張

基数制約つき平均･分散モデルに対する切除平面法 [6] は，その計算性能の高さからさまざまな方向性で解法が拡張されている．筆者らはリスク尺度として CVaR を用いた基数制約つき CVaR 最小化問題の解法として切除平面法を拡張し，CVaR 最小化のための切除平面法 [8, 9] と組み合わせた 2 重切除平面法を提案した [3]．また混合整数半正定値最適化問題として定式化される基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化問題に対して切除平面法を拡張し，行列補完理論 [10, 11] を用いて求解を高速化できることを示した [4]．

Bertsimas et al. [12] は切除平面法の枠組みを論理制約をもつ一般の混合整数凸最適化問題の解法として拡張し，基数制約を課したスパース共分散選択 [13] やスパース主成分分析 [14] などに応用している．直近では基数制約をランク制約に拡張した最適化問題に対する切除平面法も提案されており [15]，適用対象の拡張は現在も活発に行われている．

5. おわりに

本稿では基数制約つき平均・分散モデルに対する切除平面法 [6] について解説した．切除平面法の設計は双対性という数理最適化の基本的な理論に基づくが，基数制約を効果的に活用した計算高速化の工夫により大規模な問題例に対しても非常に高い計算性能を実現している．

博士課程に在籍している期間中，混合整数最適化問題の解法研究に取り組んでいた筆者はこの論文のアイデアのシンプルさと計算性能の高さに魅了され，その後の研究につながる着想を得た．本稿が混合整数最適化問題に関する切除平面法の研究に関心をもつきっかけとなれば幸いである．

謝辞　本稿で触れた筆者の研究の一部は，JST, ACT-X, JPMJAX2108 の支援を受けたものである．本稿を執筆する機会をくださったオーガナイザの田村明久先生と機関誌編集委員のみなさまに感謝いたします．執筆にあたって有益な助言をくださった東京工業大学の西島光洋さんに感謝いたします．

参考文献

[1] K. Kobayashi and Y. Takano, "A branch-and-cut algorithm for solving mixed-integer semidefinite optimization problems," *Computational Optimization and Applications*, **75**, pp. 493–513, 2019.
[2] R. Tamura, K. Kobayashi, Y. Takano, R. Miyashiro, K. Nakata and T. Matsui, "Best subset selection for eliminating multicollinearity," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **60**, pp. 321–336, 2017.
[3] K. Kobayashi, Y. Takano and K. Nakata, "Bilevel cutting-plane algorithm for cardinality-constrained mean-CVaR portfolio optimization," *Journal of Global Optimization*, **81**, pp. 493–528, 2021.
[4] K. Kobayashi, Y. Takano and K. Nakata, "Cardinality-constrained distributionally robust portfolio optimization," *arXiv preprint*, arXiv:2112.12454, 2021.
[5] 小林健，"半正定値最適化問題に対する切除平面法と混合整数半正定値最適化問題への拡張，" オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**65**, pp. 656–661, 2020.
[6] D. Bertsimas and R. Cory-Wright, "A scalable algorithm for sparse portfolio selection," *INFORMS Jour-*

nal on Computing, https://doi.org/10.1287/ijoc.2021.1127, 2022.

[7] J. F. Benders, "Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems," *Numerische Mathematik*, **4**, pp. 238–252, 1962.

[8] A. Künzi-Bay and J. Mayer, "Computational aspects of minimizing conditional value-at-risk," *Computational Management Science*, **3**, pp. 3–27, 2006.

[9] W. K. K. Haneveld and M. H. van der Vlerk, "Integrated chance constraints: Reduced forms and an algorithm," *Computational Management Science*, **3**, pp. 245–269, 2006.

[10] M. Fukuda, M. Kojima, K. Murota and K. Nakata, "Exploiting sparsity in semidefinite programming via matrix completion I: General framework," *SIAM Journal on Optimization*, **11**, pp. 647–674, 2001.

[11] K. Nakata, K. Fujisawa, M. Fukuda, M. Kojima and K. Murota, "Exploiting sparsity in semidefinite programming via matrix completion II: Implementation and numerical results," *Mathematical Programming*, **95**, pp. 303–327, 2003.

[12] D. Bertsimas, R. Cory-Wright and J. Pauphilet, "A unified approach to mixed-integer optimization problems with logical constraints," *SIAM Journal on Optimization*, **31**, pp. 2340–2367, 2021.

[13] D. Bertsimas, J. Lamperski and J. Pauphilet, "Certifiably optimal sparse inverse covariance estimation," *Mathematical Programming*, **184**, pp. 491–530, 2019.

[14] D. Bertsimas, R. Cory-Wright and J. Pauphilet, "Solving large-scale sparse PCA to certifiable (near) optimality," *arXiv preprint*, arXiv:2005.05195, 2020.

[15] D. Bertsimas, R. Cory-Wright and J. Pauphilet, "Mixed-projection conic optimization: A new paradigm for modeling rank constraints," *Operations Research*, https://doi.org/10.1287/opre.2021.2182, 2021.