グラフ・ネットワークと経済分析

土中　哲秀

本稿では，博士論文を振り返りつつ，その当時の研究成果とそこに至るまでの道のりについて述べる．博士論文「Studies on Graph Optimization and Network Indicators in Economic Structure Analysis（経済構造分析におけるグラフ最適化とネットワーク指標に関する研究）」では，グラフ・ネットワークと経済分析を鍵とした研究成果をまとめている．理論面では，有向グラフや重み付きグラフにおけるグラフ最適化問題に対する固定パラメータ容易アルゴリズム設計，実践面では，産業連関分析とネットワーク分析を組み合わせた指標開発を行った．本稿では，これらの研究概要を述べるとともに，その後の発展についても紹介する．

キーワード：グラフアルゴリズム，固定パラメータ容易アルゴリズム，産業連関分析

1.　はじめに

九州大学大学院システム情報科学研究院の土中哲秀と申します．この度，OR 機関誌特集号「将来を担う若手研究者たち」でこのような執筆の機会を賜り，誠にありがとうございます．筆者は 2018 年 3 月に九州大学大学院経済学府経済工学専攻にて博士の学位を取得しました．筆者が学位を取得して早 4 年経ちますが，本稿を通して博士学生時代の研究，博士課程時代の研究生活を振り返りつつ，現在行っている研究にどのように発展してきたかを紹介させていただきます．現在博士課程に所属する，もしくは博士課程を見据えている皆さんにも参考になれば幸いです．

2.　博士課程進学までの経緯

はじめに，筆者の経歴からご紹介します．筆者は 2010 年に九州大学経済学部経済工学科に入学し，そこから学部，修士課程，博士課程の 8 年間を過ごしました．筆者がオペレーションズ・リサーチと出会ったのは，3 年次のゼミ配属のときでした．それまではオペレーションズ・リサーチという言葉すら知らなかったのですが，ゼミ配属のときに初めてオペレーションズ・リサーチという言葉を検索したことを今でも覚えています．当時九州大学経済学部におられた恩師の小野廣隆先生（現名古屋大学）は，オペレーションズ・リサーチや理論計算機科学がご専門で，ゼミ配属前に小野先生から詳しく内容を教えていただき，これはと思いゼミを決めました．ゼミ配属後は，グラフ理論やグラフアルゴリズムに関する内容を主に勉強していました．グラフ理論やグラフアルゴリズムに関する内容は，学部の講義では一切なかったのでとても新鮮に感じました．振り返ってみれば，これが筆者の研究生活の出発点となり，現在の研究内容までつながっています．

学部時代は，グラフアルゴリズムの理論的性能解析を主に研究していました．しかし，修士に進学して，せっかく経済学部に所属しているので，経済に関連することも研究したいと小野先生に相談したところ，経済分析分野でネットワーク分析などにも精通する先生をご紹介いただき，継続的な研究打ち合わせをしていただきました．当初は，博士課程には進学せず，就職する予定で就職活動などもしていたのですが，修士課程までの研究成果に満足できず，博士課程進学を決めました．しかし，博士課程に進学してからは，想像していたよりも分野間の乖離を感じ，どのようにすれば両分野を融合し，目指すべき研究をすることができるのかということに悩みました．実は，今でも悩み続けているのですが，博士課程を修了するまでにどのようなことに取り組んだかを次節でご紹介します．

3.　博士論文の振り返りとその後の発展

前節のバックグラウンドを踏まえて，筆者の博士論文「Studies on Graph Optimization and Network Indicators in Economic Structure Analysis（経済構造分析におけるグラフ最適化とネットワーク指標に関する研究）」の内容をご紹介します．本博士論文は，理論面と実践面の二つの部分からなり，理論面では主に経済分析において頻出する有向グラフや重み付きグラフを対象としたグラフ最適化問題の計算複雑性およびアルゴリズム設計，実践面では実産業間取引ネットワークデータを用いた経済分析を行っています．グラフ（ネッ

はなか　てっしゅう
九州大学大学院システム情報科学研究院
〒 819–0395 福岡市西区元岡 744
hanaka@inf.kyushu-u.ac.jp

トワーク）とは，点と辺からなる離散構造です．たとえば，人々のつながりは人物ネットワーク（点：人物，辺：人物間のつながり），企業や産業の関係は取引ネットワーク（点：企業や産業，辺：取引）として表現できます．特に，経済分析分野の一つである産業連関分析で経済波及効果算出のために用いられる産業連関表は取引ネットワークとみなすことができ，実際に博士論文における経済分析も産業連関表を用いたネットワーク分析を行っています．このような産業連関表から得られる取引ネットワークの辺に付随する取引量は冪乗則に従い，重みなし表現はあまり意味をなさないこと，産業間の取引関係には向きがあることから重み付きグラフや有向グラフにおけるグラフ最適化問題に関する研究に興味をもちました．実際に経済分析分野の先生とも打ち合わせをしながらどのような問題が経済分析に求められているのかというところから研究は始まり，そこで考えた問題のうちの二つが博士論文の理論面で扱うグラフ最適化問題である有向辺支配集合問題 (Directed Edge Dominating Set) と最大重み極小セパレータ問題 (Maximum Weight Minimal Separator) になります．前者は有向グラフを対象とした問題，後者は重み付きグラフを対象にした問題です．理論面における研究では，これら二つの問題に対して，主にアルゴリズム設計論，計算複雑性の観点からアプローチしました．一方で，実経済データを用いた分析にも興味がありました，そこで，グラフ・ネットワーク的視点から経済分析を試みたときの研究結果が博士論文の実践面の研究成果になります．実際に，上述した産業連関分析にネットワーク的視点を取り入れた解析法を考案し，全世界取引表（全世界産業連関表）に適用することで，全世界を跨るサプライチェーンにおいて，環境負荷の高い取引ネットワークを可視化しました．

3.1 理論面に関する研究

理論面の研究では，有向辺支配集合問題と最大重み極小セパレータ問題のアルゴリズム設計，計算複雑性解析を行いました．後述するように，これらの問題はかなり制限されたグラフクラスに対してもNP 困難であることが示されます．これに対して，これらの問題を効率的に解くためにどうすれば良いかということに焦点を当て，グラフが良い性質をもつ場合に効率的に解くことができるアルゴリズムが設計できるような問題の性質を表す固定パラメータ容易性という観点から研究を行っています．

固定パラメータ容易性について簡単に説明します．たとえば，グラフが木である場合はさまざまな NP 困難問題が効率的に解けることが知られています．しかし，このような木に対してのみにしか動作しないアルゴリズムは適用範囲が狭いため，グラフが木であるという条件を少し緩和することにより，グラフが木構造に近い場合に高速に動作するアルゴリズムの設計などが研究されてきました．このように，グラフの構造をパラメータとして表し，そのパラメータが小さいときに問題を効率的に解くことができるとき，その問題は固定パラメータ容易 (Fixed-Parameter Tractable, FPT) であるといいます．より厳密にいうと，頂点数 n のグラフにおいて，パラメータ k に関して，その問題が $f(k)\,n^{O(1)}$-時間で解くことができるとき固定パラメータ容易であるといいます．先ほどの例で挙げたグラフの木構造への近さを表すパラメータは木幅と呼ばれており，独立点集合問題や頂点支配集合問題などさまざまな NP 困難問題は木幅に関して固定パラメータ容易であることが知られています．したがって，グラフが木構造に近いときにこれらの問題は効率的に解くことができます．現在でもグラフ最適化問題の固定パラメータ容易性に興味を持っており，木幅をはじめとするさまざまなグラフパラメータとグラフ最適化問題の計算複雑性（パラメータ化計算量）に関する研究を行っています．より詳しく固定パラメータ容易性やパラメータ化計算量について知りたい方は文献 [1] をご参照ください．

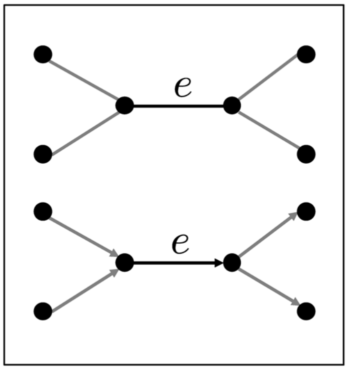

図 1　無向グラフにおける辺支配（上）と有向グラフにおける辺支配（下）

3.1.1 有向辺支配集合問題

理論研究の一つ目が，有向グラフ最適化問題である有向辺支配集合問題です [2]．この問題は取引グラフなどの向きをもつネットワークに対する重要部分構造抽出を動機としています．有向グラフ $G=(V,E)$ において，辺 $e=(u,v)$ は e 自身と u に入ってくる辺，および v に出ていく辺を支配するといいます（図 1）．この

とき，すべての辺を支配する最小の辺集合を求める問題を有向辺支配集合問題といいます．この問題は，古くから知られているグラフ最適化問題である無向辺支配集合問題の有向版と考えることができます．無向グラフにおいては，辺 $e = (u, v)$ は e 自身と e に接続する辺を支配するといい，無向辺支配集合問題の場合はすべての辺を支配する最小の辺集合を求めることが目的になります．無向辺支配集合問題は，最大次数 3 の 2 部グラフもしくは平面グラフにおいても NP 困難であることが Yannakakis and Gavril によって示されています [3]．博士論文では，辺 e が支配できる辺を，u を終端とする長さ p 以内に到達するパスに属する辺，および v を始端とする長さ p 以内のパスに属する辺にまで拡張してより一般的に議論しています．このとき，辺 e はそのような辺を (p, q)-支配するといい，$p = q = 1$ のときが図 1 で示す u に入ってくる辺，および v に出ていく辺を支配する場合に対応します．はじめに有向辺支配集合問題が有向グラフのグラフクラスである有向無閉路グラフにおいても NP 困難であること，さらに $e = (u, v)$ が支配できる辺を u に入ってくる辺もしくは v に出ていく辺のみに制限した場合，すなわち，$p + q \leq 1$ のときでも同様のグラフクラスで NP 困難であることを示しました．そのため，有向辺支配集合問題の固定パラメータ容易性について解析し，$p + q \leq 1$ のとき，有向辺支配集合問題に対する木幅 t に関する $2^{O(t)}$-時間アルゴリズム，および解サイズ k に関する $2^{O(k)}$-時間アルゴリズムを設計しました．さらに，$p \geq 2$ または $q \geq 2$ のときは，解サイズ k に関して固定パラメータ容易アルゴリズムを設計することが難しい W[2]-困難であることを示しました．これは，$p + q \leq 1$ あるいは $p = q = 1$ のときに固定パラメータ容易アルゴリズムが設計できる事実とは対照的な結果となります．

本研究に関して，博士課程修了以降の研究成果についても述べます．有向辺支配集合問題のさらなる結果として，文献 [4] では，解サイズに関する固定パラメータ容易アルゴリズムの計算時間を改善しました．具体的には，$p + q \leq 1$ のとき $2^k n^{O(1)}$ -時間アルゴリズム，$p = q = 1$ のとき $9^k n^{O(1)}$-時間アルゴリズムを設計しました．また，有向グラフにおいてのみ定義されるトーナメントグラフにおいて，p, q の値によって計算複雑性が変化するということがわかりました（表 1）．

表 1　トーナメントグラフにおける有向辺支配集合問題の計算複雑性

p, q	計算複雑性
$p+q=1$	NP 困難，FPT，多項式サイズカーネル
$p=2$ または $q=2$	準多項式時間可解，W[2]-困難
それ以外	多項式時間可解

3.1.2　最大重み極小セパレータ問題

理論研究として取り組んだもう一つが最大重み極小セパレータ問題です [5]．グラフ $G = (V, E)$ において，頂点 s と頂点 t を分離する点部分集合を s-t セパレータといいます．s-t セパレータ S に対して，$S' \subset S$ となるような s-t セパレータが存在しないとき，S を極小 s-t セパレータと呼びます．また，点部分集合 S が G において，ある 2 点 $u, v \in V$ に対して極小 u-v セパレータとなるとき，S を極小セパレータといいます．最大重み極小 (s-t) セパレータ問題とは，点重み付きグラフ $G = (V, E)$（と 2 点 $s, t \in V$）が与えられて，最大重み極小 (s-t) セパレータを求める問題です．古くから極小セパレータに関する研究は行われており，特にグラフの木構造への近さを表すグラフパラメータである木幅との関係に注目した研究が盛んに行われています．グラフの木幅自体を計算することは残念ながら NP 困難であることが知られています [6]．しかし，グラフの極小セパレータの数が多項式個であるならば，木幅を多項式時間で計算することができます [7]．また，本研究と関連するグラフの極小セパレータのサイズもさまざまな NP 困難問題を解く際に重要になることが知られています．たとえば，グラフの極小セパレータのサイズが定数であれば，クリーク問題や木幅問題などの NP 困難問題が多項式時間で計算可能です [8]．本研究は，グラフの最大極小セパレータ自体の計算に注目しています．

本研究では，最大重み極小 (s-t) セパレータ問題が重みなし 2 部グラフにおいても NP 困難であることを示しました．これに対して，木幅 t をパラメータとする $2^{O(t \log t)} n^3$-時間アルゴリズムを設計しました．すなわち，最大重み極小 (s-t) セパレータ問題は木幅に関して固定パラメータ容易であることを示しました．このアルゴリズムは，以下の極小セパレータの構造に注目して設計されています．

補題 [folklore]
グラフ G において，点部分集合 S を極小 s-t セパレータとする．また，A, B をそれぞれ s, t を含む $G[V \setminus S]$ の連結成分とする．このとき，S に属する各頂点は A に属する頂点と B に属する頂点を隣接点としてもつ．

この極小セパレータの性質を用いて，木分解上におけ

表 2　3 部門からなる産業連関表

消費者側 ⇓

生産者側 ⇒

	農業	工業	商業	最終需要	総生産量
農業	80	120	170	70	440
工業	250	230	80	40	600
商業	70	80	190	150	490
付加価値	40	170	50		
総生産量	440	600	490		

る連結性を考慮した動的計画法に基づき，$2^{O(t \log t)}n^3$-時間アルゴリズムを設計しました．また，Cut & Count と呼ばれる技術を適用させることにより，乱択 $9^t W^2 n^{O(1)}$-時間アルゴリズムを設計しました．このアルゴリズムは，点重みが定数の場合，前者のアルゴリズムより計算時間を大幅に改善しています．

博士課程修了までに得られた結果は以上になりますが，本研究に関連した研究に博士課程修了後も取り組み，以下の結果を得ています．まず，Rank-Based Approach により，(決定性) $2^{O(t \log t)}n^3$-時間アルゴリズムの計算時間を $2^{O(t)}n^{O(1)}$-時間に改善しました [5]．さらに，文献 [9] では，本結果を再帰アルゴリズムに組み込むことによって，解サイズ k に関する $2^{O(k)}n^{O(1)}$-時間アルゴリズムを設計しました．文献 [9] では，指数時間仮説のもとで最大重み極小セパレータ問題に対する $2^{o(k)}n^{O(1)}$-時間アルゴリズムは存在しないこと，$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{coNP/poly}$ でなければ解サイズに関する多項式サイズカーネルが存在しないこと，入力グラフを平面 2 部グラフ，補 2 部グラフ，線グラフに制限しても NP 困難であることを示しています．

3.2　実践面に関する研究

有向辺支配集合問題と最大重み極小セパレータ問題に関する研究は理論計算機科学における研究成果にはつながりましたが，残念ながら当初目的としていた経済分析への応用というところまではつながりませんでした．研究を進めていくうちに，純粋にグラフ最適化問題の計算複雑性とアルゴリズム設計に興味を惹かれ，現在に至るまで研究に取り組んでいますが，当初の興味であったグラフ・ネットワーク的視点からの経済分析に対する興味ももち続けたままでした．そこで，博士課程の間も産業連関分析とネットワーク構造分析による経済分析手法に関する研究も並行しながら進めていきました．以下では，産業連関分析に関して説明し，その後筆者の研究成果についてご紹介します．

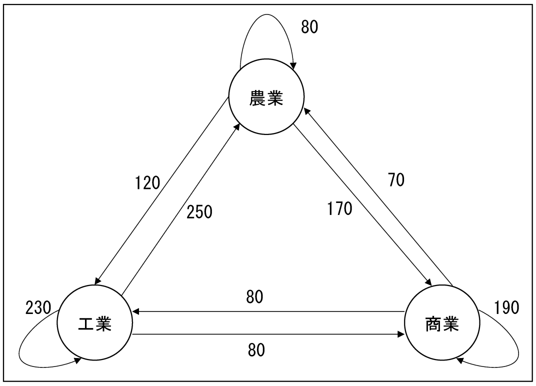

図 2　産業連関表から得られる取引ネットワーク

3.2.1　産業連関分析

産業連関分析とは産業連関表と呼ばれる産業間取引表（表 2）を用いた経済分析手法です．たとえば，オリンピックなどのイベントが催されるとき，経済波及効果は◯◯円になるといった形でニュースなどで紹介されますが，この経済波及効果の算出に用いられています．経済波及効果について簡単に説明します．例として，オリンピックが開催されるにあたり，建設需要が高まったとします．このとき，建設に必要な建設機械や建物の材料である鋼，木材，電気，コンクリートなどが必要になり，製造業，鋼業，林業，電力産業などの需要が高まります．さらに，これらの産業が製品を製造するために，鉄や石炭などの原料が必要となり，採掘業などの需要が増加します．このように，ある産業の需要の増加により，ほかの産業の需要が連鎖的に誘発される効果のことを経済波及効果といいます．経済波及効果は，すべての取引を辿り，各産業の生産量がどれだけ増加したかを見れば算出できますが，現実的にはそのような方法で算出することはほぼ不可能です．これに対して，産業連関分析では，産業連関表を用いることで近似的に経済波及効果を計算しています．

表 2 に示しているのは，3 部門からなる産業連関表

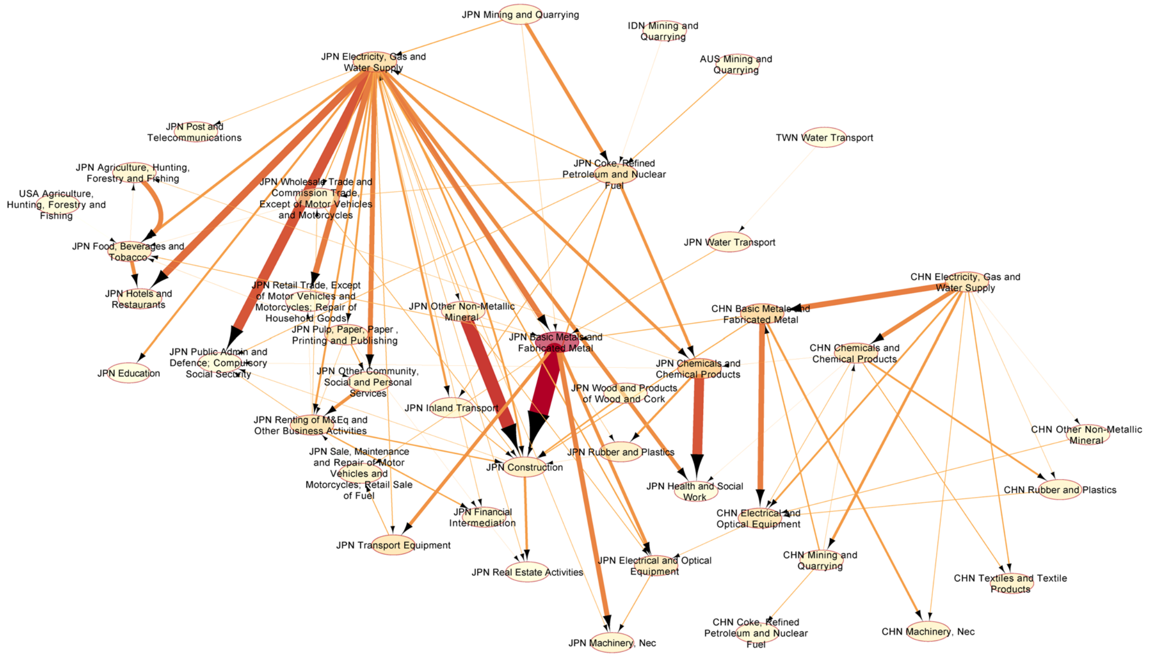

図 3　文献 [10] の指標に基づいた日本の最終需要によって発生した CO_2 による環境負荷の高い産業・取引の可視化例（World Input-Output Database (WIOD)[11] を元に作成）

です．産業連関表の基本構成は，産業間の取引関係を表す取引行列，各産業に対する最終需要（最終消費者の需要），各産業が生み出す付加価値，各産業の総生産量からなり，各要素は取引量を表します（表 2）．たとえば，(1,3)-要素は農業から商業に 170 単位の取引があることを示しており，商業部門が製品を 490 単位分生産するために必要な農業部門の生産量，すなわち農業部門から商業部門 への中間投入量を表しています．産業連関分析では，レオンチェフ逆行列と呼ばれる，取引表から得られる一単位あたりの生産に必要な他産業からの投入量を表す行列の逆行列を計算し，各産業の需要によって発生する経済波及効果を算出します．

3.2.2　産業連関ネットワーク分析

取引行列は，それ自身を隣接行列と見做して，図 2 のような重み付き有向グラフとして見ることもできます．重みは取引量を表します．グラフ・ネットワーク的視点から見たときに，経済波及効果の計算は，図 2 で示した産業間取引ネットワークの重みを 1 単位あたりの生産に必要な投入量に置き換えたネットワークの無限長パスを計算することに対応します．博士論文の研究成果では，このような視点から，経済波及効果に対応する取引ネットワーク上のパスを捉え，各国の需要によって誘発される環境負荷が全世界取引ネットワークのどの取引で高いのかを指標化することを試みました [10]．実際の指標は，ネットワーク分析においてよく知られている媒介中心性の概念を産業連関分析に取り入れたものとなっています．考案した指標を全世界取引表（全世界産業連関表）[11] に適用することで，全世界を跨るサプライチェーンにおいて，環境負荷の高い取引ネットワークを可視化しました（図 3）．

本研究は，理論面で紹介した研究とはかなり毛色が違います．しかし，グラフ・ネットワークの重要構造抽出という点で共通点があります．本研究に関しても，現在も継続的に研究しています．たとえば，現在は，グローバルサプライチェーンにおける対外依存リスクを産業連関ネットワーク分析から明らかにするというような研究に取り組んでいます [12]．特に，世界的な半導体不足や世界情勢の不安定さなどからこのようなリスク指標を考案することが求められていると感じています．

4.　おわりに

本稿では，筆者の博士論文を振り返りつつ現在行っている研究をご紹介しました．博士課程に進学した当初は，どのような研究をするのが良いか，自分の能力，興味，これまでに学んできたことなどさまざまな要素が相まって，研究テーマを選ぶのに随分苦労しました．今回，このように振り返らせていただきましたが，グ

ラフ・ネットワークと経済分析という共通点はあるものの必ずしもすべてがうまくまとまっているとは思いません．しかし，今後研究を続けていくうえでの長期的な課題として取り組んでいけたらと思っています．最後に，この度はこのような機会をいただき誠にありがとうございました．厚く御礼申し上げます．

参考文献

[1] M. Cygan, F. V. Fomin, L. Kowalik, D. Lokshtanov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk and S. Saurabh, *Parameterized Algorithms*, Springer, 2015.

[2] T. Hanaka, N. Nishimura and H. Ono, "On directed covering and domination problems," *Discrete Applied Mathematics*, **259**, pp. 76–99, 2019.

[3] M. Yannakakis and F. Gavril, "Edge dominating sets in graphs," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **38**, pp. 364–372, 1980.

[4] R. Belmonté, T. Hanaka, I. Katsikarelis, E. J. Kim and M. Lampis, "New results on directed edge dominating set," In *Proceedings of the 43rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2018)*, 67:1–67:16, 2018.

[5] T. Hanaka, H. L. Bodlaender, T. C. van der Zanden and H. Ono, "On the maximum weight minimal separator," *Theoretical Computer Science*, **796**, pp. 294–308, 2019.

[6] S. Arnborg, D. G. Corneil and A. Proskurowski, "Complexity of finding embeddings in a k-tree," *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **8**, pp. 277–284, 1987.

[7] V. Bouchitté and I. Todinca, "Treewidth and minimum fill-in: Grouping the minimal separators," *SIAM Journal on Computing*, **31**, pp. 212–232, 2001.

[8] K. Skodinis, "Efficient analysis of graphs with small minimal separators," In *Proceedings of the 25th Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 1999)*, pp. 155–166, 1999.

[9] T. Hanaka, Y. Kobayashi, Y. Kobayashi and T. Yagita, "Finding a maximum minimal separator: Graph classes and fixed-parameter tractability," *Theoretical Computer Science,* **865**, pp. 131–140, 2021.

[10] T. Hanaka, S. Kagawa, H. Ono and K. Kanemoto, "Finding environmentally critical transmission sectors, transactions and paths in global supply chain networks," *Energy Economics*, **68**, pp. 44–52, 2017.

[11] M. P. Timmer, E. Dietzenbacher, B. Los, R. Stehrer and G. J. de Vries, "An illustrated user guide to the world input-output database: The case of global automotive production," *Review of International Economics*, **23**, pp. 575–605, 2015.

[12] S. Inomata and T. Hanaka, "A risk analysis on geographical concentration of global supply chains," *IDE Discussion Paper*, No. 828, 2021.