

# 「娯楽ゲーム」の数理的解析

木谷 裕紀

本稿では拙著学位論文である Algorithmic Analyses for Card Discarding Type Games (手札消費型ゲームに関するアルゴリズム論的解析) の内容を「娯楽ゲーム」に関する研究例を紹介したうえで概説します。

キーワード：組合せゲーム理論，完全情報ゲーム，不完全情報ゲーム

## 1. はじめに

はじめまして、九州大学大学院経済学研究院の木谷と申します。今回はこのような執筆の機会を賜り、大変光栄に思います。私は2016年1月に日本オペレーションズ・リサーチ学会に入会しました。入会のきっかけはその前年の九州支部主催の九州地区におけるOR若手研究交流会の参加で、これまで中部支部の研究発表会、また、春季、秋季研究発表会などにて、参加・発表しています。主たる研究対象として、トランプを用いた遊びを中心とした、娯楽ゲームに対する数理的側面の解析を行っています。本稿では僭越ながら2021年提出の拙著学位論文である Algorithmic Analyses for Card Discarding Type Games (手札消費型ゲームに関するアルゴリズム論的解析) に関する説明として、博士論文の概要やその後の発展などを執筆させていただきます。

## 2. 「娯楽ゲーム」を科学する

私は学位論文にてチェス、将棋、囲碁、ポーカーなども該当するいわゆる娯楽ゲームに対する研究を行いました。これらの娯楽ゲームに関する研究としてゲームAIプログラムの作成を思い起こす方も多かもしれませんが、ゲームAIプログラムはチェス、囲碁、将棋、ポーカーなどの多くの娯楽ゲームにおいて、人間のトッププロをも負かす実力を身につけ、各種競技において、その存在を用いて人間のトッププロが勉強するなど、特にここ10年ほどで目に見える形で急速に進化していきました。その成功は、ディープニューラルネットワークなどの機械学習手法の活用やモンテカルロ木探索などのシミュレーション技術の深化とハードウェア技術の発展による計算機の高速度化、高性能化に支え

られており、情報学研究の成功の象徴といっても過言ではないでしょう。このようにゲームに対する研究でこれらゲームAIプログラムの研究はホットでかつ重要な分野です。しかしながら、そういった研究における「ゲーム」の扱いは、いわばAI技術の到達目標、あるいはパフォーマンス評価のためのベンチマーク問題に過ぎないという側面があります。そういった研究において「娯楽ゲーム」自体は研究対象というよりは単なる適用対象の一種であるといえます。

また、ゲームそのものに対する理論的な研究として、本誌でも度々特集が組まれている「ゲーム理論」があります。このゲーム理論は、経済、社会活動などをゲームとしてモデル化し、その性質やダイナミクスを分析するためのツールとして提唱され、その後、経済学の基礎理論などとして発展してきました。娯楽ゲームもゲーム理論の対象分野の一つであり、基礎的なゲーム理論の例としても登場する「じゃんけん」などはその最たる例ともいえます。また、上述のチェスなどの多くの娯楽ゲームもゲーム理論における非協力ゲーム、展開型ゲームといった性質をもつゲームとして、広くいえばゲーム理論に分類されるゲームの一つではあります。しかし発展の背景やその適用を考えるとこうした娯楽ゲームはゲーム理論における研究対象の中心からは外れていることは否めません。このように娯楽ゲーム研究がさまざまな研究テーマの一部に現れながらも副次的な扱いを受けることが多い中、ゲームそのものの勝ち負けを研究する数学の一分野が、組合せゲーム理論です。

## 3. 組合せゲーム理論という分野について

組合せゲーム理論は大雑把に言えば、組合せ(≡二人零和有限確定完全情報)ゲームを対象にその数学的特徴を調べる分野です。その中でも最も大きな関心が、どちらのプレイヤーが勝つかという必勝判定です。あるゲームに対して必勝判定ができるとはあるゲーム(

きや ひろのり  
九州大学大学院経済学研究院  
h-kiya@econ.kyushu-u.ac.jp

状況)が入力として与えられたときにどちらのプレイヤーが勝つか計算するアルゴリズム(計算手順)を作成できることを表します。もちろん、そのようなアルゴリズムが存在することそのものは自明ではありませんが、組合せゲームに対する必勝判定は必ずできることが1913年に発表されたいわゆるツェルメロの定理[1]から直ちに示すことができます。

一方でツェルメロの定理は「効率的な」必勝判定があることを示唆するものではありません。むしろ将棋や囲碁、チェスに対する研究[2]が示していることは、これらのゲームが人間だけでなくコンピュータにとっても難しいゲームであるということであり、実際に高速に「解ける」ゲームはあまり知られていません。たとえば将棋は $10^{64}$ 以上の局面[3]のすべての関係を列挙すれば必勝判定はできるが現在の性能のかなりいいコンピュータを使っても1正( $10^{40}$ )年以上は軽くかかる計算になってしまいます。組合せゲーム理論分野では1902年のパウトンのニムというゲームに対する研究[4]を皮切りに効率よく計算できる組合せゲームの数理的特徴づけとその解法に関する知見を得てきました。私の研究ではこの高速に解くことができる問題群と高速に解くことができない問題群の乖離を埋めることを目標としています。

#### 4. 学位論文

学位論文では、手札消費型、つまり、手札を減らしていくことを目標とし、手札が0枚になったプレイヤーが勝ちであるというゲーム群のうち、組合せゲームに近い性質をもつゲームを中心にその特徴づけや個々の事例に関する研究を行っています。本稿では、その中から特に単貧民と呼ばれるゲームに関する結果(2017年春季研究発表会にて発表)とその後の研究成果[5, 6]、今後の研究展望を述べて終わりとさせていただきます。

##### 4.1 単貧民ゲームについて

単貧民はトランプカードゲームの中でも全国的に認知度、人気が高い遊びである大貧民(大富豪とも呼ばれます)を簡易化したゲームです。単貧民はその大貧民に

- 特殊ルールが一切存在しない、
- 1枚出しのみを認める、
- 手札は公開で行われる、

という制約を課したものであり、大貧民を単純化し、かつ完全情報ゲーム化したものと捉えることができます[7]。この組合せゲーム単貧民に対する高速に必勝判定を行うアルゴリズムについて以下では紹介します。

省略された証明などは文献[5]などをご参照ください。

まず本研究の基礎となる二人単貧民を以下のようにモデル化します：

各プレイヤーの手札集合は $N = \{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合の形で与えます(簡単のためそれぞれの手札集合は単純集合として説明します)。各プレイヤー(先手を $P_0$ 、後手を $P_1$ とします)に配布された札(手札と呼ぶことにします)の札数は必ずしも等しくなくてよいことにご注意ください。札の番号は強さを表し、大きいほど強いものとします。この設定の下、以下の形でゲームを進めていきます。

- 先後手を決め、先手プレイヤー、後手プレイヤーの順に交代で、手札から場に1枚ずつ札を出していく。
- 場は最初、空(「0」の強さの札が置かれていると考える)。
- 順番のプレイヤーは、手札の中から場の札の値よりも大きい値の札を1枚出すことができる。出した札はそれまで出していた札の上に置かれる(場に出ている札は今出した札に代わる)。このとき、順番はもう一人のプレイヤーに移る。
- 順番のプレイヤーは、手札を出さずに順番をもう一人のプレイヤーに譲ることができる(パスする、という)。このとき場に出ている札は空になる(改めて、「0」の札が置かれる)。
- 先に手札が0枚になった(すべての手札を出し切った)プレイヤーが勝ちであり、その時点でゲームは終了とする。

先手プレイヤーの札集合を $X_0 \subseteq N$ 、後手プレイヤーの札集合を $X_1 \subseteq N$ とします。また場に最後に出された札を $r$ とします。まだ札が出されていない空場では仮想的に0の札が置かれているものとし、 $\{r\} = \{0\}$ とします。このとき、以下の二部グラフを定義します： $G_0 = (X_0, X_1 \setminus \{\min(X_1)\} \cup \{r\}, E_0)$ 、つまり、 $G_0$ は、 $P_0$ のすべての手札と $P_1$ の最弱札を除く札と場の札の各札を点としたグラフであり、プレイヤー $P_0$ の各手札から、その札が勝てるプレイヤー $P_1$ の手札へ辺を引く形で定義されています(図1参照)。このグラフにおける最大マッチングを $\mu_{G_0}$ とします。同様に、 $G_1$ 、 $\mu_{G_1}$ を定義します。このとき以下の定理が成立することを示しました。

#### 定理

$\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$ ならば $P_0$ 必勝、そうでないならば、 $P_1$ 必勝である。また、手札の枚数に関して線形時間で必勝判定を行うことができる。

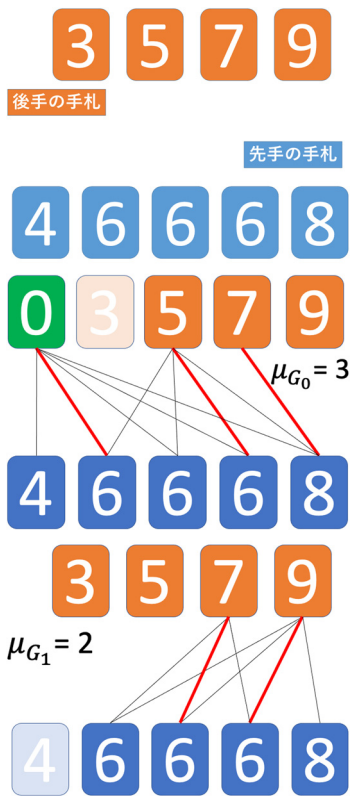


図1  $\mu_{G_0}$ ,  $\mu_{G_1}$  の計算例

#### 4.2 その後の発展, 今後の研究

以上が2017年に春の全国大会で発表した結果です。最後にこの研究そのもののその後の発展に関する拙著 [6] を簡単に紹介して終わりとさせていただきます。現在取り組んでいる研究の一つはこの成果の不完全情報ゲームへの発展です。単貧民の解析は上記の研究によって必勝プレイヤー判定の意味で、完全に解明されている一方、単貧民研究の契機となった大貧民自体は完全情報ではないため、大貧民における戦略設計の観点から見ると上記の成果だけでは元の問題に与える影響は限定的となってしまいます。また、完全情報ゲームにおける結果を不完全情報ゲームに適用することは一般には困難です。上述のとおり、任意の引き分けのない組合せゲームではいずれかのプレイヤーが必勝プレイヤー、つまり相手がどのような戦略をとったとしても勝つことができ、かつ（現実的な実行時間で計算できるかはともかく、理論上は）計算可能であるため、必勝戦略計算可能ですが、上述の単貧民を不完全情報ゲームへ一般化すると、必勝戦略や必勝プレイヤーが存在しないことを簡単に示すことができます。では、不完全情報で行う単貧民に関しては手立てがないのでしょうか？ここで単貧民のもとになった一般の大貧民に注目しま

す。このゲーム自体は完全情報ゲームではない不完全情報ゲームですが一方で、全く情報がないゲームとして遊ばれることも滅多にありません。たとえば、大貧民においては通常トランプのカードが用いられるため、自分の手札にKの札が4枚あるなら他プレイヤーの手札にはKの札が存在し得ない、あるいはJの札が手札に3枚あるなら他プレイヤーの手札内にはJの札は高々1枚しかないなどさまざまな推測可能な「情報」が存在します。また、（よくあるケースとはいえませんが）相手の手札の一部がばらまかれて公開されてしまうようなケースも考えられるでしょう。つまり、一般の大貧民は他人の手札に関する情報が全くないゲームではなく、部分的な情報が与えられているゲームとみなすことができるのではないかとこの発想をもとに行っているのが現在の研究です。当該論文では、以上のような状況を実現する目的の下、そのような部分的な情報を形式的に与える部分情報オラクル（以下、単にオラクルとも呼ぶ）を導入しました。文献 [6] では特に相手の手札の枚数のみを返すオラクルと最大マッチングのサイズのみを返すオラクルが不完全情報単貧民にどのような影響を与えるかに関して検証を行いました。

この研究は不完全情報ゲームの新しい解析スキームとしてオラクルモデルを提案した点が本研究の重要な貢献であると考えています。これまで不完全情報ゲームに対する理論的な解析は著者らの知る限り、（ゲーム理論でいう）混合戦略をはじめ、不確実性を確率を利用してモデル化するものがほとんどであるように思います。これに対し、本研究で提案したオラクルモデルは情報自体の欠落と補填に焦点を置いています。オラクルモデルによる解析はそれ自体が新しいスキームであり、ほかの不完全情報ゲーム解析への応用が期待できます。そのみならず、ゲームごとにさまざまなオラクルを考えることができる点、ゲームのみならず、不完全情報社会事象一般にも応用可能性を秘めている点、確率モデルとの組合せも可能である点など拡張性の面からもその発展が期待できるように考えています。OR分野のさまざまな研究に今後も触れていく中で応用の可能性を今後見つけていきたいです。

#### 参考文献

- [1] E. Zermelo, *Ernst Zermelo: Collected Works/Gesammelte Werke, Volume I/Band I - Set Theory, Miscellanea/Mengenlehre, Varia*, Springer, 2010.
- [2] T. Yato, T. Seta and T. Ito, "Finding yozume generalized tsume-shogi is exptime-complete," *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **88**, pp. 1249–

1257, 2005.

- [3] 都勇志, 木谷裕紀, 小野廣隆, “将棋における状態空間数の上下界,” 研究報告ゲーム情報学 (GI), **14**, pp. 1–7, 2022.
- [4] C. L. Bouton, “Nim, a game with a complete mathematical theory,” *The Annals of Mathematics*, **3**, pp. 35–39, 1901.
- [5] H. Kiya, K. Ohto and H. Ono, “Computing the Winner of 2-Player TANHINMIN,” *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **104**, pp. 1134–1141, 2021.
- [6] H. Kiya, K. Ohto and H. Ono, “Modeling Imperfect Information TANHINMIN with Structural Oracle,” 情報処理学会論文誌数理モデル化と応用 (TOM), **15**, pp. 10–17, 2022.
- [7] 西野順二, “単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察,” ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集, **2007**, pp. 66–73, 2007.