連載

世界をORする視線 (14) 第I部　通信・デジタル技術の発展 (3) コンピュータの発展：コンピュータ科学の数学的基礎（続き1）

住田　潮

（註：本稿は前回からの続きであるので，文献リストは継続し，新たに必要となる分を追加する）

1. 幾何学と代数の結合からブール代数へ

まず，前回から今回への道筋を，簡単に辿ることにしよう．コンピュータの実現に向かう〈第1の難関〉は，「アルゴリズムで明示されている論理を，機械的な操作の連鎖として表現できるような言語に翻訳すること」である．このテーマに先鞭を付けたのは，ユークリッドを源とするギリシア幾何学に代数的表現を与えることを試み，幾何学的な比例の概念は代数方程式の解として表現されることを示したフランソワ・ビエト (Francois Viéte) [6] である．しかし，彼もまた，1次元は長さ，2次元は面積，3次元は体積であるという次元のくびきからは解放されておらず，係数を導入して次元を揃えることにより，多次元方程式における次元の整合性を回復した．

ビエトの業績をさらに発展させ，より抽象的に高度な水準で代数学と幾何学を統合したのがルネ・デカルト (René Descartes) [7, 8] であった．「幾何学は現実と対応しなければならず，代数学もそれに従属する」という固定概念を打破し，豊かな抽象数学への扉を開いたのである．デカルトはまた，さらに一歩進んで，一般的な論理を記述する記号論理学の可能性を視野に捉えていたが，自ら深く追求することをしなかった．

このテーマをさらに追求したのがゴットフリート・ウィルヘルム・ライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz) [29] である．推論を代数計算のように単純で機械的な作業に置き換える形式言語を構想し，そこでは2進法が重要な働きをするであろうことにも気付いていたが，具体的な体系を構築するまでには至らなかった．

アルゴリズム実行の機械化へ向けて〈第1の難関〉の突破口を切り拓いたのはジョージ・ブール (George Boole) [9–11] である．ライプニッツの時代から140年を超える時を経て，1848年に『論理学の数学的分析 (Mathematical Analysis of Logic)』，それからさらに6年後の1854年に『論理と確率の数学的基礎をなす思考法則の研究 (An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities)』（以下，『思考法則の研究』）を発表し，今日，ブール代数と呼ばれる体系を確立した．

2. 逆境における独学：幼少年期のブール

ブールは1815年11月2日，イングランド東部のリンカーンという町で生まれた．父親は靴職人で小売商を営んでおり，その後，2人の妹と弟が生まれ，ブールは4人の兄弟姉妹の長男として幼少期を過ごした．父親は商売が下手で貧しかったが，優しく信仰心に篤い人であった．数学と光学装置の制作に強い関心をもっており，幼少期のブールは父の傍らで光学装置の工作を手伝うことを好んだ．父親は，ある日，望遠鏡を完成させると，店のショーウインドウに，

「神の御業を畏敬の念をもって御覧になりたい方は，どなたでも御来店下さい．当店の望遠鏡で覗いていただけます．」

という張り紙を出したという逸話が残されている．また，ブールが後に授かる5人の娘の次女の息子で，自身も高名な数理学者となり王立協会の会員にもなった孫が，

「祖母（ブールの妻）から，ブールの父親が自作の望

すみた　うしお
筑波大学名誉教授
〒305–8573 茨城県つくば市天王台1–1–1

遠鏡を入れるために作った箱を貰ったが，その箱の内側に，『お義父さんは，店の経営という本来の仕事以外は何でも上手くできたみたい』という祖母の手書きのメモが貼ってあった.」

と書き残している.

父親は，限られた収入をやり繰りして，子供たちに精一杯の教育を施した．特にブールには，光学の研究で多いに役立った幾何学と三角法を自ら教え込んだ．しかし，7 歳になって小学校へ入学することになったブール少年の頭には，また異なる思いがあったようである．当時のイギリスでは，貧しい小売商は下層階級に属し，そこを出自とする子どもたちは，工場の支配人や葡萄酒商人や金貸しなどの上層階級に対し，厳しい“従順の限界”を決して超えないように生きて行くことが，当然のことと見なされていた．産業革命の勃興期のこのような社会的雰囲気の中で，上層階級に属する紳士の証は，ラテン語とギリシア語の古典を知ることであった．ブールが入学できるような小学校は，貧乏人の子どもを，その一生洗い落とせない身分に縛り付けることを目的として設立されており，もちろん，ラテン語やギリシア語など教えてはくれなかった．「神が与え給うた」境遇より上の地位を目指すことを決意したブール少年は，有産階級による下層階級の支配を可能にしたのはそうした知的修養であると思い込み，独学でラテン語とギリシア語の修得に取り組み始めた．父親はラテン語を全く知らなかったが，むろん，息子のために出世の扉を開ける手助けをすることにやぶさかではなく，本屋を経営する自分の友人に助けを求めた．この善良な男は，少年にラテン語基礎文法の初めのところを教えることができたが，そこから先は，ブールは独りで学ばなければならなかった.

12 歳になったブールは，古代ローマ時代の南イタリアの詩人クィントゥス・ホラティウス・フラックス (Quintus Horatius Flaccus) のラテン語で書かれた詩を英訳できるまでになっていた．息子を誇りに思った父親は，その翻訳詩を地方新聞に投稿したところ採用され，その新聞に掲載されたのである．しかし，ある古典学者が 12 歳の少年にこんな翻訳ができるわけがないから剽窃に違いないと主張したり，また別の専門家が翻訳技巧の点で誤りを指摘し，それが学術論争を引き起こしたりと，かなりの話題を呼ぶこととなった．ブールはその騒ぎを傍観しつつも誇らしく思い，指摘された誤りを恥ずかしいと受け止め，さらに学習を深めようと決意する．ラテン語，ギリシア語に加えて，件の本屋を経営する父親の友人から本を借りてフランス語，ドイツ語，イタリア語もこつこつと学んだ．下層階級を脱する手段として牧師になって成功することを考え，その準備として密かに語学の修得に励んだのである．父親から初歩的な数学の手ほどきを受けたものの，ブールは自分の野心に夢中で，古典こそが上層階級への扉を開くと固く思い込んでいた.

普通コースを終えると商業コースへ進み，そこで学ぶべきものはたちまちのうちに吸収した．ブールの死後，その頃の級友の 1 人が回想を書き残している.

「ジョージは，わたしたちの学年どころか，どんな学年をも超えていた．学校には，かなう生徒はいなかったし，多分，教えるのが仕事の先生もかなわなかったのではないか．ジョージ・ブールは身近にいる神童で，私たちは，一流のスターみたいに尊敬していた.」

神童は，「二十歳過ぎればただの人」が通説であるが，ブールは，短い生涯でありながら，幼少期の友人たちの予想を遙かに凌駕する実績を上げ，神童が神童の領域を超える例外となった.

3. 経済的自立と研究者への扉：青年期のブール

1831 年，16 歳のとき，困窮した両親の面倒を見る必要に迫られたブールは学校を辞め，リンカーンから 60 km 離れたドンカスターにあるメソジスト派の小さな寄宿小学校 (Heigham’s School) で，ラテン語と数学の助教師になった．ブールの時代には助教師に給料は支払われず，労賃を受け取るのみで，両親の扶助と自身の生存に必要なささやかな消費を支えるのがやっとの状態であった．社会的に無価値な存在から抜け出すことに拘ったブールは，自分の財力で手の届く紳士らしい職業として，今まで密かに準備してきた語学力を活かし，いよいよ牧師になって成功しようという思いを固めた.

その一方で，小学校の助教師として，ブールは落ち着いた 2 年間を過ごすことになる．生徒たちが寝入った後の凍てつくような夜，そこには自分だけの時間があった．特筆すべきは，語学の修得が水準に達したことから，独学の関心が数学へと切り替わったことである．夜の時間を使って，ラクロウの『微分学』，ラグランジュの『関数解析』や『解析力学』，ラプラスの『天体力学論』，ニュートンの『プリンシピア（自然哲学の数学的原理)』（以下，『プリンシピア』)，ポアソンの『力学論』などを読みこなせるまでになった．これがいかに困難な修業であったかは，想像に難くない．たとえば，ラグランジュの『解析力学』は極めて抽象的で，

最初から終りまで図解が全くなく，ラプラスの『天体力学論』は，「容易に見て取れることであるが，…」という決まり文句で数学的推論の詳細を飛ばしてしまうことで有名であった．父親から受けた幾何学と三角法に関する初等的な手ほどきのみを出発点として，講師が指導する授業もなく，語り合う友人もない環境の中，意思の力で理解するまで何度も何度も読み返すことを通して，16 歳から 17 歳の 2 年間に，上記の本のすべてを読破した事実は驚嘆に値する．

ブールの牧師になるという目論見は，宗派の問題から頓挫する．ブールは語学や数学以外にも幅広く本を読んでおり，ほかの文化についても学ぶことを通して，伝統的なキリスト教の教えに疑問を抱くようになった．キリスト教正統派教義の中心である三位一体（父と子と聖霊）の教理を否定し，神の唯一性を強調する教義を掲げるユニタリアンとなっていたのである．特に，イエス・キリストを宗教指導者としては認めつつも，その神としての超越性は否定する点で，プロテスタント系の大教派であるメソジスト派とは相容れるはずもなかった．父兄からの排斥の声に押された校長は，自分の主任助手はメソジスト派であることが望ましいと決断し，ブールはこの職を失うこととなった．

1833 年，ドンカスターで失職した後は，老いた両親の住むリンカーンまで 4 マイルの近さにあるウォディトン村で，やはり小学校 (Hall's Academy) の教師となった．しかし，両親がブールに頼る度合が増し，この近距離も負担になってきたので，2 年計画でリンカーンに戻り，自分の学校を開く決意をする．また，幸運にも，1833 年に労働者に成人教育を提供する「機械学院 (Mechanics Institute)」がリンカーンに設立され，翌年，父親が学院の管理人を任せられることになった．院長は地元の地主で，学院の読書室には王立協会の刊行物が置かれていた．父親が管理人となったことで，この数学の宝庫である読書室に自由に出入りできるようになったブールの数学研究は，飛躍的に加速した．

1835 年，19 歳になったブールは計画どおりリンカーンに戻り，自分の教養学校を開く一方，機械学院の読書室に通って数学の研究を継続した．最初に執筆した論文は，ニュートンの『プリンシピア』に関する研究であった．この論文は地元リンカーンでは評判を呼び，1835 年，この学院がニュートンの胸像を設立した際に除幕式で講演を頼まれたほどで，講演内容はすぐに『サー・アイザック・ニュートンの天才と発見について (On the Genius and Discoveries of Sir Isaac Newton)』というタイトルの小冊子として刊行された．

リンカーンでのこの暮らしは 1839 年まで続いたが，ウォディトン村の小学校の校長ロバート・ホール (Robert Hall) が亡くなり，村当局がブールに後任となるよう求めてきた．これを受けたブールは，家族全員を連れてウォディトンに引っ越し，これにより，ブールの財政状況は大きく改善された．2 年後の 1840 年夏にはリンカーンの地所を買い戻すことができ，再び一家でリンカーンに戻り自身の寄宿学校を設立，そこに 9 年間とどまることになった．

このウォディトン村とリンカーンの間を行ったり来たりしている間にも，ブールは数学の研究を精力的に継続した．取り組んだテーマはラグランジュの業績の拡張で，1838 年，変分法に関して自身の定理を含むものとしては最初の論文を纏めた．続いて 2 本目の論文として，方程式の不変式に関する論文『解析的変換理論の研究とその一般 2 次方程式の次元縮小への応用 (Researches in the Theory of Analytical Transformations, with a Special Application to the Reduction of the General Equation of the Second Order)』を執筆した．ブールのこの発見は小さなものであったが，その後，ほかの研究者による研究の継続的発展が数学や物理学への大きな貢献を産み出したことを考えると，重要な内容を含んでいたといえよう．

もう少し具体的に見ると，2 次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ の判別式は，b^2-ac となることが知られている．ここで変数 x を 1 次分数変換 $y=(px+q)/(rx+s)$ で置き換えてできる 2 次方程式を $Ax^2+2Bx+C=0$ とすると，その判別式は

$$B^2-AC=(ps-qr)^2(b^2-ac)$$

となる．すなわち，変換後の方程式の判別式は，変換前の判別式に 1 次分数変換の係数 p, q, r, s のみで表わされる因数を掛けたものに等しい．これが，ある操作を施した後にも，ある性質が不変な形で残ることの具体例である．ブールは，この 2 次方程式に関する不変性は，一般的な方程式の判別式でも成立するのではないかと推察した．さらに拡張して考え，一般的な方程式に同様の 1 次分数変換を施した際に，判別式以外の不変式は存在するかという問題を考察した．2 本目の論文で，ブールは，一般的な方程式に 1 次分数変換を施しても判別式は不変性を保つことを証明し，さらに，一般 4 次方程式に関する判別式以外の二つの不変式を見出している．

このブールの業績を最初に一般化したのが，ドイツの数学者フェルディナント・ゴットホルト・マック

ス・アイゼンシュタイン (Ferdinand Gotthold Max Eisenstein) である．一般的な変数 x の方程式に対し，変数 x と係数を含むある種の変換を施すと，もとの方程式から作られた式と，変換後の式から同様に作られた式は，変換に用いられた係数のみに依存する因数しか違わない，そのような変換が存在することを証明したのである．しかし，ブールもアイゼンシュタインも，そのような不変式を見出すための一般的な方法論を確立することはできなかった．この問題に対し，同様の不変性をもつすべての形式を与える方法とは何かという問題を立て，代数学上の不変式論の理論的基礎を確立したのが，イギリスの 2 人の数学者アーサー・ケイリー (Arthur Cayley) とジェームス・ジョセフ・シルベスター (James Joseph Sylvester) である．

この 2 人の仕事の重要性は，たとえば，次のような例を考えることで容易に理解できる [9]．一枚のゴム板の上に書かれた任意の図形を考え，ゴム板を引き裂かないように注意しながら，伸ばしたり縮めたり捻ったりと，複雑に変形させる．このとき，変形後も保たれる元の図形の不変的な性質とは何か，という問いを検討して見よう．図形のもつ面積，角度，長さなどは変化してしまうことは明らかである．しかし，図形を形作る曲線上の点の順序は不変である．すなわち，元の図形の曲線上にある点 A から点 B までを鉛筆でなぞるとすると，変形後の図形でも，点 A から点 B へ，同じ点を同じ順序でなぞることになる．この不変性は，紙に書かれた図形をしわくちゃに丸めた場合でも成立する．この例に見られるような特定の変換の不変性に代数的表現を与え，構造化したことは大きな成果であり，これが曲面上の幾何学であるリーマン幾何学，さらに，それを駆使したアインシュタインの一般相対性理論へと繋がっていくのである．ブールは，自身でその重要性を充分に理解できていなかったとはいえ，数学の豊かな新分野へと繋がる扉を，最初に開いたのである．不変性に関しては，向井 [32] に丁寧な解説があり，この問題に関するブールの業績についても言及しているので，是非，一読することをお勧めする．

ブールの時代には，機関誌や会誌を定期的に発行している学会の会員でないと，論文を発表する機会を見出すことは極めて困難であった．ブールにとって幸運なことに，1837 年，ブールより 3 歳年上のスコットランドの若き数学者ダンカン・ファーカーソン・グレゴリー (Duncan Farquharson Gregory) が，『ケンブリッジ数学ジャーナル (Cambridge Mathematical Journal)』を創刊した．新規のジャーナルらしく，学界の伝統から大きく外れるような異論であっても積極的に受け入れる方針を示しており，これがブールを惹きつけた．

この雑誌へのブールの最初の投稿論文は，前述した代数の不変性に関する論文であった．グレゴリーは，医学教授を父にもつ名門の出で，エジンバラ大学で学んだ後，ニュートンも在籍していたケンブリッジ大学のトリニティ・カレッジを第 5 位優等で卒業したエリートであった．しかし，グレゴリーは出自を鼻に掛けることもなく，直ちにブールの才能を直覚し，最初の投稿論文の欠陥を指摘し，どのように読みやすい文章を書くかについても丁寧に指導した．グレゴリーからブールへの 1839 年 11 月 4 日付の手紙には，次のように記されている．

> 「こちらでお会いしたとき，先生は変分法の研究について話され，それも発表したいとのことでした．まだそのようにお考えなら，喜んで小誌にその場を提供いたします．」

明らかに，ブールは自らトリニティ・カレッジまで出向き，グレゴリー本人から直接，アドバイスを得ていたことが見て取れる．1840 年 2 月，ブールの不変性に関する論文は活字になって掲載され，その 3 ヶ月後には最初に書かれた変分法に関する論文も同誌に掲載された．これをきっかけに，ブールはグレゴリーの学術誌に多くの論文を発表するようになる．

学歴もなく，研究者として社会的な場をもつことができなかったブールは，グレゴリーと，彼によって新規に発行されたジャーナルとの出会いがなかったならば，イギリスの片田舎に埋もれたままの生涯を送ったかも知れない．これもまた，「世界は半分だけ向こう側からやって来る」という技術革新の法則 (15)（連載第 12 回）の典型的な事例であるといえよう．

ケンブリッジ大学が出版する学術誌に論文を掲載したブールは 24 歳になっていたが，自然とケンブリッジ大学に入学し，学位を得たいと思うようになった．相談を受けたグレゴリーは，その困難さを率直に指摘した．ブールにとっての最大の障害は費用で，グレゴリーは，トリニティでの年間当たりの出費は少なくとも 200 ポンドに上ると告げたのである．1840 年当時の 200 ポンドは，英国銀行総裁の年収の半分に相当する．ケンブリッジに行くためには，自分の学校を閉めなければならず，両親姉妹を養うのが自分しかいないとなると，それはもう無理であり，ブールはケンブリッジ入学を諦めざるを得なかった．

4. 研究者としての自立：壮年期のブール

リンカーンに腰を据え，自ら設立した学校で子どもたちに教えながら数学の研究に取り組んだブールは，その成果を執筆し発表することにエネルギッシュに邁進した．この時期の重要な論文の一つとして，『解析の一般的な方法 (On a General Method in Analysis)』を挙げることができる．この論文は 1843 年に執筆されたもので，微分方程式と差分方程式の両方を解くために，記号代数を用いた方法論を提唱している．

数やその他の実体を意味づけることによって得られる応用可能性の一切を度外視し，代数学を，一連の公理系の抽象的発展の結果として得られる代数学そのものとして捉える道を拓いたのはデカルトである（連載第 13 回）．その後，ジョン・ハーシェル，ジョージ・ピーコック，チャールズ・バベッジのケンブリッジ三羽烏が，現代的な代数学の概念の確立に向けて，さらに研究を推し進めた (連載第 8 回)．特にピーコックは,「算術的代数 (Arithmetical Algebra)」を一般的記号に普遍化するものとして「記号的代数 (Symbolical Algebra)」の概念を導入し,「算術的代数で成立するものは，記号的代数でも成立する」という「同等形式の不変原理 (the Principle of the Permanence of Equivalent Form)」を確立した．

ブールの前掲論文もこの延長線上にあるもので，微分 d/dx や差分 Δ の操作を，数のように扱える演算子として把握する記号代数的な方法論を提示したのである．当初，ブールはこの論文もグレゴリーのジャーナルに投稿したが，この論文の長さはそれだけで 1 冊を占めてしまうほどで，1843 年 6 月，グレゴリーはブールに，原稿は同誌にとって長すぎると最後通告を書き送っている．しかし，同時に，彼は自身でもハーシェル，ピーコック，バベッジの初期の研究を拡張した微分積分学の演算過程に関する論文を 1841 年に発表しており，ブールの草稿の内容がロンドンの『王立協会紀要』に掲載されてもおかしくないと判断，自ら王立協会へブールの論文を推薦した．王立協会では若干の論争を経て採用を決定，1844 年，この論文は『王立協会紀要』に掲載された．

この論文は，ブールにとって 2 重の意味で重要であった．一つは,「演算を数として扱える記号として捉える」というブール代数の確立へ繋がる思想を，代数学の分野で先行的に実現できたことである．二つめの重要性は，1844 年 11 月，王立協会がこの論文を 1841 年 6 月〜1844 年 6 月の間に『王立協会紀要』に掲載された数学論文の最優秀論文として選出し，ヴィクトリア女王の賛同で設けられたロイヤル・メダルを授与したことである．この受賞が，それ以後，学歴や学閥をもたないブールの研究者としての自立を大いに助けたことは言うまでもない．

残念なことに，推薦人となったグレゴリーは，ブールのこの晴れ舞台を目にすることはなかった．これに数ヶ月先立つ 1844 年 2 月，病に斃れ 30 歳の若さで早世していたのである．ブールはその恩を忘れず，受賞した論文の脚注に次のように書き残している．

「これほど短い生涯に，これほど学問に貢献した人間は少ない．氏の数学者としての功績を称える私の気持ちには，私の以前の論文に対して与えられた貴重な支援に対する感謝の気持ちが, 深く刻まれている.」

もし，ブールの論文執筆が数ヶ月，遅れていたら，グレゴリーによる王立協会への推薦は行われておらず，ロイヤル・メダルを受賞することもなく，ブールの生涯は異なるものになっていたかも知れない．確かに，世界は半分だけ向こう側からやってくるのであり，自分の側から残りの半分を出て行かない限り，その機会は目の前を通り過ぎてしまうのである．

5. ブール代数への扉

グレゴリー亡き後，立派な業績とロイヤル・メダルに支えられてブールは自立を果たした．重要な数学研究者として頭角を現し，絶えることなく研究論文を発表し続けた．特に，記号代数に対する関心を純粋に数学的なものから論理学へと拡張し，1847 年の末には『論理学の数学的分析 (The Mathematical Analysis of Logic)』という小冊子を発表した．この小冊子刊行の裏には，次に述べるような興味深いエピソードが残されている．

ブールの時代には，2 人の有名なハミルトンがいた．1 人は，アイルランドの数学者かつ物理学者のウィリアム・ローワン・ハミルトン (William Rowan Hamilton) である．数学の光学への応用で多くの発見を導き，解析力学の分野においてはハミルトニアンを確立，これは後に量子力学にも大きな影響を与えた．さらに，複素数を三次元以上に一般化することに心血を注ぎ，四元数と呼ばれる高次複素数を発見したことでも有名である．

もう 1 人のハミルトンは，スコットランドの哲学者ウィリアム・ハミルトン (William Hamilton) である．スコットランドの法廷弁護士として働き，大学の官職につく候補にも上ったことがあるが，あまり恵まれな

かった．それでもこの雄弁な哲学者は，ついにエジンバラ大学で論理学と形而上学の教授になった．一方のハミルトンは独創的な数学者として既に名声を確立しており，哲学者のハミルトンは常に「もう一方のハミルトン」と呼ばれた．なお腹立たしかったことには，哲学者ハミルトンの少なからぬ読者が，高名な数学者ハミルトンと混同して接触してくることであった．この怨念にも似た思いが,「何でも知っていると思い込むことが自分の弱点となる」ことに気付かない哲学者ハミルトンに,「数学がどんなに無価値なものであるかを世間に吹聴することは自分の責務である」と信じ込ませた．

歴史上，数学は何度も攻撃を受けてきたが，哲学者ハミルトンの攻撃は，その中でも最も激しいものの一つであった．たとえば，1960 年代半ばに開かれたアメリカの全国教育者協会の会合で，ある狂信的な教育学者が多くの聴衆を前にして，ハミルトンの数学非難を長々と引用したとき，大きな拍手喝采が起こったという．公平を期するため，ハミルトンの数学非難の主なものを，列挙してみる [9].

- 数学は，精神を凍らせ萎びさせる
- 数学をやり過ぎると，必ずと言ってよいほど，哲学的思索や人生が必要とする知力が枯渇してしまう
- 数学は，論理的思考の習慣を生み出すようなものではない
- 数学では，愚鈍な者が有能となり，有能な者は無視される
- 数学は，精神を歪めることはあっても，決して向上させはしない

本格的に数学を学んだことのない人間の数学に対する攻撃として，極めて興味深い．

論理学においては，ブールに先行して道を拓いたインド生まれのイギリス人数学者オーガスタス・ド・モルガン (Augustus de Morgan) の名が，既に知られていた．真か偽かのどちらかの値を取る命題 P と Q が与えられたとき，それぞれの否定を $\neg P$ と $\neg Q$ で表わす．また，両方の命題が真のときのみ真の値を得る命題を連言，少なくともどちらか一方の命題が真であれば真の値を得る命題を選言と呼び，前者を $P \bigwedge Q$，後者を $P \bigvee Q$ と書く．よく知られたド・モルガンの法則は，論理式で書くと，

$$\neg(P \bigvee Q) = \neg P \bigwedge \neg Q; \neg(P \bigwedge Q) = \neg P \bigvee \neg Q$$

と表わされる．「真と偽を入れ替え，連言と選言を入れ替えた論理体系は，元の論理体系と同一視できる」ことを示しており，ド・モルガンの双対性 (De Morgan's duality) と呼ばれることもある．

さて哲学者ハミルトンは，ド・モルガンに対し，今となっては馬鹿げたとしか言いようのない論争を挑んだのである．この論争は，ハミルトンが「ド・モルガンの法則は既に自分の論文に示されており，ド・モルガンは剽窃した」と公然と非難を加えたことから始まった．ド・モルガンはこれを陽気な浮かれ騒ぎと一蹴していたが，ハミルトンは癇癪を起こし，執拗であった．当時，既にド・モルガンに畏敬の念を抱き親友でもあったブールは，ド・モルガンが正しくハミルトンが間違っていることを理解していたので，前掲の『論理学の数学的分析』を小冊子として出版し，論争に決着を付けたのである．ド・モルガンが，ブールに対して篤い敬愛の念を抱いたのはもちろんである．ブールはすぐに小冊子の手直し作業に掛かり，翌年の 1848 年，論文の形に書き直されたものが『ケンブリッジ・ダブリン数学ジャーナル』（『ケンブリッジ数学ジャーナル』から改名）に掲載された．この論文こそが，7 年後に登場する傑作『思考法則の研究』の 1 次草稿とも呼べるものであった．

6. ブール代数の確立

1849 年は，ブールにとって記念すべき年となった．アイルランドのコークに新設されたクイーンズ・カレッジ（Queen's College：今日の University College Cork）の数学教授の募集に応募し，採用されたのである．学歴がないにもかかわらず，業績のみによって，ブールは 34 歳にしてついに大学教授となった．年俸は 250 ポンドで，それに追加して，学生 1 人当たり 1 学期につき 2 ポンドの手当が付いた．ヴィクトリア時代のイギリス社会は厳格な階級制度に支えられており，親から引き継いだ財産と複雑に絡み合う一族間の人的ネットワークの縛りには強固なものがあり，ブールの教授就任は，能力のみでこの慣習を打ち破った例外中の例外であった．残念なことに，父親は前年に他界しており，母親はイングランドを離れることを拒んだので，母のために経済的な手配をした後，ブールは独りで海峡を渡る準備を始めた．リンカーンではブールは名士となっており，市は出発前にブールを称える晩餐会を催し，銀のインクスタンドと貴重な書籍を贈った．逆境を跳ね返して大きな成功を収めた地元の少年に対し，郷土の誇りの思いを伝える心温まるエピソードである．ブールにとっては，これがリンカーンの見納めとなったが，市はブールを忘れず，15 年後，ブールが亡くなったときには，地元の聖堂にブールを記念する美しいステン

ドグラスの窓が設けられた．

1850 年，コークへ移ったブールの生活に劇的な変化が訪れる．クイーンズ・カレッジの副学長でブールの友人でもあったギリシア語教授ジョン・ライアル (John Rial) の姪で，同家に滞在していたメアリー・エベレスト (Mary Everest) と出会ったのである．ブール 34 歳，メアリーは 18 歳であった．ちなみにメアリーは，ウェールズ生まれの探険家で地理学者でもあったジョージ・エベレスト (George Everest) の姪でもある．ジョージは王立士官学校を卒業後，1806 年，16 歳のときにインドに渡り，ベンガル砲兵隊の士官候補生となった．数学と天文学に優れていたので，1814 年から 1816 年にかけて，スタンフォード・ラッフルス (Stamford Raffles) に任命されてジャワ島調査を指揮，1818 年には，インド南端からネパールにいたる 2,400 km に及ぶ子午線弧に沿って測量事業を展開していたウィリアム・ラムトン (William Lambton) の助手に選ばれた．1823 年にラムトンが没すると，測量の監督者の地位を継ぎ，1830 年から 1843 年まで，インド測量局の長官を務めた．1852 年，インド測量局はヒマラヤ山脈の中で「Peak XV」という仮称をつけられた山が世界最高峰であることを発見，当時の測量局長官アンドリュー・スコット・ウォー (Andrew Scott Waugh) は，調査の結果，現地名が発見できなかったとして，1856 年に，前任者のジョージに敬意を表して同山を「エベレスト山」と名づけている．

メアリーは上層階級の出身であり，年齢の違いもあって，最初はお互いに遠慮がちであった．しかし，次第に打ち解けるにつれてそうした懸念は払拭され，1855 年，2 人は結婚する．1856 年から 1864 年に掛けて 5 人の娘を授かり，この結婚は誰の目にも幸せなものであった．家庭人としてのブールを伝える，次のような逸話が残されている．

「最初の娘が生まれたとき，大学の裏手にあるスラム街へ出向き，ドアを一件ずつノックしては，ぼろを纏う住民と熱烈に握手し，『こちらへ伺って，是非ともお知らせしなければならないと思ったんです．娘が生まれたんですよ．とてもきれいな子です．』と挨拶して回ったという．」

コークでのブールの学者生活は，続々と大きな研究成果を産み出し，名誉にも彩られた恵まれたものとなった．金銭上の悩みと不断の苦労から解放され，数学の研究は多方面に及んだが，中でもブールの生涯の傑作となる論文の執筆に傾注し，ついに 1854 年，『思考法則の研究』を完成させ，出版した．このとき，ブールは 39 歳になっていた．ブールの意図を本人の記述によって理解するため，原論文から二つの文章を引用しておく [9]．

- この論文の目的は，推論を進めるための精神作用の基本的法則を研究すること，これらの基本的法則を Calculus（算法）ということばで表現すること，これをもとにして論理学を確立し，その方法を築くこと，その方法自体を確率の数学的原理適用のための一般的方法の基礎にすること，そしてついには，これらの研究の過程で現れる真理のさまざまな要素から，自然と人間の精神の構造に関して，いくらかの暗示を手に入れることである．
- さて，以下に続く研究では，一定の解釈をもつ記号の助けを借りて，その解釈にのみ基づく法則に従う過程の体系としての論理が示されている．しかし，同時に，これらの論理の法則が，形の上では，代数学の文字計算の法則と同一であることが示されている．ただ一つ注意すべきは，論理学上の記号が，普通の量の記号では成立しないような特別な法則に従うことである．（註：数の世界では，$a \neq 1$ であれば $a \times a \neq a$ であるが，論理の法則では，たとえば集合論において，a を集合，$\times$ を共通集合とすれば，$a \times a = a$ が成立する．）

ブールはこの論文で，論理を極めて簡潔な代数学に纏めてしまった．この代数学を用いれば，どのような推論も簡単な公式の操作で表現されてしまう．ここに，論理そのものが数学の支配下に置かれることになったのである．

7. ブールの晩年と死

コークでの学者生活を通して，ブールはさまざまな分野で数学的業績を挙げ続け，また，名誉にも恵まれることとなった．1852 年にダブリン大学から名誉博士号を授与され，1854 年には前述の『思考の法則』が出版された．1857 年には，ロンドンの王立協会会員に選ばれ，翌 1858 年には，裁判における証言と判決の関連を組合せ問題として定式化し，確率論を適用して分析した論文に対し，エジンバラ王立協会からキース賞（金メダルと 50 ポンドの賞金）を授与された．1859 年には『微分方程式論 (Treatise on Differential Equations)』，1860 年には，その続編として『差分解析論 (Treatise on the Calculus of Finite Differences)』が矢継ぎ早に出版された．

学問的な生産性の絶頂期にあり，学生に教えることを心から楽しみ，また家族を愛する良き家庭人でもあったブールは，1864 年 11 月 24 日，その誠実な人柄ゆえ

の致命的な判断ミスを犯してしまう．講義のため自宅から大学までの3キロ余りを歩いているとき，突然の豪雨に見舞われ，ずぶ濡れになってしまった．大学に着いてから，講義に遅れることを嫌ったブールは，服を乾かすとか，着替えるとか，身体を温めるとか，そうしたことを一切せずに教室へ直行し，濡れた服のまま講義を行った．その結果，酷い風邪を引き，そこから肺炎を発症した．

ブールにとって不運であったのは，妻のメアリーがホメオパシー (Homeopathy) 医療 [33] の信奉者であったことである．これはドイツ人医師クリスチアン・フリードリヒ・ザムエル・ハーネマン（Christian Friedrich Samuel Hahnemann：1755–1843 年）が始めた代替医療体系で，「同種の法則：類似したものは類似したものを治す」と「超微量の法則：薬剤は微量であるほど，その有効性が高くなる」という二つの法則を，治療に対する考え方の柱としている．メアリーは，夫が酷い咳で苦しんでいるのは豪雨に濡れたからであると判断し，冷たい濡れたシーツの上にブールを寝かせ，冷たい水をバケツに何杯もかけたという逸話が残されている [11]．1864 年 12 月 8 日，ブールは 49 歳の若さで他界した．

8. ブール代数の公理的記述

証明を必要としない公理を前提とし，定義を導入したうえで論理を展開して数学の体系を構築する方法は，遙かギリシアのユークリッド幾何学にまでさかのぼる．この公理的方法が幾何学以外の分野で長い間なおざりにされてきたのは，デカルト，ニュートン，ライプニッツ，オイラー，ガウスなど錚々たる数学者たちが，代数幾何，微分，積分，無限小解析，関数，複素解析など新しい数学的道具を次々と開発し，自分たちの主題を自由に，そしてある意味では無批判に，発展させることに忙しかったからに違いない．公理的方法が数学の全分野に広がるには，1899 年，ダーヴィット・ヒルベルト (David Hilbert) が執筆した教科書『解析学の基礎（Grundlagen der Geometrie：英訳 Foundations of Geometry)』の出版を待たなければならなかった．しかし，代数学の分野では，ケンブリッジの三羽烏であるハーシェル，ピーコック，バベッジを起点として公理的アプローチを意識する傾向が強く，ブールの『思考法則の研究』もこの傾向に沿ったものであった．

ブール以後，ブール代数は多くの数学者によってより洗練された形で公理化されており，ここでは，1933 年にアメリカの数学者エドワード・ヴァーミル・ハンティントン (Edward Vermilye Huntington) が発表した公理系を紹介する [9]．この公理系は，どんな意味づけももたない無定義要素の集合 $K=\{a,b,c,\cdots\}$ と，二つの無定義な 2 項演算 $\oplus$ と $\otimes$ から出発し，以下の規則を公理として採用する．ここで，2 項演算とは，K の二つの要素に施される演算を意味する．また，a が K の要素であることを $a\in K$ と書く．

公理 I

(a) $a,b\in K \Rightarrow a\oplus b\in K$

(b) $a,b\in K \Rightarrow a\otimes b\in K$

公理 II

(a) $\exists O\in K\colon a\in K \Longrightarrow a\oplus O=a$

(b) $\exists I\in K\colon a\in K \Longrightarrow a\otimes I=a$

公理 III

(a) $a\oplus b=b\oplus a$

(b) $a\otimes b=b\otimes a$

公理 IV

(a) $a\oplus(b\otimes c)=(a\oplus b)\otimes(a\oplus c)$

(b) $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

公理 V

(a) $a\in K \Longrightarrow \exists a'\in K\colon a\oplus a'=I,\ a\otimes a'=O$

公理 VI

(a) K は少なくとも二つの要素を含む

公理 I は，集合 K の要素 $a,b\in K$ に対して，2 項演算 $\oplus$ と $\otimes$ の結果も K の要素となることを示している．これがないと，そもそも K の上で $\oplus$ と $\otimes$ を用いて体系を構築することができない．公理 II は，$\oplus$ と $\otimes$ のそれぞれに対して影響を及ぼさない単位元の存在を保証するもので，通常の数の演算でいえば，和に対する 0，積に対する 1 に対応しており，集合論でいえば空集合と全体集合に相当する．公理 III はそれぞれの演算が交換可能であることを主張し，公理 IV は常識的な論理演算で成立する分配法則が，公理系でも成立することを保証するためのものである．公理 V は，$a\in K$ に属さないすべての要素からなる集合 $a'\in K$ が存在することを意味し，集合論でいえば全体集合における補集合の存在を主張するものである．最後の公理は，$O\neq I$ であることを保証している．

ここで，この公理系において，定義から定理を導く簡単な例を見ておこう．

定義 8.1 (包含関係)**．** $a,b\in K$ に対し，以下の四つの等式が満たされるとき，包含関係 $a\leq b$（a は b に含まれると読む）が成立するという．

① $a\oplus b=b$; ② $a\otimes b=a$;
③ $a'\oplus b=I$; ④ $a\otimes b'=O$

定理 8.2. 　(a) $a \le a$

(b) $a \le b,\ b \le c \Longrightarrow a \le c$

(c) $a \le b,\ b \le a \Longrightarrow a = b$

(d) $O \le a;\ a \le I$

証明. 公理 V(a) より $a \oplus a' = I$．定義 8.1 ②で b に a を代入することにより，$a \le a$ が証明される．

公理 II，公理 V，公理 IV(b) により，

$$a = a \otimes I = a \otimes (c \oplus c') = (a \otimes c) \oplus (a \otimes c') \tag{8.1}$$

が成立する．条件 $b \le c$ と定義 8.1 ④ より，$b \otimes c' = O$．すると公理 II (a) より，$(a \otimes c') = (a \otimes c') \oplus (b \otimes c')$．これを (8.1) 式の最右辺に代入すると，

$$a = (a \otimes c) \oplus \{(a \otimes c') \oplus (b \otimes c')\} \tag{8.2}$$

となる．ここで，右辺に公理 IV (b) を適用し，条件 $a \le b$ と定義 8.1 ①より $a \oplus b = b$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} a &= (a \otimes c) \oplus \{(a \oplus b) \otimes c'\} \\ &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c') \end{aligned} \tag{8.3}$$

と書ける．条件 $b \le c$ と定義 8.1 ④より $b \otimes c' = O$ となるので，公理 II (a) と (8.3) 式より $a = (a \otimes c)$ が成立し，定義 8.1 ②より，$a \le c$ が証明された．

もし $a \le b$ と $b \le a$ が同時に成立すれば，定義 8.1 と公理 III (a) より，$b = a \oplus b = b \oplus a = a$ となって (c) が証明される．(d) は，定義 8.1 ①と②で，それぞれ a を O と I で置き換え，b を a とすれば，直ちに証明される． □

定理 8.2(a) と定義 8.1 ① ② から，$a \oplus a = a$，$a \otimes a = a$ が導かれることを注意しておく．また，公理 II (a) を満たす要素 O が一意的であることも，次のように証明される．

公理 II (a) を満たす要素が O のほかに存在したとしよう．これを $\tilde{O}$ と書くと，定理 8.2 の (d) から $O \le \tilde{O}$ と $\tilde{O} \le O$ が同時に成立し，定理 8.2 から $O = \tilde{O}$ となる．すなわち，公理 II (a) を満たす要素 O は一意的である．I の一意性も，同様に証明される．

読者諸氏に，公理的世界を実感していただくために入り口の例を書いて見たが，むろん，コンピュータ科学におけるブール代数の果たした役割を感得するためには，論理演算と集合論の世界で直感的に理解した方が遥かに役立つ．次節で，ブール代数をこの観点から論じる．

(A) 0-1 演算 $\oplus_2$

$\oplus_2$	0	1
0	0	1
1	1	1

(B) 0-1 演算 $\otimes_2$

$\otimes_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

図 1　和 $\oplus_2$ と積 $\otimes_2$ の定義

表 1　三つの論理演算の定義

名称	記号	意味	定義
選言	$S_1 \vee S_2$	S_1 あるいは S_2	$I(S_1 \vee S_2) = I(S_1) \oplus_2 I(S_2)$
連言	$S_1 \wedge S_2$	S_1 かつ S_2	$I(S_1 \wedge S_2) = I(S_1) \otimes_2 I(S_2)$
否定	$\neg S_1$	S_1 でない	$I(\neg S_1) = 1 - I(S_1)$
同値	$S_1 = S_2$	S_1 と S_2は同値	$I(S_1) = I(S_2)$

9. ブール代数の論理学・集合論的記述

ある主張が正しい（真である）か間違っている（偽である）かを判断する体系が与えられているとき，原理的に真偽が定まる主張を命題と呼ぶ．たとえば，ある百科事典で真偽を定めるという取り決めを行ったとすると，『1 km は 1,000 m である』とか『日本の首都は札幌である』といった主張は命題の例であり，前者は真，後者は偽となる．

命題 S に対して，真偽関数 $I(S)$ を次のように定める．

$$I(S) = \begin{cases} 0 & S \text{ は偽} \\ 1 & S \text{ は真} \end{cases} \tag{9.1}$$

次いで，集合 $\{0, 1\}$ 上で定義される和 $\oplus_2$ と積 $\otimes_2$ をそれぞれ図 1 の（A）と（B）のように定義する．

図 1（A）で，1 の行と 1 の列が交錯するセルに 1 がある事実を $1 \oplus_2 1 = 1$ のように理解し，ほかのセルについても同様に読む．

図 1（A）と（B）が対角線に対して対称であることから，$x, y \in \{0, 1\}$ に対して，

$$x \oplus_2 y = y \oplus_2 x; x \otimes_2 y = y \otimes_2 x \tag{9.2}$$

という交換法則が成立することがわかる．また，$x, y, z \in \{0, 1\}$ に対して，結合法則

$$(x \oplus_2 y) \oplus_2 z = x \oplus_2 (y \oplus_2 z) \tag{9.3}$$

$$(x \otimes_2 y) \otimes_2 z = x \otimes_2 (y \otimes_2 z) \tag{9.4}$$

が成立することも，容易に見て取れる．

次に，この 2 種類の 0-1 演算を用いて，表 1 に示す三つの論理演算を定義する．

命題 $S_1 \vee S_2$ は，S_1 と S_2 の少なくともどちらか一方が真であるときのみ真となり，命題 $S_1 \wedge S_2$ は，S_1

表 2　$(S_1 \vee S_2) \wedge S_3$ の真偽関数

$I(S_1)$	$I(S_2)$	$I(S_3)$	$I(S_1 \vee S_2)$	$I((S_1 \vee S_2) \wedge S_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

と S_2 が共に真であるときのみ真となる．また，命題 $\neg S_1$ は，S_1 が真のとき偽，偽のとき真となる．

実は，ブール代数の本質は，表 1 にすべて含まれている．図 1，表 1 と (8.2) 式，(8.3) 式より，以下の定理が容易に導かれる．

定理 9.1.　命題 S_1, S_2, S_3 に対し，以下が成立する．

(a) 交換法則

$S_1 \vee S_2 = S_2 \vee S_1; S_1 \wedge S_2 = S_2 \wedge S_1$

(b) 結合法則

$(S_1 \vee S_2) \vee S_3 = S_1 \vee (S_2 \vee S_3)$

$(S_1 \wedge S_2) \wedge S_3 = S_1 \wedge (S_2 \wedge S_3)$

(c) 分配法則

$(S_1 \vee S_2) \wedge S_3 = (S_1 \wedge S_3) \vee (S_2 \wedge S_3)$

$(S_1 \wedge S_2) \vee S_3 = (S_1 \vee S_3) \wedge (S_2 \vee S_3)$

証明.　これらの論理式を証明するためには，表 1 の同値に関する定義を用いて，左辺の真偽関数と右辺のそれを別々に求め，それらが一致することを示せばよいことになる．例として，分配法則 (c) の 1 番目の証明をして見よう．表 2 に左辺の，表 3 に右辺の真偽関数を示す．最初の 3 列が論理式を構成する要素の真偽を示し，最後の列に，求める最終的な真偽関数の値が記されている．明らかに，二つの表の最終列は一致しており，この分配法則が成立することが証明された．ほかの場合も，同様に証明できる．　□

表 2 や表 3 と同様の表を作成することで，どのような論理式の真偽関数も必ず求めることができる．しかし，問題によっては，論理式を構成する要素の真偽の組み合わせが膨大になり，現実的な解法とはならない場合がある．次の問題 8.2 で，表を用いず，論理演算に基づいて問題を解く例を挙げておく（文献 [11] の例を筆者が改訂）．

表 3　$(S_1 \wedge S_3) \vee (S_2 \wedge S_3)$ の真偽関数

$I(S_1)$	$I(S_2)$	$I(S_3)$	$I(S_1 \wedge S_3)$	$I(S_2 \wedge S_3)$	$I((S_1 \wedge S_3) \vee (S_2 \wedge S_3))$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1

問題 9.2.　学校である生徒のキャラクター消しゴムが盗まれるという事件が発生した．体育時間に生徒は教室に不在となるが，着替えを終えて最後に教室を出た 2 人の生徒の後ろ姿が目撃されており，誰であるかは不明であるものの，その 2 人が盗んだことは確かである．先生が生徒全員から情報を集めたところ，最後に教室を出た可能性のある者として，6 人の生徒 $(C_i\colon i = 1, \ldots, 6)$ が浮かび上がった．その内，5 人 $(C_i\colon i = 1, \ldots, 5)$ が先生の質問に答えたが，最後の 1 人は黙秘を通した．

①　C_1 は C_4 と C_5 が犯人であると言った．
②　C_2 は C_3 と C_6 が犯人であると言った．
③　C_3 は C_5 と C_6 が犯人であると言った．
④　C_4 は C_1 と C_5 が犯人であると言った．
⑤　C_5 は C_2 と C_3 が犯人であると言った．

引き続き，先生が 5 人の返答した生徒に対し，無記名でよいから自分の返答内容に関して正直に教えて欲しいとメモの提出を依頼したところ，以下のことが判明した．

⑥　質問された 5 人の内，4 人は犯人の 1 人だけを正しく指摘した．
⑦　残りの 1 人は，挙げた 2 人とも嘘を言っている．

メモの内容が正しいとして，消しゴムを盗んだ生徒は誰か？

解答.　命題 S_i を，C_i が犯人の 1 人である場合は真，そうでない場合は偽とする．すると，⑦から，

$$\{I(S_4) \oplus_2 I(S_5)\} \otimes_2 \{I(S_3) \oplus_2 I(S_6)\} \otimes_2 \{I(S_5) \oplus_2 I(S_6)\} \otimes_2 \{I(S_1) \oplus_2 I(S_5)\} \otimes_2 \{I(S_2) \oplus_2 I(S_3)\} = 0 \tag{9.5}$$

が成立する．これを (8.2) 式と (8.3) 式を用いて展開し，犯人が 2 人であることから三つ以上の異なる論理積で表わされる項を 0 とすると，

$$\begin{aligned} &\{I(S_5) \otimes_2 I(S_3) \otimes_2 I(S_5)\} \otimes_2 \{I(S_2) \oplus_2 I(S_3)\} \\ &= \{I(S_3) \otimes_2 I(S_5)\} \oplus_2 \{I(S_3) \otimes_2 I(S_5) \otimes_2 I(S_2)\} \\ &= \{I(S_3) \otimes_2 I(S_5)\} \otimes_2 \{1 \oplus_2 I(S_2)\} = 0 \end{aligned} \tag{9.6}$$

を得る．これより，

$$I(S_3) \otimes_2 I(S_5) = 0 \tag{9.7}$$

でなければならないことがわかる．

指摘した 2 人とも嘘を言っているのは，⑦より 1 人だけなので，(9.5) 式の 5 項の内，4 項は 1 である．したがって，5 項から 4 項を取ってくる組み合わせのすべての論理和をとれば，それは 1 でなければならない．その結果，得られる式の左辺を展開し，三つ以上の異なる論理積が 0 となることと (9.7) 式を用いると，最終的に，

$$\begin{aligned} &\{I(S_5) \otimes_2 I(S_6)\} \oplus_2 \{I(S_2) \otimes_2 I(S_5)\} \\ &= I(S_5) \otimes_2 \{I(S_2) \oplus_2 I(S_6)\} = 1 \end{aligned} \tag{9.8}$$

を得る．したがって，$C_5 = 1$ かつ，$C_2 = 1$ あるいは $C_6 = 1$ が成立する．$C_5 = C_6 = 1$ とすると，③より C_3 は 2 人の犯人を正しく指摘したことになり，これは⑦⑧と矛盾する．結局，残るのは $C_2 = C_6 = 1$ であり C_2 と C_6 が犯人として特定されたことになる． □

次に，集合論と論理演算が密接に結び付いていることを示そう．分析の対象となるすべての要素の集まりを全体集合と呼び，Ω で表わす．x が Ω の要素であることを $x \in \Omega$ と書く．各要素 $x \in \Omega$ に対し，明瞭な基準によって集合 A に属するか否かが判定されるとき，A を Ω の部分集合と呼び，$A \subset \Omega$ と書く．これは，Ω 上で定義される真偽関数 $I_A \colon \Omega \to \{0, 1\}$ が

$$I_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathrm{A} \\ 1 & x \in \mathrm{A} \end{cases} \tag{9.9}$$

として定義され，$A = \{x \in \Omega \mid I_A(x) = 1\}$ と書けることを意味する．

一つの要素ももたない集合を空集合と呼び，ϕ で表わす．明らかに，任意の $x \in \Omega$ に対して $I_\phi(x) = 0$ が成立する．便宜上，$\phi \subset \Omega$ と定義する．たとえば，Ω として日本国籍を有する人々の集合を考え，「20 歳以上で東京都に住民票をもつ者」という命題で真偽関数を定めると，その条件を満たす人間の部分集合が定まる．住民票は 1 箇所でしか保有できないという原則が厳密に守られているとすると，「東京都と茨城県で住民票を保有する者」という命題は，空集合 ϕ に対応する．明らかに，空集合を生成する命題は無数にあるが，集合論では一括して，空集合 ϕ として取り扱う．

(9.9) 式を用いて，さまざまな集合の定義を論理式で与えることが可能となる．

定義 9.3. 全体集合 Ω に対し，その部分集合を A_1, A_2 とする．

(a) 和集合：$A_1 \cup A_2 = \{x \in \Omega \mid x \in A_1 \vee x \in A_2\}$
(b) 共通集合：$A_1 \cap A_2 = \{x \in \Omega \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2\}$
(c) 部分集合：$A_1 \subset A_2 \Longleftrightarrow [x \in A_1 \Rightarrow x \in A_2]$
(d) 等号：$A_1 = A_2 \Longleftrightarrow [A_1 \subset A_2 \wedge A_2 \subset A_1]$
(e) 補集合：$A_1^C = \{x \in \Omega \mid x \notin A_1\}$
(f) 差集合：$A_1 \setminus A_2 = \{x \in \Omega \mid x \in A_1 \wedge x \notin A_2\}$
(g) 直積集合：$A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2\}$

定理 9.1 と定義 9.3 を用いて，集合論の体系を構築することが可能となる．実際，前節の公理系で，$K = \{A \mid A \subset \Omega\}$ とし，$\oplus$ を $\vee$ で，$\otimes$ を $\wedge$ で，a' を A^c で置き換え，$O = \phi$, $I = \Omega$ とすると，上記の手続きで構築される集合論がブールの公理系を満たすことがわかる．

10. コンピュータ科学とブール代数

ブールの死後，1 週間余を経た 12 月 17 日，ロンドンの『アテナイオン』という文芸誌に短い訃報が掲載され，ブールの主著として『思考の法則』を挙げたあと，「この本はごく限られた読者に向けられたものと思われ，確かにそのような読者は存在するに違いない」と幾分かの揶揄を籠めて書いている．

ブールの記号論理学における業績を評価・継承して研究を進めたのは，1874 年に『科学の法則 (Principles of Science)』を出版した経済学者かつ論理学者のウィリアム・スタンレー・ジェヴォンズ (William Stanley Jevons)，ブールの体系を数学的‘関係’に拡張した前出のド・モルガン，論理学を記号論 (semiotics) の一分野とみなして研究し，ブールの公理系を包摂する体系を提示したアメリカの論理学者チャールズ・サンダース・パース (Charles Sanders Peirce) など，極めて限られていた．

新規性の強いものは，なかなか受け入れられないという側面をもつが，ブールの切り拓いた記号論理学も，長い間，多くの数学者たちによってなおざりにされてきた．記号論理学は「形而上学的な好奇心に過ぎない」と，冷めた目で突き放す反応が一般的で，実はそれが数学全域に影響を与える真剣な研究に値する内容をもつという理解が普遍的に受け入れられるようになるには，1910 年から 1913 年に掛けて出版されたアルフレッド・ノース・ホワイトヘッド (Alfred North Whitehead) とバートランド・ラッセル (Bertrand Russell) の労作

『数学原理 (Principia Mathematica)』を待たなければならなかった．

『数学原理』は，クルト・ゲーデル (Kurt Gödel) が不完全性定理に取り組む契機となった点でも重要である．第 1 不完全性定理では，『数学原理』に示された公理系が，無矛盾かつ完全であることは不可能であることを示した．第 2 不完全性定理は，基本算術を展開するどんな形式体系も，それを使って自己の無矛盾性を証明することはできないと主張する．これは 20 世紀に純粋数学の分野で確立された最も衝撃的な定理の一つであると言っても過言ではなく，ブールの切り拓いた地平に繋がる内容を持っていると言えよう．本連載の後半で議論する AI（Artificial Intelligence：人工知能）や，それに付随する Singularity の議論においても，ゲーデルの不完全性定理が示唆する内容が本質的に重要となることが判明するであろう．

ブールの記号論理における仕事の重要性は，純粋数学の分野でいち早く継承されたが，エンジニアリングの分野では，長らく認知されることはなかった．この状況が一変するのは，未だ MIT の大学院学生であったクロード・エルウッド・シャノン (Claude Elwood Shannon) が執筆した修士論文の内容が，1938 年，『アメリカ電気学会報 (Transactions of the AIEE)』に掲載されたときからである．ここで，AIEE は American Institute of Electrical Engineers の略で，1963 年に Institute of Radio Engineers (IRE) と合併し，Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) と改名して，現在に至っている．

9 節で見たように，どのような命題もブール代数で記述できることを直覚したシャノンは，ブール代数を実行する電気回路の設計・開発に成功した．この世界で最も有名といわれる修士論文により，ブールは，シャノンと共に，コンピュータ科学史に不朽の名前を刻むこととなったのである．（この項，なお続く）

参考文献

[1] H. Goldstine, The Computer from Pascal to von Neumann, Princeton University Press, 1972.（末包良太，米口肇，犬伏茂之訳，『復刊　計算機の歴史―パスカルからノイマンまで―』，共立出版，2016.）

[2] S. McCartney, The Triumphs and Tragedies of the World's First Computer, Walker, 1999.（日暮雅通訳，『エニアック―世界最初のコンピュータ開発秘話―』，パーソナルメディア，2001.）

[3] 坂村健，『痛快！　コンピュータ学』，集英社，1999（文庫版 2002）.

[4] 竹内伸，『実物でたどるコンピュータの歴史―石ころからリンゴへ―』，東京理科大学出版センター（編），東京書籍，2012.

[5] 小田徹，『コンピュータ開発のはてしない物語―起源から驚きの近未来まで―』，技術評論社，2016.

[6] Wikipedia, Francois Viéte, https://enwikipedia.org/wiki/Francois_Viéte（2021 年 12 月 14 日閲覧）

[7] E. T. Bell, "*Men of Mathematics Volume 1*", 1937.（田中勇・銀林浩訳，『数学をつくった人びと上』，東京図書，1976.）

[8] Wikipedia, René Descartes, https://en.wikipedia.org/wiki/René_Descartes（2021 年 12 月 21 日閲覧）

[9] E. T. Bell, "*Men of Mathematics Volume 2*", 1937.（田中勇・銀林浩訳，『数学をつくった人びと下』，東京図書，1976.）

[10] Wikipedia, George Boole, https://en.wikipedia.org/wiki/George_Boole（2021 年 12 月 14 日閲覧）

[11] P. J. Nahin, *The Logician and the Engineer: How George Boole and Claude Shannon Created the Information Age*, Princeton University Press, 2012,（松浦俊輔訳，『0 と 1 の話―ブール代数とシャノン理論―』，青土社，2013.）

[12] J. Soni and R. Goodman, *A Mind at Play: How Claude Shannon Invented the Information Age*, Simon & Schuster, 2017,（小坂恵理訳，『クロード・シャノン―情報時代を発明した男―』，筑摩書房，2019.）

[13] Wikipedia, Claude Shannon, https://en.wikipedia.org/wiki/Claude_Shannon（2021 年 12 月 20 日閲覧）

[14] Wikipedia, Alan Turing, https://en.wikipedia.org/wiki/Alan_Turing（2021 年 12 月 20 日閲覧）

[15] B. J. Copeland, *Turing: Pioneer of the Information Age*, Oxford University Press, 2012,（服部桂訳，『チューリング―情報時代のパイオニア―』，NTT 出版，2013.）

[16] A. Hodges, *Alan Turing: The Enigma*, Princeton University Press, 2014,（土屋俊・土屋希和子訳，『エニグマ―アラン・チューリング伝―』，勁草書房，2015.）

[17] 高岡詠子，『チューリングの計算理論入門―チューリング・マシンからコンピュータへ―』，講談社，2014.

[18] Wikipedia, Galileo Galilei, https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei（2021 年 12 月 21 日閲覧）

[19] Wikipedia, Nicolaus Copernicus, https://en.wikipedia.org/wiki/Nicolaus_Copernicus（2021 年 12 月 21 日閲覧）

[20] Wikipedia, Marin Mersenne, https://en.wikipedia.org/wiki/Marin_Mersenne（2021 年 12 月 21 日閲覧）

[21] Wikipedia, Isaac Beeckman, https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Beeckman（2022 年 1 月 2 日閲覧）

[22] Wikipedia, Adrien Baillet, https://en.wikipedia.org/wiki/Adrien_Baillet（2022 年 1 月 2 日閲覧）

[23] Wikipedia, Elisabeth of the Palatinate, https://en.wikipedia.org/wiki/Elisabeth_of_the_Palatinate（2022 年 1 月 2 日閲覧）

[24] Wikipedia，エリーザベト・フォン・デア・プファルツ (1618-1680), https://ja.wikipedia.org/wiki/エリーザベト・フォン・デア・プファルツ_(1618-1680)（2022 年 1 月 2 日閲覧）

[25] 有賀暢迪，"合理力学の一例としての衝突理論　1720–1730 年，" 科学哲学科学史研究，6, pp. 17–37, 2012.

[26] Wikipedia，ソディの 6 球連鎖，https://ja.wikipedia.org/wiki/ソディの 6 球連鎖（2022 年 1 月 4 日閲覧）

[27] Wikipedia, Thorold Gosset, https://en.wikipedia.org/wiki/Thorold_Gosset（2022 年 1 月 4 日閲覧）

[28] 寒川町ガイド，https://samukawaguide.blogspot.com/2019/12/6.html（2022 年 1 月 4 日閲覧）

[29] Wikipedia, Gottfried Wilhelm Leibniz, https://en.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz（2022 年 1 月 4 日閲覧）
[30] Wikipedia, Christina, Queen of Sweden, https://en.wikipedia.org/wiki/Christina,_Queen_of_Sweden（2022 年 1 月 4 日閲覧）
[31] Wikipedia, Isaac Newton, https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton（2022 年 1 月 4 日閲覧）
[32] 向井茂,「不変式の話」, 数学セミナー連載, 2005 年 12 月号, 2006 年 1, 2, 4 月号
[33] 日本医学会ホームページ, https://jams.med.or.jp/news/013.html（2022 年 2 月 4 日閲覧）

