

空間点過程に対するヌヴェーの交換公式と 無線ネットワークへの応用

三好 直人

定常な点過程を用いて表わされる確率モデルを解析するとき、パルム解析は強力なツールとして知られています。ヌヴェーの交換公式はパルム解析における基本公式の一つであり、二つの同時に定常な点過程それぞれのパルム分布を結びつけるものです。この公式の1次元版は待ち行列などの解析に用いられますが、それをそのまま多次元空間に拡張した形はあまり使い勝手が良いとはいえません。本稿では、より汎用性の高い形の空間点過程版ヌヴェーの交換公式を紹介し、この公式が特に、無線端末が多数のクラスタをつくって存在しているような無線ネットワークの解析に有用であることを例示します。

キーワード：空間点過程，定常性，パルム解析，ヌヴェーの交換公式，クラスタ点過程，無線ネットワーク，端末間通信，確率幾何解析

1. はじめに

点過程の理論は、1940年代ごろから待ち行列の解析に使われてきましたが、その後、地震の発生や神経細胞の発火の解析にも用いられるようになり、現在では大量の時系列データや空間データが利用できるようになったこともあって、さまざまな分野の確率モデルに適用されています。特に、定常な（確率分布が平行移動に関して不変な）点過程は、1次元のものは待ち行列の、多次元空間版は無線ネットワークのモデル化／解析に用いられ（文献 [1, 2] を参照）、なかでもパルム確率を基に展開される理論はパルム解析 (Palm calculus) と呼ばれ、定常点過程を用いて表わされる確率モデルを解析するうえで強力なツールとして知られています。

ヌヴェーの交換公式 (Neveu's exchange formula) はパルム解析における基本公式の一つであり、二つの同時に定常な点過程それぞれのパルム分布を結びつけるものです。この公式の1次元版は待ち行列などの解析に用いられますが、それをそのまま多次元空間に拡張した形は残念ながらあまり使い勝手が良いとはいえません。本稿では、より汎用性の高い形の空間点過程版ヌヴェーの交換公式を紹介し、それがクラスタ点過程を用いて表わされる確率モデルの解析に有用であることを例示します。ここでクラスタ点過程とは、複数個の点からなるクラスタが多数存在している様子を表わす点過程であり、たとえば駅の周辺や繁華街など、人が

密集しやすいところの無線端末（スマホなど）の位置をモデル化するのに用いられます。このようなクラスタ点過程を用いてモデル化される無線ネットワークの解析に新しいヌヴェーの交換公式がどのように使われるのかを見てもらえればと思います。

2. ヌヴェーの交換公式

2.1 1次元から多次元へ

はじめに1次元定常点過程に対するヌヴェーの交換公式を見てみましょう。 $\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{X_n}$ と $\Psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_{Y_m}$ を実数の集合 \mathbb{R} 上で同時に定常かつともに単純な二つの点過程とします。ここで単純とは、同じ位置に二つ以上の点が重なって存在しないことをいいます。また、 δ_x はディラック測度であり、 \mathbb{R} 上の確率変数列 $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ と $\{Y_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ にはそれぞれ

$$\begin{aligned} \dots < X_0 \leq 0 < X_1 < \dots, \\ \dots < Y_0 \leq 0 < Y_1 < \dots \end{aligned}$$

を満たすように添え字が付けられているものとします。単位時間あたりの点の数の期待値 $\lambda_\Phi = \mathbf{E}[\Phi([0, 1])]$ 、 $\lambda_\Psi = \mathbf{E}[\Psi([0, 1])]$ をそれぞれ点過程 Φ , Ψ の強度といい、ともに正かつ有限であることを仮定します。このとき、 Φ , Ψ それぞれに対するパルム確率 P_Φ^0 , P_Ψ^0 が定義できて、 $P_\Phi^0(X_0 = 0) = 1$, $P_\Psi^0(Y_0 = 0) = 1$ を満たします（文献 [1] を参照）。パルム確率についての解説は文献 [1] にもありますが、とりあえずは原点 0 に点過程の点があることが与えられたときの条件付き確率と考えてもらえれば十分です。これら二つのパルム確率の間に以下の公式が成り立つことが知られています。

みよし なおと
東京工業大学情報理工学院数理・計算科学系
〒152-8552 目黒区大岡山 2-12-1-W8-52

命題 1 (1次元版ヌヴェーの交換公式 [3])

点過程 Φ, Ψ と同時に定常な実数値確率過程 $\{\xi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ に対して,

$$\lambda_\Psi E_\Psi^0[\xi(0)] = \lambda_\Phi E_\Phi^0 \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi(Y_m) \mathbf{1}_{[0, X_1)}(Y_m) \right] \quad (1)$$

が (期待値が定義できる限りにおいて) 成り立つ。ここで, E_Φ^0, E_Ψ^0 はそれぞれ P_Φ^0, P_Ψ^0 についての期待値であり, $\mathbf{1}_B$ は

$$\mathbf{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & (x \in B) \\ 0 & (x \notin B) \end{cases}$$

によって定義される指示関数である。

(1) 式の両辺はそれぞれ Ψ と Φ のパルム確率についての期待値によって表わされており, ヌヴェーの交換公式が二つのパルム分布を結びつけるものであることがわかります。(1) 式に $\xi(t) \equiv 1$ を代入すると, ただちに $E_\Phi^0[\Psi([0, X_1))] = \lambda_\Psi/\lambda_\Phi$ が得られます。 $P_\Phi^0(X_0 = 0) = 1$ であることに注意すると, これは Φ の隣り合う二つの点 X_0 と X_1 の間にある Ψ の点の数の期待値が二つの点過程の強度の比で与えられることを示しています。よって (1) 式は,

$$E_\Psi^0[\xi(0)] = \frac{E_\Phi^0 \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi(Y_m) \mathbf{1}_{[0, X_1)}(Y_m) \right]}{E_\Phi^0[\Psi([0, X_1))]}$$

と等価です。この式において, たとえば $\Psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_{Y_m}$ を待ち行列への客の到着時刻列, $\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{X_n}$ を系内客数が 0 のときの客の到着時刻列, そして $\xi(t) = \xi(Y_m)$ ($t \in [Y_m, Y_{m+1})$) を時刻 Y_m に到着した客が得る何らかの報酬を表わすものとする, 定常状態において一人の客が得る報酬の期待値が, 客数が 0 の状態から再び 0 になるまでの間に到着した客数の期待値とそれらの客が得る報酬の総和の期待値との比で与えられることがわかります。

次に (1) 式を多次元空間に拡張することを考えましょう。1次元のときは点過程の一つの点からその次の点までの区間を考えましたが, 2次元以上の点過程の場合, 一つの点からその次の点までという考え方ができません。そこで, 代わりにポロノイ分割 (Voronoi tessellation) を利用します。 d を 2 以上の整数として, $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{X_n}$ を \mathbb{R}^d 上の単純な点過程とします。

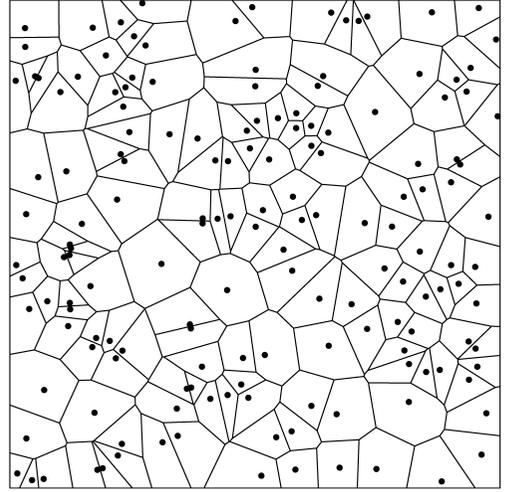


図 1 2次元点過程のサンプルとポロノイ分割 (文献 [2] から抜粋)

1次元の点過程と違って, X_n ($n = 1, 2, \dots$) の添え字の付け方に特に決まりはありません。このとき,

$$V_\Phi(X_n) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - X_n\| \leq \|x - X_{n'}\|, n' = 1, 2, \dots\}$$

を点 X_n のポロノイセル, $\{V_\Phi(X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を点過程 Φ によるポロノイ分割といいます。ここで $\|\cdot\|$ はユークリッド距離を表わします。 $V_\Phi(X_n)$ 内のどこから見ても最も近い Φ の点 X_n になるように \mathbb{R}^d が分割されていることがわかるでしょう (図 1 を参照)¹。

さて, $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{X_n}$ と $\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Y_m}$ を \mathbb{R}^d 上で同時に定常かつともに単純な二つの点過程として, それぞれの強度 $\lambda_\Phi = E[\Phi([0, 1)^d)]$ と $\lambda_\Psi = E[\Psi([0, 1)^d)]$ はともに正かつ有限であると仮定します。このとき, Φ, Ψ それぞれに対するパルム確率 P_Φ^0, P_Ψ^0 が定義できて, $P_\Phi^0(\Phi(\{0\}) = 1) = 1, P_\Psi^0(\Psi(\{0\}) = 1) = 1$ を満たします。ここで, 事象 $\{\Phi(\{0\}) = 1\}$ は原点 0 に Φ の点があることを表わしていますが, 表記上の約束として, 原点にある点に添え字 0 を付けることにします。すなわち, 事象 $\{\Phi(\{0\}) = 1\}$ 上では $X_0 = 0$ であり, 同様に $\{\Psi(\{0\}) = 1\}$ 上では $Y_0 = 0$ です。

命題 2 (多次元版ヌヴェーの交換公式 [4])

$\{V_\Phi(X_n)\}_{n=0}^{\infty}$ を事象 $\{\Phi(\{0\}) = 1\}$ が与えられたときの Φ によるポロノイ分割, $\{\xi(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ を Φ, Ψ と同時に定常な実数値確率場とする。このとき,

¹ 二つのポロノイセルの境界はどちらのセルにも属しており, 厳密な意味での分割ではないことに注意が必要です。

$P_{\Phi}^0(\{V_{\Phi}(X_n)\}_{n=0}^{\infty} \text{の境界上に}\Psi \text{の点がない})$
 $= 1$

ならば,

$$\lambda_{\Psi} E_{\Psi}^0[\xi(0)] = \lambda_{\Phi} E_{\Phi}^0 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \xi(Y_m) \mathbf{1}_{V_{\Phi}(0)}(Y_m) \right] \quad (2)$$

が(期待値が定義できる限りにおいて)成り立つ。

1次元のときは $X_0 = 0$ から X_1 までの間の Ψ の点を見ていたのに対して, (2) 式では $X_0 = 0$ のポロノイセル内の Ψ の点を見ています. (2) 式において $\xi(t) \equiv 1$ とすると, ただちに $E_{\Phi}^0[\Psi(V_{\Phi}(0))] = \lambda_{\Psi}/\lambda_{\Phi}$ が得られます. これは Φ の一つのポロノイセル内にある Ψ の点の数の期待値が二つの点過程の強度の比で与えられることを示しています. たとえば, Φ がセルラネットワークの基地局の位置, Ψ が端末の位置を表わすものとして, セルラネットワークのセルがポロノイセルによって与えられていると仮定すると, 一つの基地局がカバーする端末の数の期待値が得られます.

2.2 一般化

(2) 式はポロノイ分割が現れない場面では使うことができず, 応用範囲が広いとはいえません. そこで, ポロノイ分割に頼らない形のヌヴェーの交換公式を考えましょう. そのための準備として, \mathbb{R}^d 上のシフト作用素 S_t ($t \in \mathbb{R}^d$) を導入します. すなわち, \mathbb{R}^d 上の測度 ν に対して $S_t\nu$ も \mathbb{R}^d 上の測度であり,

$$S_t\nu(B) = \nu(B+t) \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

を満たします². ただし, $B+t := \{x+t \mid x \in B\}$ です. たとえば \mathbb{R}^d 上の点過程 $\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Y_m}$ に対しては,

$$S_t\Psi(B) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Y_m}(B+t) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Y_m-t}(B)$$

であり, S_t によって Ψ のすべての点が $-t$ だけシフトされます.

命題 2 と同様に, $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{X_n}$ と $\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Y_m}$ を \mathbb{R}^d 上で同時に定常かつともに単純な二つの点過程として, それぞれの強度 λ_{Φ} と λ_{Ψ} はともに正かつ有限であると仮定します. このとき, 次の定理が得られます.

² $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ は \mathbb{R}^d 上のボレル集合体を表わします.

定理 1 (多次元版汎用ヌヴェーの交換公式 [5])

$\Psi_n = \sum_{k=1}^{\kappa_n} \delta_{Y_{n,k}}$ ($n = 1, 2, \dots$) を \mathbb{R}^d 上の点過程の族として, Φ のそれぞれの点にマーク Ψ_n を付けた $\tilde{\Phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{(X_n, \Psi_n)}$ が定常なマーク付き点過程であつて, さらに $S_{-X_n}\Psi_n = \sum_{k=1}^{\kappa_n} \delta_{X_n+Y_{n,k}}$ ($n = 1, 2, \dots$) が Ψ の分割であるとする (すなわち $\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} S_{-X_n}\Psi_n$). このとき, Φ, Ψ と同時に定常な実数値確率場 $\{\xi(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ に対して,

$$\lambda_{\Psi} E_{\Psi}^0[\xi(0)] = \lambda_{\Phi} E_{\Phi}^0 \left[\sum_{k=1}^{\kappa_0} \xi(Y_{0,k}) \right] \quad (3)$$

が(期待値が定義できる限りにおいて)成り立つ. ただし, $\Psi_0 = \sum_{k=1}^{\kappa_0} \delta_{Y_{0,k}}$ は事象 $\{\Phi(\{0\}) = 1\}$ が与えられたときの $X_0 = 0$ のマークである.

定理 1 において, $S_{-X_n}\Psi_n(\cdot) = \Psi(\cdot \cap V_{\Phi}(X_n))$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると命題 2 の (2) 式が得られます. すなわち, (3) 式は (2) 式の一般化であることがわかります.

3. クラスタ点過程への応用

新しいヌヴェーの交換公式がどのようにクラスタ点過程に応用されるのかを見てみましょう. クラスタ点過程は, 親過程と呼ばれる点過程のそれぞれの点の位置に子過程と呼ばれる別の (通常は点の数が有限の) 点過程を配置することによって構成され, 複数個の点からなるクラスタが多数存在している様子を表わすのに用いられます (図 2 を参照). ここでは定常ポアソン-ポアソン・クラスタ点過程と呼ばれるものを考えます.

3.1 定常ポアソン-ポアソン・クラスタ点過程

\mathbb{R}^d 上で定常なポアソン-ポアソン・クラスタ点過程は, 親過程 $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{X_n}$ を均質な (homogeneous) ポアソン点過程, 子過程 $\Psi_n = \sum_{k=1}^{\kappa_n} \delta_{Y_{n,k}}$ ($n = 1, 2, \dots$) を互いに独立で Φ とともに独立な有限ポアソン点過程として,

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} S_{-X_n}\Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\kappa_n} \delta_{X_n+Y_{n,k}}$$

によって与えられます. ここで, 親過程の強度 λ_{Φ} は正かつ有限の値をもち, 子過程の強度測度は $E[\Psi_n(B)] = \mu Q(B)$ ($B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $n = 1, 2, \dots$) によって与えられるものとします. ただし, μ は正かつ有限の値を

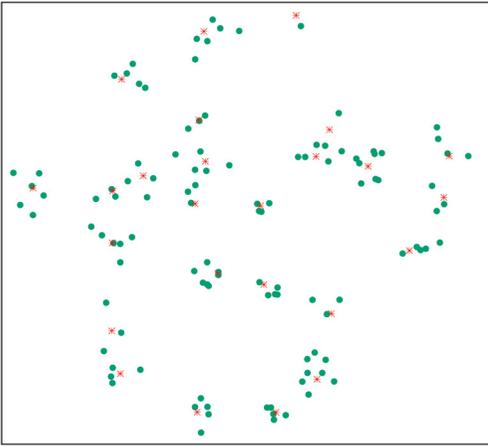


図2 2次元クラスタ点過程のサンプル (●がクラスタ点過程の点, *が親過程の点)

もち, Q は \mathbb{R}^d 上の確率分布です. このとき, 一つの子過程 Ψ_n がもつ点の数 κ_n は平均 μ のポアソン分布に従い, よって点過程 Ψ の強度は $\lambda_\Psi = \lambda_\Phi \mu$ です. また, 子過程のそれぞれの点は互いに独立に分布 Q に従って \mathbb{R}^d 上に置かれます. さらに, Ψ が単純となるために $Q(\{x\}) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^d$) を仮定します. クラスタ点過程 Ψ とその親過程 Φ との間に定理1の条件が成り立っていることに注意してください.

3.2 パルム版の母汎関数

\mathbb{R}^d 上の点過程 $\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Y_m}$ の母汎関数 \mathcal{G}_Ψ は, \mathbb{R}^d から $[0, 1]$ への関数 h に対して,

$$\mathcal{G}_\Psi(h) := \mathbb{E} \left[\prod_{m=1}^{\infty} h(Y_m) \right]$$

によって定義されます. 確率母関数が非負整数値をとる確率変数の分布を定めるのと同様に, 母汎関数は点過程の分布を定めます. \mathbb{R}^d 上の定常ポアソン-ポアソン・クラスタ点過程については, 次の結果を得ることができます.

命題3 (クラスタ点過程の母汎関数 [4])

Ψ を 3.1 節で定義した \mathbb{R}^d 上の定常ポアソン-ポアソン・クラスタ点過程とすると, \mathbb{R}^d から $[0, 1]$ への任意の関数 h に対して,

$$\mathcal{G}_\Psi(h) = \mathbb{E} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \tilde{h}(X_n) \right] = \mathcal{G}_\Phi(\tilde{h}) \quad (4)$$

が成り立つ. ここで,

$$\tilde{h}(x) = \exp \left(-\mu \int [1 - h(x+y)] Q(dy) \right),$$

$$\mathcal{G}_\Phi(\tilde{h}) = \exp \left(-\lambda_\Phi \int [1 - \tilde{h}(x)] dx \right)$$

である³.

命題3において, \mathcal{G}_Φ は親過程 Φ の母汎関数, $\tilde{h}(x)$ は親過程の一つの点が $x \in \mathbb{R}^d$ にあることが与えられたときその位置にシフトされた子過程の母汎関数を表わしています. 親過程 $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{X_n}$ が与えられたという条件のもとで, シフトされた子過程 $S_{-X_n} \Psi_n = \sum_{k=1}^{\kappa_n} \delta_{X_n + Y_{n,k}}$ ($n = 1, 2, \dots$) は互いに独立であることから (4) 式を導くことができます.

ここまではまだヌヴェーの交換公式を使っていません. 次に Ψ のパルム確率による母汎関数

$$\mathcal{G}_\Psi^0(h) := \mathbb{E}_\Psi^0 \left[\prod_{m=1}^{\infty} h(Y_m) \right]$$

を考えます. ただし, 事象 $\{\Psi(\{0\}) = 1\}$ において原点0に固定された点 Y_0 を除いています (定数 $h(0)$ をかけるかどうかだけの違いです). 定理1を用いると, 次の結果を示すことができます.

定理2 (パルム版の母汎関数 [5, 6])

Ψ を命題3と同じ \mathbb{R}^d 上の定常ポアソン-ポアソン・クラスタ点過程とすると, \mathbb{R}^d から $[0, 1]$ への任意の関数 h に対して,

$$\mathcal{G}_\Psi^0(h) = \mathcal{G}_\Psi(h) \int \tilde{h}(t) Q(-dt) \quad (5)$$

が成り立つ. ただし, $-B = \{-x \mid x \in B\}$ ($B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) である.

(5) 式の右辺は命題3の(4)式に $\int \tilde{h}(t) Q(-dt)$ をかけているだけです. $Q(-B)$ ($B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) は原点0に Ψ の点があることが与えられたときのその親点の位置の分布を表わすので, この積分項は, 原点に Ψ の点があることが与えられたとき, その親点の位置にシフトされた子過程の母汎関数を表わしています. よって, 定理2から次のことがわかります. すなわち, 定常ポアソン-ポアソン・クラスタ点過程 Ψ に対して, 原点0に子過程の点をもつような親点の位置に子過程をシフトして, それを元の Ψ の点配置に重ねることによって Ψ のパルム版 ($\{\Psi(\{0\}) = 1\}$ を条件付けたとき) の点配置を得ることができます. このことは, 親過程 Φ は

³ 以下, 特に断らない限り, 積分の領域は \mathbb{R}^d です.

ポアソン点過程なので任意の位置に新しく1点を加えても元の点配置の分布が変わらないこと (スリヴニャク (Slivnyak) の定理 [4]⁴), および子過程が互いに独立であることから説明することができます。

それでは, 定理 2 の証明にヌヴェーの交換公式がどのように用いられるのかを見てみましょう。子過程は (有限) ポアソン点過程なので, 親過程 Φ が与えられれば, Ψ は条件付き強度測度 $\mu \sum_{n=1}^{\infty} S_{-X_n} Q$ をもつ不均質なポアソン点過程です。ポアソン点過程のバルム分布は (バルム分布によって固定された点を除けば) 元の分布と変わらないことから (スリヴニャクの定理), (4) 式と同様に,

$$E_{\Psi}^0 \left[\prod_{m=1}^{\infty} h(Y_m) \mid \Phi \right] = \prod_{n=1}^{\infty} \tilde{h}(X_n)$$

が成り立ちます。この右辺に対して確率 \mathbf{P} について期待値を考えると命題 3 の (4) 式が得られるのですが, ここでは \mathbf{P}_{Ψ}^0 についての期待値を考えます。そして, ヌヴェーの交換公式 (3) を用いて \mathbf{P}_{Φ}^0 についての期待値に変換すると,

$$E_{\Psi}^0 \left[\prod_{n=1}^{\infty} \tilde{h}(X_n) \right] = \frac{1}{\mu} E_{\Phi}^0 \left[\sum_{k=1}^{K_0} \prod_{n=0}^{\infty} \tilde{h}(X_n - Y_{0,k}) \right]$$

が得られます。ここでの注意点として, 左辺では事象 $\{\Psi(\{0\}) = 1\}$ を条件付けていて, 原点 0 に Φ の点はないので $n = 1$ からの積であるのに対して, 右辺では $\{\Phi(\{0\}) = 1\}$ を条件付けており, $X_0 = 0$ の項を入れて $n = 0$ からの積になっています。ここからの手順は省略しますが, $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{X_n}$ が均質なポアソン点過程であることなどを用いて (5) 式を導くことができます (文献 [5] を参照⁵)。

4. 無線ネットワークへの応用

定理 1 を無線ネットワークの解析に応用してみましょう。この節では $d = 2$ であることを想定していますが, 理論上は (4.3 節の数値例以外は) $d \geq 2$ で成り立ちます。

4.1 端末間通信ネットワークのモデル

端末同士が基地局を介さないで直接通信を行う (device-to-device; D2D) 無線ネットワークのモデルを考えます。無数の端末が定常点過程 $\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Y_m}$ に従って \mathbb{R}^d 上に分布しており, それぞれの端末は各時

刻において, 互いに独立に確率 $p \in (0, 1)$ で送信モード, 確率 $1 - p$ で受信モードであるとします (ハーフデュプレックス/ランダムアクセス)。送信モードの端末は無線信号を送ることはできますが, 受け取ることはできません。逆に, 受信モードの端末は信号を受け取ることはできますが, 送ることはできません。送信モードの端末はすべて同じ出力 (1 に正規化) で送信を行い, 周波数帯域も同じである (よって無線電波が互いに干渉する) と仮定します。いま, 事象 $\{\Psi(\{0\}) = 1\}$ を条件付けて原点 0 にある端末に着目し, この端末が通信相手の端末から何らかのメッセージを受け取る状況を考えます。

送信モードの端末から送られる信号は距離に応じて弱くなり最終的に届かなくなりますが, これを経路損失関数 $\ell ((0, \infty) \rightarrow [0, \infty))$ によって表わします。ここで, 関数 ℓ は $\ell(r) \geq 0$ ($r > 0$) かつ $\int_{\epsilon}^{\infty} \ell(r) r^{d-1} dr < \infty$ ($\epsilon > 0$) を満たすものとします。また, 無線電波の反射/回折/共鳴などによる変動 (フェイディング/シャドウイング) を確率変数 H_m ($m = 1, 2, \dots$) によって表わします。すなわち, 送信モードの端末の位置を表わす点過程を $\Psi_{Tx} = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{Y'_m}$ とすると, H_m は位置 Y'_m にある端末から送られる信号の強さの変動を表わし, ここでは互いに独立に平均 1 の指数分布に従うと仮定します (レイリーフェイディングといいます)。このとき, 位置 Y'_m にある送信モードの端末から送られる信号が原点 0 に届くときの信号の強さは $H_m \ell(\|Y'_m\|)$ と表わされます。いま仮に, 原点 0 にある受信モードの端末が位置 Y'_m にある送信モードの端末と通信を行っているとする, そのメッセージを受け取ることができるかどうかは信号対干渉雑音比 (signal-to-interference-plus-noise ratio; SINR)

$$\text{SINR}_m = \frac{H_m \ell(\|Y'_m\|)}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{\infty} H_j \ell(\|Y'_j\|) + N}$$

によって評価されます。ここで, 右辺分母の N は原点でのノイズを表わす定数であり, $\sum_{j=1, j \neq m}^{\infty} H_j \ell(\|Y'_j\|)$ は通信相手以外の送信モード端末から届く干渉信号の強さを表わします。すなわち, ある与えられたしきい値 $\theta (> 0)$ より SINR が大きければ, 通信相手からのメッセージを無事に受け取ることができるというわけです。

4.2 被覆確率

受信モードの端末は最も近い送信モードの端末と通信を行うと仮定しましょう。このとき, 原点 0 にある端末が通信相手からのメッセージを受け取ることがで

⁴ 1次元での PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) に対応します。

⁵ 文献 [6] にも別証明があります。

きる確率は,

$$\text{CP}(\theta) = (1-p) \sum_{m=1}^{\infty} P_{\Psi}^0(\text{SINR}_m > \theta, \|Y'_m\| \leq \|Y'_j\|, j=1, 2, \dots)$$

と表わされます。これを被覆確率 (coverage probability) と呼びます。ここで、右辺の最初の $(1-p)$ は原点にある端末が受信モードである確率を表わし、その次の $\sum_{m=1}^{\infty} P_{\Psi}^0(\cdot)$ では、どの送信モード端末が通信相手なのかを場合分けすることによって、SINR がしきい値 θ を超える確率を考えています。

さて、端末の位置を表わす点過程 Ψ が 3 節で考えた定常ポアソン-ポアソン・クラスタ点過程であるとします。このとき、送信モードの端末の位置を表わす点過程 Ψ_{Tx} もまた定常ポアソン-ポアソン・クラスタ点過程であり、その親過程 $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{X_n}$ はそのまま強度 $\lambda_{\Phi} \in (0, \infty)$ の均質なポアソン点過程、子過程 $\Psi'_n = \sum_{k=1}^{N'_n} \delta_{Y'_{n,k}}$ ($n=1, 2, \dots$) は強度測度 $p\mu Q$ の有限ポアソン点過程となります。そして、定理 1 を用いて次の結果を示すことができます。

定理 3 (端末間通信の被覆確率 [5])

上で述べた端末間通信ネットワークのモデルに対して、

$$\text{CP}(\theta) = (1-p) \int (I_{1,\theta}(t) + I_{2,\theta}(t)) Q(-dt) \quad (6)$$

が成り立つ。ただし、

$$\begin{aligned} I_{1,\theta}(t) &= p\mu \int e^{-\theta N/\ell(\|y\|)} C_{\theta}(y, t) \\ &\quad \times E_{\theta}(y) Q(dy - t), \\ I_{2,\theta}(t) &= \lambda_{\Phi} p\mu \iint e^{-\theta N/\ell(\|y\|)} C_{\theta}(y, t) \\ &\quad \times C_{\theta}(y, x) E_{\theta}(y) Q(dy - x) dx, \\ E_{\theta}(y) &= \exp\left(-\lambda_{\Phi} \int [1 - C_{\theta}(y, w)] dw\right), \\ C_{\theta}(y, x) &= \exp\left(-p\mu \left[1 - \int_{\|z\| > \|y\|} \left(1 + \theta \frac{\ell(\|z\|)}{\ell(\|y\|)}\right)^{-1} Q(dz - x)\right]\right) \end{aligned}$$

である。

目を覆いたくなるような式が出てきてしまいましたが、我慢して定理 3 に現れる式の中身を覗いてみましょう。まず (6) 式の $Q(-dt)$ は、3.2 節でも述べたとおり、原点 0 にある Ψ の点の親点の位置の分布を表わします。よって、 $I_{1,\theta}(t)$ 、 $I_{2,\theta}(t)$ において、変数

$t \in \mathbb{R}^d$ は原点にある Ψ の点の親点の位置を表わしています。そして、 $I_{1,\theta}(t)$ は原点にある端末の通信相手の位置が同じ子過程に属する点の場合、 $I_{2,\theta}(t)$ は通信相手の位置が異なる子過程の点である場合にそれぞれ対応します。すなわち、これらの式において原点にある端末の通信相手の位置は変数 y で表わされており、その親点の位置は $I_{1,\theta}(t)$ では t 、 $I_{2,\theta}(t)$ では x です。また $E_{\theta}(y)$ は、原点の端末が属するものでも通信相手が属するものでもない、ほかのすべての子過程からの影響を表わし、 $C_{\theta}(y, x)$ は位置 x に親点をもつ子過程からの影響を表わしています。

では、ヌヴェーの交換公式がどのように用いられているのかを見るために、定理 3 の証明の手順を追ってみましょう。3.2 節と同様に、親過程 Φ が与えられれば、送信モードの端末の位置を表わす点過程 Ψ_{Tx} は条件付き強度測度 $p\mu \sum_{n=1}^{\infty} S_{-X_n} Q$ をもつ不均質なポアソン点過程です。送信端末がポアソン点過程に従う場合の被覆確率は既に知られていますので (文献 [2] を参照)、同様の議論を用いることによって、親過程 Φ が与えられたときの条件付き被覆確率を得ることができます。そして、事象 $\{\Psi(\{0\}) = 1\}$ を条件付けていることから P_{Ψ}^0 についての期待値によって条件を外し、ここでヌヴェーの交換公式を用いて P_{Ψ}^0 についての期待値に変換します。あとは Φ が均質なポアソン点過程であることなどを用いて (6) 式を導くことができます。

4.3 数値計算結果

定理 3 で得られた結果を実際に計算してみましょう。ここでは $d=2$ として、子過程の点の位置の分布 Q を $Q(dx) = f_{\sigma}(\|x\|) dx$ かつ $f_{\sigma}(s) = e^{-s^2/(2\sigma^2)}/(2\pi\sigma^2)$ と定めています。すなわち、子過程の点は互いに独立にそれぞれ分散 σ^2 をもつ点対称な正規分布に従って親点のまわりに置かれます。こうして得られるポアソン-ポアソン・クラスタ点過程はトーマス (Thomas) 点過程と呼ばれます。そして、 $\lambda_{\Phi} = \pi^{-1}$ 、 $\mu = 10$ 、 $p = 0.5$ 、 $\ell(r) = r^{-4}$ 、 $N = 0$ として計算した結果が図 3 です。比較のため、端末の位置が均質なポアソン点過程に従う場合 ($\sigma^2 \rightarrow \infty$) の結果も載せています。

図 3 から、子過程の点配置の分散 σ^2 が小さいほど被覆確率が大きく、 σ^2 が大きくなるにつれてポアソン点過程の場合に近づく様子が見られます。これは、受信端末の位置が送信端末と同じクラスタ点過程の点であるからで、同じようにクラスタ点過程を用いて表わされるモデルでも、受信端末の位置が送信端末の位置を表わす点過程と独立な場合は反対に σ^2 の値が小さいほど被覆確率は小さくなります (文献 [7] を参照)。

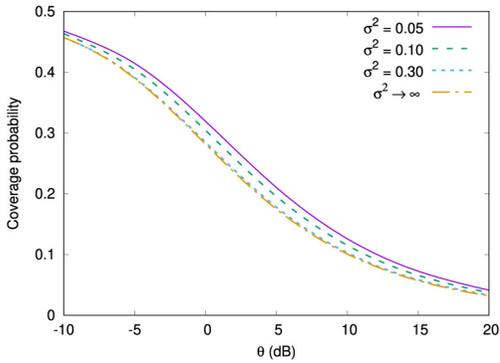


図3 被覆確率の数値計算結果 ($x \text{ dB} = 10^{x/10}$)

このことは、受信端末と送信端末が同じクラス点過程の点である場合は受信端末の近くに通信相手がいるのに対して、受信端末の位置が送信端末の位置を表す点過程と独立な場合は受信端末と通信相手が離れてしまっているからと考えられます。

5. おわりに

多次元空間上で同時に定常な二つの点過程の間に成立するヌザーの交換公式の一般化とそのクラス点過程への応用、さらに無線ネットワークへの応用について解説しました。少し難しかったかもしれませんが、この拙文を通して点過程やパルム解析に興味をもつ人が一人でもいれば幸いです。

謝辞 本稿は 2021 年度日本 OR 学会関西支部シンポジウム (2021 年 12 月 11 日 (土)) での講演内容を基にしています。シンポジウムでは、北條仁志氏 (大阪公立大学) をはじめ関西支部の方々へたいへんお世話になりました。久しぶりの対面での講演を楽しむことができました。講演の機会を与えていただいたことに感謝します。

参考文献

- [1] 三好直人, “待ち行列への点過程アプローチ: 入門編,” オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, **59**, pp. 212–218, 2014.
- [2] 三好直人, “セルラネットワークの空間点過程モデル,” オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, **59**, pp. 678–683, 2014.
- [3] F. Baccelli and P. Brémaud, *Elements of Queueing Theory, 2nd Ed.*, Springer, 2003.
- [4] F. Baccelli, B. Błaszczyszyn and M. Karray, *Random Measures, Point Processes, and Stochastic Geometry*, Inria, hal-02460214, 2020. <https://hal.inria.fr/hal-02460214> (2022 年 1 月 29 日閲覧)
- [5] N. Miyoshi, “Neveu’s exchange formula for analysis of wireless networks with hotspot clusters,” *arXiv*, arXiv:2203.00943 [math.PR], 2022.
- [6] R. K. Ganti and M. Haenggi, “Interference and outage in clustered wireless ad hoc networks,” *IEEE Transactions on Information Theory*, **55**, pp. 4067–4086, 2009.
- [7] N. Miyoshi, “Downlink coverage probability in cellular networks with Poisson-Poisson cluster deployed base stations,” *IEEE Wireless Communications Letters*, **8**, pp. 5–8, 2019.