

# 森林資源管理における最適化モデルの展開 (I)

## —林分単位での最適化モデル—

吉本 敦, 木島 真志

森林資源を管理するとき、管理の目的が必ず存在する。同時に自然環境あるいは経済社会環境に対するさまざまな制約も存在する。それらを把握し、適切な OR 手法の選択、モデルの構築、分析を通して管理者に対し意思決定を支援することが、OR 分野に携わる森林科学の研究者の主要な任務となる。これまで、森林資源を対象とした管理問題では、制約や制御の性質上、対象を大きく二つに分け対応してきた。一つが経営体の最小単位となる林分単位であり、もう一つが複数の林分からなる森林単位である。本稿では、これまで展開されてきた古典的な手法から近年の手法について、林分単位の最適化モデルに関連する研究に焦点を当てて著者の視点から詳説する。森林単位については次稿での「森林単位での最適化モデル」を参照されたい。

キーワード：最適間伐計画、成長予測、動的計画法

### 1. はじめに

現在、森林資源は脱炭素社会、生態系サービス、SDGs などさまざまな場面で再認識されはじめている。植林から伐採（収穫）に至るまで、長期的な施業を必要とする森林資源の管理は、“資源量の成長予測”と“予測に基づく意思決定”が管理の経済性・効率性を大きく左右する。カナダ、アメリカにおいては、木材産業が地域経済のみならず、国の経済にも大きな影響を与えてきたため、古くから森林の成長予測、それに基づく植林から伐採に至る一連の管理施業に対する意思決定サポートを念頭にした OR 手法の研究が進められてきた [1]。森林資源管理を検討する際には、線形計画法、動的計画法など数理計画法の手法が広く応用されている。林分単位では、特に時間とともに変化する林分成長の動態を考慮すれば動的計画法が適当な手法といえる。なお、林分には樹種・樹齢が同一な単純同齢林、樹齢が異なる単純異齢林、あるいは樹種の異なる混交林などが存在するが、基本的に制御は間伐の時期、強度となる。次にまず古典的な問題を説明し、動的計画法の応用について詳説する。

### 2. 古典的な林分単位の問題：伐期齢の探索

古くから研究されている林分単位の問題には、与えられた林分に対する伐期齢（伐採を施す林分の林齢）の決定がある。伐期齢を探索するには、目的に対する最適化の基準が必要である。井上 [2] は“生理的伐期齢”、“工芸的伐期齢”、“収穫量最大の伐期齢”、“森林純収益最大の伐期齢”、“土地純収益最大の伐期齢”、“収益率最大の伐期齢”、“金員総収益最大の伐期齢”、“労働生産性最大の伐期齢”、“利潤最大の伐期齢”などの異なる伐期齢を列挙しているが、このような伐期齢は、基本的に目的を何にするかで命名されたものである。仮に、目的とすることが何であるかが明確になれば、最適化の手法を用いて最適解となる伐期齢を探索することができ、上記のような名前にとらわれる必要がなくなる。

一般的に用いられている伐期齢探求のための基準は 1) 生産物の大きさ、2) 年平均成長量 (Mean Annual Increment: MAI)、3) 森林貢租 (Forest Rent: FR)、4) 土地期待価値 (Soil or Land Expectation Value: SEV or LEV) などがある。生産物の大きさを基準にすると、経営の目的はある大きさの林木を最大限生産することになる。日本の市場においては柱生産のための主流となるサイズの製材があり、たとえばスギ・ヒノキ正角では（厚 10.5 cm × 幅 10.5 cm × 長 3.0 m）のサイズが代表的で市場でもっとも流通しているクラスであり、木材・製材市況を観測するのに用いられている指標である。このような 10.5 cm × 10.5 cm × 3.0 m の製材を丸太から生産することを考えれば、測樹学の応用から、おおよその目安として胸高直径の大きさがどれく

よしもと あつし  
統計数理研究所  
〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3  
yoshimoa@ism.ac.jp  
このしま まさし  
琉球大学農学部  
〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原 1 番地  
konoshim@agr.u-ryukyuu.ac.jp

らいになれば良いか予測がつく。市場の価格、生産費用などを考慮する必要がなければ、このようなサイズによる基準は有効なものとなり、伐期齢は樹種構成、地味などにより一意に決定される。

上記 2) の年平均成長量を基準にすれば、伐期齢はそれを最大にする時期となる。ここで材積成長量を  $Q$  とし、

$$Q = f(t) \quad (1)$$

のように成長を時間  $t$  の関数とすると、年平均成長量 (MAI) は

$$MAI = \frac{f(t)}{t} \quad (2)$$

となり、年平均生産量を最大にする時期は、MAI の時間  $t$  に対する第一次導関数をゼロとする最適化の第一次条件 (First Order Condition) により求めることができる。したがって、下記条件式を満たす時期が最適伐期齢となる。すなわち、連年成長量が年平均成長量と交わる時期である。

$$f'(t) = \frac{f(t)}{t} \quad (3)$$

森林貢祖は、概念的には MAI と同じであるが、その違いは、MAI が生産を基準にした年平均成長量であるのに対し、森林貢祖は年平均の純収益を基準にしていることである。ここで単位材積当たりの価値を  $P$ 、期間  $t$  までの生産に対する費用を  $C(t)$  とすると、森林貢祖は

$$FR = \frac{P \cdot f(t) - C(t)}{t} \quad (4)$$

となる。したがって、伐期齢はこの  $FR$  を最大にする期間  $t$  によって決定される。この方法に対しては、森林経営に対する投資という点で、資本 (林地) に対する機会費用が無視されているとの批判がある。

最後の基準にドイツ森林数学者の Hossfeld が 1805 年に、Faustmann が 1849 年に発表した土地期望価がある [3]。土地期望価は、まず 1 回の伐採により得られるすべての収益と費用をある割引率の基で現在価値 (Net Present Value: NPV) に換算し、その現在価値が、同一の伐期齢により永遠に繰り返し得られる支払いとして計算されたものである。土地期望価を最大にする伐期齢は、Faustmann rule あるいは Faustmann-Pressler solution として知られている。図 1 に標準的な林分の経営に関わる施業とその費用・収益のフローを図示した。それぞれの費用・収益は異なる時間で発生しているため、仮に割引率を  $r$  とすると、まず現在価値の計

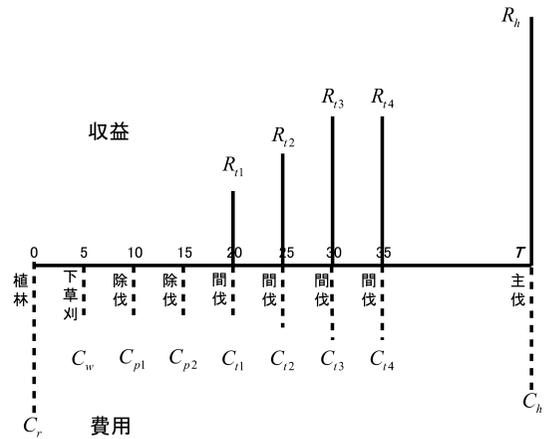


図 1 一連の施業に関わる費用と収益

算を行い、現時点における価値を算出する。

$$NPV = -C_r - \frac{C_w}{(1+r)^5} - \frac{C_{p1}}{(1+r)^{10}} - \frac{C_{p2}}{(1+r)^{15}} + \frac{R_{t1} - C_{t1}}{(1+r)^{20}} + \frac{R_{t2} - C_{t2}}{(1+r)^{25}} + \frac{R_{t3} - C_{t3}}{(1+r)^{30}} + \frac{R_{t4} - C_{t4}}{(1+r)^{35}} + \frac{R_h - C_h}{(1+r)^T} \quad (5)$$

次に、この現在価値が伐期齢  $T$  の基に無限回得られるものとし、土地期望価を求めると、

$$SEV = NPV + \frac{NPV}{(1+r)^T} + \frac{NPV}{(1+r)^{2T}} + \frac{NPV}{(1+r)^{3T}} + \frac{NPV}{(1+r)^{4T}} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{NPV}{(1+r)^{kT}} = NPV \frac{(1+r)^T}{(1+r)^T - 1} \quad (6)$$

となる。これは初項  $NPV$ 、公比  $(1+r)^{-T}$  の無限等比級数の和である。したがって、この値を最大にする伐期齢  $T$  が求める伐期齢となる。すなわち、この基準は、伐期齢  $T$  を変数とした関数であるため、第一次条件 (第一次導関数 = 0) を採用することにより最適伐期齢を探求することができる。

### 3. 林分単位での最適化モデル：動的計画法の応用

OR 手法の一つである動的計画法 (Dynamic Programming: DP) が森林分野で、世界で初めて応用されたものが日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌第 1 巻に発表された Arimizu [4] の林分の経営における最適間伐量の探求である。有水氏はエール大学留

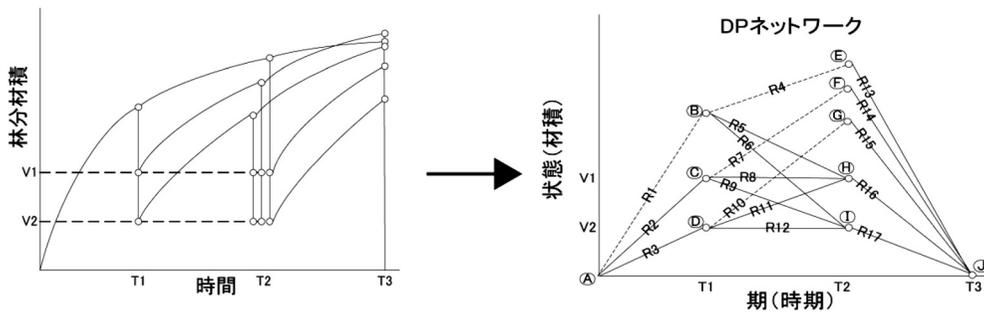


図2 間伐計画最適化問題

学中に R. Bellman と S. Dreyfus のアドバイスを  
受け、米国アーカンサス州の森林に動的計画法を応用し、  
最適間伐量の組合せを探求した。その後、清家・小  
田中 [5] は変分法により林分の収穫問題を記述し、DP  
により土佐ひのき人工林の林分収穫表を用いて最適  
間伐量を探求しているが、使用した間伐効果を描写する  
関数による計算結果と実際の値に大きな乖離が生じ、  
実用には至ってない。

DP の応用については、70 年代から 80 年代にかけ、  
北米において間伐の効果を捉えた林分成長モデルの構  
築とともに間伐計画の最適化に関する論文が数多く発  
表されている。同時に非線形計画法 (Non-Linear Pro-  
gramming: NLP) やヒューリスティック法での対応  
も行われた [6]。ただ、Arimizu [4] の論文は日本の学  
会誌に発表されていたため、引用されるケースはほと  
んどなかった。

図 2 に当初想定された単純な間伐のイメージを DP  
ネットワークに示す。図 2 の左図は、T1 期に材積が  
V1 と V2 になるように間伐をする選択と、T2 期に再  
び V1 と V2 になるように間伐する選択、最後は T3 期  
に主伐する計画オプションを示している。これを DP  
ネットワークにしたものが右図になる。アークに示さ  
れたものがその経路を通過する際、すなわち間伐によ  
る利益などを表し、始点 A (植林) から終点 J (主伐)  
への最適経路を探求すれば、それがすなわち最適間伐  
計画となる。

上記では間伐効果をかなり単純化し DP ネットワーク  
を作成している。しかし、より複雑な林分成長モデル  
の開発に伴い、従来のアプローチでは DP ネットワーク  
の“次元の呪い (Curse of Dimensionality)”の問題が  
発生し、さまざまな近似による対処法も開発された。  
日本においては、間伐効果を把握する林分モデルの  
開発について、50 年代後半から 60 年代にかけ“自  
己間引き理論”が林分の状態予測に導入され、立木本

数と主要林木の樹高、直径、材積の関係を描写する林  
分の密度管理図というモデルが安藤 [7] により開発さ  
れた。ただ当時は時間の要素が考慮されていなかった  
ため、成長モデルとしての機能を満たしていなかった。

林分密度管理図は基本的には上層樹高、平均単木材  
積、自然枯死線を主要素としたモデルである。モデル  
の応用に際しては、現時点での林分の ha 当たりの立  
木本数  $N$ 、上層樹高  $H$  を与えれば、平均単木材積  $v$   
が下記により計算される。

$$v(N, H) = \frac{1}{0.068509N \cdot H^{-1.347464} + 2658.2H^{-2.814651}} \quad (7)$$

これは、下層木間伐を前提にしたときの同樹高にお  
ける密度と材積の関係から導いたものである。平均単木  
材積に立木本数  $N$  を乗ずれば、ha 当たりの材積

$$V(N, H) = v(N, H) \cdot N \quad (8)$$

が得られる。また、立木本数と上層樹高により林分形  
状高

$$HF(N, H) = 0.791213 + 0.244012H\sqrt{N}/100 + 0.353895H \quad (9)$$

が計算される。この林分形状高と上記の ha 当たりの  
材積を用いて、ha 当たりの断面積

$$G(N, H) = \frac{V(N, H)}{HF(N, H)} \quad (10)$$

が計算され、さらに ha 当たりの断面積と立木本数に  
より、断面積平均直径

$$\bar{D}_g(N, H) = 200\sqrt{\frac{G(N, H)}{\pi \cdot N}} \quad (11)$$

が得られる。また、断面積平均直径と立木本数、上層

樹高により平均胸高直径

$$\overline{DBH}(N, H) = -0.048940 - 0.034814H\sqrt{N}/100 + 0.98937\overline{D}g(N, H) \quad (12)$$

を同時に計算することができる。

林分密度管理図では間伐量の判断指標として収量比数という概念が使用されているが、この収量比数は最多密度曲線における ha 当たり材積と現林分の ha 当たり材積の比で定義されている。最多密度曲線における ha 当たりの材積は下記のように算出できる。まず、

$$\log_{10} N_{Rf}(H) = 5.3083 - 1.4672 \log_{10} H \quad (13)$$

により ha 当たりの本数  $N_{Rf}$  を算出した後、

$$V_{Rf}(H) = \frac{N_{Rf}(H)}{0.068509N_{Rf}(H) \cdot H^{-1.347464} + 2658.2H^{-2.814651}} \quad (14)$$

により材積を算出する。したがって、収量比数は

$$Ry(N, H) = \frac{V(N, H)}{V_{Rf}(H)} \quad (15)$$

となる。

上記の数式からもわかるように、現時点での林分の ha 当たりの立木本数  $N$ 、上層樹高  $H$  が与えられれば、ほかの要素はすべて算出される。また、立木本数  $N$  と植栽本数  $N_0$  の関係は算出される平均単木材積を用いて、自然枯死曲線

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{N_0} + \frac{v(N, H)}{3.47089 \times 10^6 N_0^{-0.9184}} \quad (16)$$

により表される。したがって、 $N$ 、 $N_0$ 、 $H$  のいずれか二つが決まれば、ほかの一つが決まる。この関係を考慮すれば、時間の経過に伴う林分成長を予測するには上層樹高成長に時間の要素を加えれば十分であることがわかる。

たとえば、上層樹高成長の予測モデルとして Richards-Chapmans 型の樹高成長曲線式 [8]

$$H = a(1 - e^{-b \cdot t})^c \quad (17)$$

を導入し、現時点の林分の林齢と ha 当たりの立木本数を与えることにより、自然枯死を考慮した将来的な林分の成長を予測できる。換言すると、現時点の立木本数と上層樹高が既知とすれば、植栽本数が推定できる。植栽本数は基本的には林分の成長とは無関係で一定であるので、上層樹高が成長した場合、推定された  $N_0$  と  $H$  により自然枯死による本数減少の予測が可能になる。仮に間伐が施された場合、立木本数は減少し、間伐後

の本数と自然枯死の結果得られる本数で、どちらか少ない方が上層樹高の成長とともに予測される立木本数となる。ここで自然枯死の結果得られる本数を  $N_s$  とすると、予測される上層樹高  $H$  と  $N_0$  を代入することにより、その本数  $N_s$  は推定できる。したがって、間伐後の立木本数を  $N_t$  とすれば、予測される立木本数は

$$N = \min(N_s, N_t) \quad (18)$$

となる。ここで得られる新たな ha 当たりの立木本数  $N$  と上層樹高  $H$  を用いれば、上述したそれぞれの要素に対する関数式により林分構成要素が新たに算出される。そして、再度間伐あるいは成長による状態変化が繰り返し行われ、間伐効果を考慮できる林分成長モデルが構築できる。林分密度管理図は、それが開発された頃のデータを用いてそれぞれのパラメータが指定されているため、現在の森林の成長との乖離が大きく、現在はほとんど利用されていない。しかし、吉本ら [9] にあるように県などが所有する材積表あるいは調査による材積、直径、樹高成長に関わる実測値があればパラメータの再推定は比較的容易に行うことができ、再推定されるパラメータを用いた密度管理図により、対象とする林分に対して間伐効果を考慮できる林分成長モデルの構築が可能になる。

話を DP に戻すと、従来のアプローチによる“次元の呪い”の問題は Paredes and Brodie [10], Yoshimoto et al. [11] らが開発した新たな動的計画法のアルゴリズムによりほぼ解決された。これらの開発されたアルゴリズムは、前者によるものが PATH (Projection Alternative Technique) と呼ばれ、後者によるものが MSPATH (Multi-Stage PATH) と呼ばれるものである。従来のアルゴリズムが可能な間伐の組合せを全期間通したものによりネットワークを構築するのに対し、これらのアルゴリズムは林分の間伐期に間伐施業から得られる“貢献 (Contribution)”とその後の林分主伐から得られるであろう“貢献”の総和のみを考慮するので、各間伐期における間伐強度 (量) が制御変数でありかつ、状態変数となる。したがって、One-State & One-Stage の DP ネットワークによるアルゴリズムで表現することができる。その結果、成長モデルがどのように複雑化しても、状態変数の次元は間伐期の間伐強度が制御変数そのものになるため、“次元の呪い”を回避することができる。アルゴリズムの導入は Paredes and Brodie [10] ではネットワーク理論 (Network Theory) とラグランジェ未定乗数法 (Lagrange Multipliers Approach), Yoshimoto et al. [11] では変分法 (Calculus

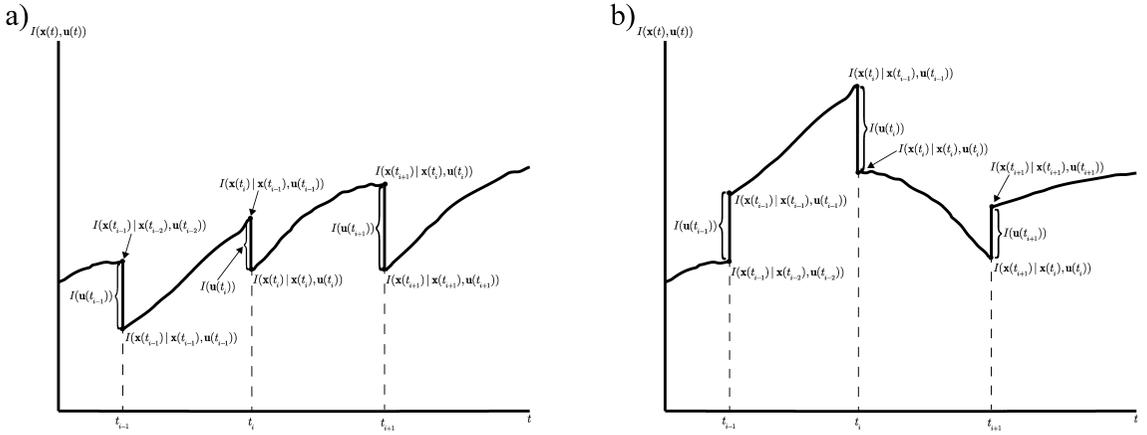


図3 現在価値関数の軌道 a) 林分材積, b) その他の価値 (Yoshimoto et al. [6])

of Variations) によるが, Yoshimoto et al. [6] はさらに最適制御 (Optimal Control) により TMSPATH (Two-Directional MSPATH) を導入した.

今  $\mathbf{x}(t)$  を林分の状態を表す状態変数ベクトル,  $\mathbf{u}(t)$  を成長に影響を与える間伐の制御変数ベクトルとし, 林分成長はこれらで描写できるとする. さらに現在の林分の状態から微小な時間内で得られる瞬時パフォーマンスインデックス (ここでは間伐施業から得られる収益の現在価値関数とする) を  $\dot{I}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  として, 時間間隔  $(t_0, t_n)$  でのその積分値を最大にする最適制御, すなわち間伐を探索することを目的とする. 下記の典型的な最適制御の問題が得られる.

$$\begin{cases} \max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_n} \dot{I}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \\ \text{subject to} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (19)$$

ここで  $f(\cdot)$  は連続で微分可能な  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  の関数で, 林分の状態変化を表す.

主伐を伴う間伐施業を考慮し, 上記問題を離散的な問題に置き換えると下記となる.

$$\begin{aligned} & \max_{\{\mathbf{u}(t_i)\}} J \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{I}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \{I(\mathbf{x}(t_{i+1}) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i)) - I(\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i))\} \end{aligned} \quad (20)$$

なお, 間伐施業  $\mathbf{u}(t_i)$  は間伐後の林分状態  $\mathbf{x}(t_{i+1})$  のみに影響を与える. 離散的な状態変化を表す関数,  $g(\cdot)$

を  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  の関数とする.

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = g(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i)) \quad (21)$$

$I(\mathbf{x}(t_{i+1}) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i))$  は林分状態  $\mathbf{x}(t_i)$  において間伐  $\mathbf{u}(t_i)$  を施した後の林分状態  $\mathbf{x}(t_{i+1})$  から得られる現在価値である. ここで  $I(\mathbf{u}(t_i))$  を間伐  $\mathbf{u}(t_i)$  から得られる収益の現在価値とすると, 上記式の右辺第二項は下記となる.

$$\begin{aligned} & I(\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i)) \\ & = I(\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{u}(t_{i-1})) - I(\mathbf{u}(t_i)) \end{aligned} \quad (22)$$

すなわち,  $I(\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i))$  は林分状態  $\mathbf{x}(t_i)$  において間伐  $\mathbf{u}(t_i)$  を施した直後の林分状態  $\mathbf{x}(t_i)$  から得られる収益の現在価値であり, それは過去の間伐施業後に林分状態が  $\mathbf{x}(t_i)$  となったときに得られる現在価値から間伐による現在価値を差し引いたものになる.

図3に Yoshimoto et al. [6] で示された  $I(\cdot)$  の軌道の例を示す. 図3a) は林分材積の変化を考慮したもので, 単純増加を想定している. それに対し図3b) はたとえば景観価値, 多様性価値, 生態系サービスの価値などの例を示し, ここでは増減を伴う軌道になっている.

上記の変換の結果, (19) 式は下記となる.

$$\begin{aligned} & \max_{\{\mathbf{u}(t_0), \dots, \mathbf{u}(t_{n-1})\}} J \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \{I(\mathbf{x}(t_{i+1}) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i)) \\ & \quad - I(\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i))\} \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \{I(\mathbf{x}(t_{i+1}) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i)) \\ & \quad + I(\mathbf{u}(t_i)) - I(\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{x}(t_{i-1}), \mathbf{u}(t_{i-1}))\} \end{aligned} \quad (23)$$

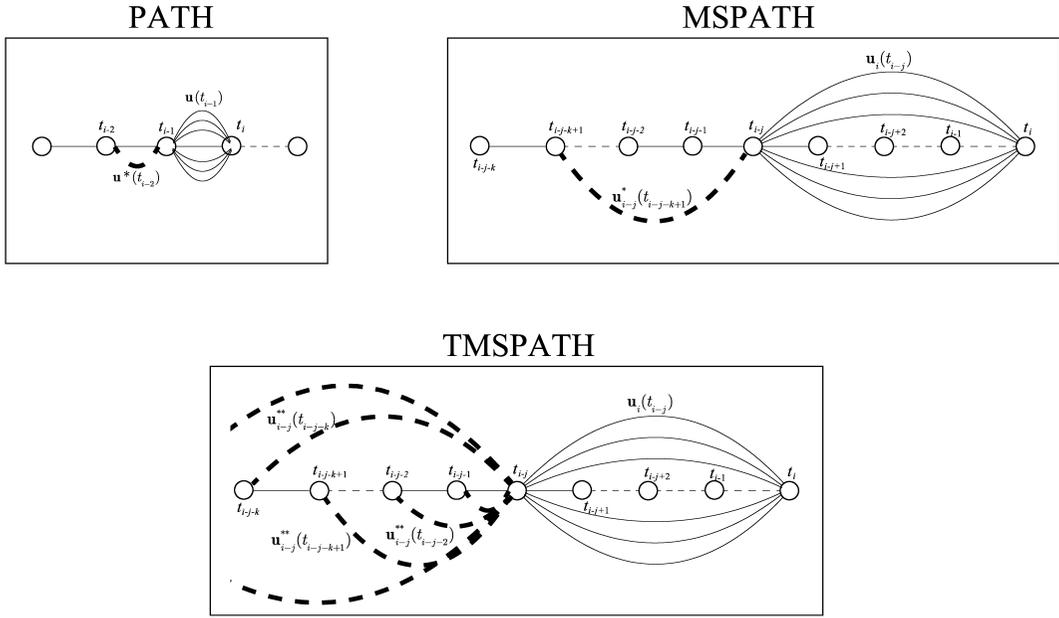


図4 PATH, MSPATH, TMSPATHによるDPネットワークの比較 (Yoshimoto et al. [6])

ただし、 $i = 0$  のとき、林分の初期状態  $I(\mathbf{x}(t_0)) = I(\mathbf{x}(t_0) | \mathbf{x}(t_{-1}), \mathbf{u}(t_{-1}))$  となる。ここで One-State & One-Stage の DP 最適化の枠組みを利用すると、最適方程式 (Optimality Equation) は下記となる。

$$\begin{cases} f_i^* = \max_{\{\mathbf{u}(t_i)\}} \{f_i(\mathbf{u}(t_i))\} \\ f_i(\mathbf{u}(t_i)) = I_i + I_i^u + \{f_{i-1}^* - I_{i-1}^*\} \end{cases} \quad (24)$$

ここで、 $I_i = I(\mathbf{x}(t_{i+1}) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i))$ ,  $I_i^u = I(\mathbf{u}(t_i))$ ,  $I_i^* = I(\mathbf{x}^*(t_{i+1}) | \mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}^*(t_i))$ , そして、 $\mathbf{u}^*(t_i)$  は得られる最適間伐強度であり、 $\mathbf{x}^*(t_{i+1}) = g(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}^*(t_i))$  となる。 $I_i^{u*} = I_i^u(\mathbf{u}^*(t_{i-1}))$  とすれば、下記を得る。

$$f_n^* = I_n^* + I_{n-1}^{u*} + I_{n-2}^{u*} + \cdots + I_0^{u*} \quad (25)$$

ここで得られる結果は、間伐の効果が次の間伐期にのみ現れ、それ以降は影響を及ぼさない場合である。たとえば早生樹種であるラジアータパイン、ユーカリなどがその例である。

間伐の効果は必ずしも次の間伐期で現れるものではなく、長期に及ぶ場合がある。たとえば、ある間伐期に間伐が施され、次の間伐期に間伐をしないことが最適になる場合などは長期的な間伐の影響を考慮する必要が出てくる。そこで提示されたものが MSPATH である。MSPATH での最適方程式は下記となる。

$$\begin{cases} f_i^* = \max_{\{\mathbf{u}(t_{i-j}, j)\}} \{f_{i,i-j}(\mathbf{u}_i(t_{i-j}))\} \\ f_{i,i-j}(\mathbf{u}_i(t_{i-j})) = I_{i,i-j} + I_{i,i-j}^u + \{f_{i-j}^* - I_{i-j}^*\} \end{cases} \quad (26)$$

PATH アルゴリズムとの違いは間伐の待機期間  $j$  が新たに探索する変数として加わることである。なお、 $I_{i,i-j} = I(\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{x}(t_{i-j}), \mathbf{u}_i(t_{i-j}))$  であり  $\mathbf{u}_i(t_{i-j})$  は間伐期  $t_{i-j}$  において、次の間伐期  $t_i$  での林分状態をターゲットにしたものであり、そのとき間伐施業から得られる現在価値は  $I_{i,i-j}^u = I(\mathbf{u}_i(t_{i-j}))$  となり、 $j$  は間伐待機の期間数であり、 $(t_i - t_{i-j})$  はその時間間隔となる。また、 $I_{i-j}^* = I_{i,i-j}(\mathbf{x}(t_i) | \mathbf{x}(t_{i-j}), \mathbf{u}_i^*(t_{i-j}))$  は間伐待機期間  $j$  で最適間伐  $\mathbf{u}_i^*(t_{i-j})$  が施されたときに林分状態  $\mathbf{x}(t_i)$  から得られるだろう収益現在価値である。PATH と比較して、計算量は増加するものの、間伐の長期的な効果を捉えることができる。

一般的な林分成長モデルを用いる場合、ほとんどの問題に対し MSPATH アルゴリズムで対処可能であるが、間伐補助金といった時間限定的な収益があったりする場合はその限りではない。その対応のために開発されたのが TMSPATH である、これまでの PATH, MSPATH が常に将来の間伐期をターゲットに目的関数値の評価により最適解を探求してきたのに対し、TMSPATH では過去の複数の間伐期の最適解からの経路も最適解探

求の一部とした。それが Two-Directional (Backward & Forward) である。

TMSPATH は複数期前から複数期後の間伐期において目的関数値の評価を可能とするため、MSPATH ではそれぞれの間伐期において過去の経路が一つに決まっていたのに対し、TMSPATH では過去の経路も複数となる。最適方程式は下記となる。

$$\begin{cases} f_i^* = \max_{\{\mathbf{u}(t_{i-j}), j, k\}} \{f_{i, i-j}(\mathbf{u}_i(t_{i-j}), \mathbf{u}_{i-j}^{**}(t_{i-j-k}))\} \\ f_{i, i-j}(\mathbf{u}_i(t_{i-j}), \mathbf{u}_{i-j}^{**}(t_{i-j-k})) = I_{i, i-j} + I_{i, i-j}^u \\ + I_{i-j, i-j-k}^{u**} + \{f_{i-j, i-j-k}^* - I_{i-j, i-j-k}^*\} \end{cases} \quad (27)$$

MSPATH のそれとの違いは間伐期  $t_{i-j-k}$  から向けた  $t_{i-j}$  からの間伐待機期間であり、 $I_{i-j, i-j-k}^{u**}$  にその影響が出ている。 $\mathbf{u}_{i-j}^{**}(t_{i-j-k})$  はその間伐期での最適解である。

図 4 にこれら三つのアルゴリズムの違いのイメージを DP ネットワークで示す。PATH および MSPATH は間伐期に到達する以前の間伐については Backward 的に最適な経路が固定されているが、TMSPATH はその選択も考慮しながら、Forward 的な最適間伐の探求が行われる。

実際に MSPATH アルゴリズムを用いた林分密度管理を使用した例として文献 [12] を参照されたい。

#### 4. おわりに

ここで紹介した林分単位の動的計画法は林分を経営単位とするさまざまな問題に適用可能である。その場合、考慮すべき制御とその林分成長への影響を捉えられるモデルの構築が必要不可欠となる。単純同齢林、混交林、あるいは天然林といったさまざまな林分において、炭素固定、生物多様性などの評価にも十分役立つものである。

また、林分の経営で問題になっている事象に管理放棄というアンダーユースの問題がある。これは、木材価格の低迷に伴い、所有者が伐採後の植林、間伐などの施業を放棄する問題である。こうした“放棄”という現象の予測に対して、オプション理論を応用した確

率動的計画法のモデル [13–15] なども構築されている。これらのモデルを用いることで、放棄が発生する前に対処できるような政策の探求も可能だろう。

#### 参考文献

- [1] D. W. McLean, “Planning for forest resource management: Some thoughts on method,” *New Zealand Journal of Forestry*, **28**, pp. 339–355, 1983.
- [2] 井上由扶, 『森林経理学』, 地球社, 1974.
- [3] E. J. Viitala, “Faustmann formula before Faustmann in German territorial states,” *Forest Policy and Economics*, **65**, pp. 47–58, 2016.
- [4] T. Arimizu, “Regulation of the cut by dynamic programming,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **1**, pp. 175–182, 1957.
- [5] 清家正, 小田中敏男, “DP 林業への応用—間伐量の決定の一考察—,” オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, **2**, pp. 113–120, 1958.
- [6] A. Yoshimoto, P. Asante and M. Konoshima, “Stand-level forest management planning approaches,” *Current Forestry Reports*, **2**, pp. 163–176, 2016.
- [7] 安藤貴, “同齢単純林の密度管理に関する生態学的研究,” 林業試験場研究報告, **210**, pp. 1–153, 1968.
- [8] F. J. Richards, “A flexible growth function for empirical use,” *Journal of Experimental Botany*, **10**, pp. 290–300, 1959.
- [9] 吉本敦, 加茂憲一, 柳原宏和, 『R による環境データの統計分析』, 朝倉書店, 2012.
- [10] V. Paredes, L. Gonzalo and J. D. Brodie, “Efficient specification and solution of the even aged rotation and thinning problem,” *Forest Science*, **33**, pp. 14–29, 1987.
- [11] A. Yoshimoto, V. Paredes, L. Gonzalo and J. D. Brodie, “Efficient optimization of an individual tree growth model,” *USDA Forest Service General Technical Report*, RM-161, pp. 154–162, 1988.
- [12] 吉本敦, “MSPATH アルゴリズムを用いた動的計画法による林分経営最適化モデル,” 統計数理, **51**, pp. 73–94, 2003.
- [13] A. Yoshimoto and I. Shoji, “Searching for an optimal rotation age for forest stand management under stochastic log prices,” *European Journal of Operational Research*, **105**, pp. 100–112, 1988.
- [14] A. Yoshimoto, “Stochastic control modeling for forest stand management under uncertain price dynamics through geometric Brownian motion,” *Journal of Forest Research*, **7**, pp. 81–90, 2002.
- [15] A. Yoshimoto, “Threshold price as an economic indicator for sustainable forest management under stochastic log price,” *Journal of Forest Research*, **14**, pp. 193–202, 2009.