連載

# 世界をORする視線 (19)
# 第I部　通信・デジタル技術の発展
# (3) コンピュータの発展：コンピュータ科学の数学的基礎（続き6）

住田　潮

（註：本稿は前回からの続きであり，文献リストはそのまま継承する.）

前回，植松 [67] に沿って情報源の符号化とメッセージの復元可能性について解説した．今回もその延長線上で，「符号化という工学的操作の効率性の上限が情報源の確率分布から定まるエントロピーという量で与えられる」ことを示したシャノンの第一基本定理（情報源符号化定理）を紹介する．ちなみにこの本 [67] は，「初学者にとって最良の教科書！」という帯に書かれた標語がほぼ真実と思える優れた入門書であり，情報理論を学ぼうとする人には，是非，一読をお勧めしたい．シャノンの第一基本定理を論じる前に，いくつかの前提となる概念を準備する．

## 1.　同時エントロピーと条件付きエントロピー

最初に，2 次元確率変数に関する同時エントロピーと条件付きエントロピーの概念を導入する．

**定義 1.1　同時エントロピーと条件付きエントロピー**

$\Omega_1 \times \Omega_2$ 上で定義される離散確率変数 $(X,Y)$ が同時確率 $P(x,y) = P[X=x, Y=y]$ と条件付き確率 $P(y|x) = P[Y=y|X=x], x \in \Omega_1, y \in \Omega_2$ をもつとする．

(1) $(X,Y)$ の同時エントロピー $H(X,Y)$ を

$$H(X,Y) = -\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} P(x,y)\log_2 P(x,y) \tag{1.1}$$

と定義する．

(2) $X$ に対する $Y$ の条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を

$$H(Y|X) = -\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} P(x,y)\log_2 P(y|x) \tag{1.2}$$

と定義する．

条件付きエントロピーの意味は，以下のように理解される．$X=x$ が与えられたとき，$Y$ の条件付きエントロピーは，エントロピーの定義から

$$H(Y|X=x) = -\sum_{y\in\Omega_2} P(y|x)\log_2 P(y|x) \tag{1.3}$$

と書ける．一方，式 (1.2) は，条件付き確率に関するベイズの定理

$$P(x,y) = P(x)\,P(y|x) \tag{1.4}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} P(x,y)\log_2 P(y|x) \\ &= -\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} P(x)\,P(y|x)\log_2 P(y|x) \end{aligned}$$

と変形され，この式の右辺に式 (1.3) を代入すると，

$$H(Y|X) = \sum_{x\in\Omega_1} P(x)\,H(Y|X=x) \tag{1.5}$$

が成立する．すなわち，$X$ に対する $Y$ の条件付エントロピー $H(Y|X)$ は，$X=x$ という条件下における $Y$ の条件付きエントロピーを $X$ に関して平均したものと考えられる．

簡単な例で，定義 1.1 の内容を検討してみよう．公平なサイコロを 1 回振ったとき，その目が偶数であれば 0，奇数であれば 1 の値を取る確率変数を $X$，その

すみた　うしお
筑波大学名誉教授
〒 305–8573 茨城県つくば市天王台 1–1–1

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited. 

目が 1〜3 であれば 0, 4〜6 であれば 1 の値を取る確率変数を $Y$ とする．この場合，$\Omega_1 = \Omega_2 = \{0,1\}$ であり，同時確率 $P(x,y)$ は表 1 のようになる．たとえば 1 行目に着目すると，出た目が偶数 $(X=0)$ で 3 以下 $(Y=0)$ となるのは 2 の場合のみで，その同時確率は 1/6 である．同時エントロピー $H(X,Y)$ を求めると，

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= \frac{1}{6} \times \left( -2 \times \log_2 \frac{1}{6} - 2 \times \log_2 \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6} \times (2 \times \log_2 6 + 2 \times \log_2 3) \\ &= \frac{1}{6} \times (2 + 4\log_2 3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\log_2 3 \quad (1.6) \end{aligned}$$

となる．一方，条件付き確率 $P(y|x)$ は表 2 のようになるので，条件付きエントロピー $H(Y|X)$ は，

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \frac{1}{6} \times \left( 2 \times \log_2 3 + 2 \times \log_2 \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{1}{6} \times (2\log_2 3 + 2\log_2 3 - 2) \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\log_2 3 \qquad (1.7) \end{aligned}$$

となる．

**表 1**　$X$ と $Y$ の同時確率 $P(x,y)$

| $x$ | $y$ | $P(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/6 |
| 0 | 1 | 1/3 |
| 1 | 0 | 1/3 |
| 1 | 1 | 1/6 |

**表 2**　$X$ と $Y$ の条件付き確率 $P(y|x)$

| $x$ | $y$ | $P(y|x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/3 |
| 0 | 1 | 2/3 |
| 1 | 0 | 2/3 |
| 1 | 1 | 1/3 |

この例で，$H(Y|X) < H(X,Y)$ が成立しているが，これは，偶数か否かという条件付けを行うことによって同時エントロピーは減少すること，したがって，不確実性の度合が減少することを意味している．この性質は一般的に成立すると考えるのが自然で，次に，この大小関係が偶然ではないことを証明する．

**定理 1.2**　エントロピーの加法性

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

[証明]

式 (1.4) で与えられたベイズの定理に注意すると，

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= -\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} P(x,y)\log_2 P(x,y) \\ &= -\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} P(x,y)\log_2 \{P(x)P(y|x)\} \\ &= -\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} P(x,y)\{\log_2 P(x) + \log_2 P(y|x)\} \\ &= -\sum_{x\in\Omega_1}\left\{\sum_{y\in\Omega_2} P(x,y)\right\}\log_2 P(x) \\ &\quad -\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2} P(x,y)\log_2 P(y|x) \\ &= -\sum_{x\in\Omega_1} P(x)\log_2 P(x) + H(Y|X) \\ &= H(X) + H(Y|X) \end{aligned}$$

が成立する．定義 1.1 より，同時エントロピーは $X$ と $Y$ について対称であるので定理が証明された．　□

定理 1.2 は，「同時確率変数 $(X,Y)$ の曖昧さは，確率変数 $X$ の曖昧さと，確率変数 $X$ を知ったときの確率変数 $Y$ の曖昧さの和になる」ことを主張している．次の補題は，$H(X) \geq 0$ とその等号条件より直ちに結論される．

**補題 1.3**

$$\max\{H(Y|X), H(X|Y)\} \leq H(X,Y)$$

$X$ または $Y$ が確定情報に対応するとき，また，そのときに限って，等号が成立する．

補題 1.3 は，条件付けを行うことによって同時エントロピーが減少すること，すなわち不確実性の度合が減少することを意味している．

## 2.　相対エントロピーとシャノンの補助定理

同じ標本空間上で定義される確率変数 $X, Y$ について，$Y$ に対する $X$ のエントロピーの異なり具合を測る指標が相対エントロピーである．

**定義 2.1**　相対エントロピー

標本空間 $\Omega$ 上で定義される離散確率変数 $X$ と $Y$ が，確率分布 $P[X=x] = P(x), P[Y=x] =$


Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

$Q(x), x \in \Omega$ をもつとき，$Y$ に対する $X$ の相対エントロピー $H(P||Q)$ を

$$H(P||Q)=\sum_{x\in\Omega} P(x)\{\log_2 P(x)-\log_2 Q(x)\}$$
$$=\sum_{x\in\Omega} P(x)\log_2\frac{P(x)}{Q(x)} \quad (2.1)$$

と定義する．
$H(P||Q)$ は $P$ と $Q$ について対象ではなく，一般的に，$H(P||Q)\neq H(Q|P)$ である．

相対エントロピーの意味を理解するため，$X$ の情報エントロピー

$$H(X)=-\sum_{x\in\Omega} P(x)\log_2 P(x)$$

を，連載第 18 回で議論した符号化の観点から再解釈してみる．$-\log_2 P(x)$ は，確率 $P(x)$ で生起する事象に関する自己情報量で，$P(x)$ に関して単調減少である．すなわち，生起確率が高いほどそれに関する自己情報量は小さくなる．この情報を符号化して送信することを考えるとき，「発生確率の高いものに対しては符号語長を短くする」という原則から，符号語長を自己情報量に比例する形で符号化することは自然である．すなわち，確率 $P(x)$ で生起する記号 $x$ の符号語 $C(x)$ を，その長さが

$$l_C(x)=|C(x)|=-\alpha\log_2 P(x)$$

で与えられるように設定する．この式の右辺は整数とはならないかも知れないが，議論をわかりやすくするため，ここではそれを無視し比例定数 $\alpha$ を 1 とすると，エントロピー $H(X)$ は平均符号語長を表わすことになる．

いま事象を観察した結果，確率分布は $Q(x)$ であると判断し，$x\in\Omega$ に対する符号語長を $-\log_2 Q(x)$ として符号化したとしよう．しかし，真実の確率分布が $P(x)$ であった場合，この誤判断に基づく平均符号長 $ER(P||Q)$ は

$$ER(P||Q)=-\sum_{x\in\Omega} P(x)\log_2 Q(x) \quad (2.2)$$

で与えられることになる．$ER(P||P)=H(X)$ と書けることに注意すると，定義 2.1 から，

$$H(P||Q)=ER(P||Q)-ER(P||P) \quad (2.3)$$

となる．すなわち，相対エントロピーは，「$P(x)$ を $Q(x)$ と誤判断して符号化を行った際，その平均符号語長は本来のそれからどれだけ乖離するか」を測る指標と解釈できる．

$P(x)$ を $Q(x)$ と誤判断すれば，平均符号語長は，正しい判断をした場合と比較して増加すると考えるのが自然で，$ER(P||Q)\geq ER(P||P)$，したがって $H(P||Q)\geq 0$ となることが予想される．実は，これが次に述べる「相対エントロピーの非負性」を主張するシャノンの補助定理である．証明に入る前に，凸関数に関するイェンセンの不等式 (Jensen's Inequality) を示しておく．連載第 18 回で狭義の凹関数について論じたが，それに $-1$ を掛けて上下をひっくり返したものが狭義の凸関数である．

**定義 2.2　凸関数**

区間 $[a,b]$ 上で定義される関数 $f(x)$ が，$x_1,x_2\in[a,b]$ と任意の $0\leq\lambda\leq 1$ に対して，

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \quad (2.4)$$

を満たすとき，$f$ は $[a,b]$ 上で凸である，あるいは凸関数であるという．式 (2.4) の等号成立が $x_1=x_2$ の場合に限るとき，$f$ を狭義の凸関数と呼ぶ．

**定理 2.3　イェンセンの不等式**

$\Omega=\{x_1,\ldots,x_n\}$ 上で定義される確率変数 $X$ と凸関数 $f$ に対し，$f(E[X])\leq E[f(X)]$ が成立する．すなわち，$p_i=P[X=x_i], i=1,\ldots,n$ とすると，

$$f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \quad (2.5)$$

が成立する．$X$ が定数の場合に等号が成立し，さらに $f$ が狭義の凸関数であれば，等号成立はその場合に限る．

[証明]

帰納法で証明する．$n=2$ の場合は，式 (2.4) で $p_1=\lambda$，$p_2=1-\lambda$ と置くと，定義 2.2 から直ちに成立する．式 (2.5) が $n-1$ で成立すると仮定しよう．$q_i=p_i/(1-p_n), i=1,\ldots,n-1$ と置くと，

$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)=p_n f(x_n)+(1-p_n)\sum_{i=1}^{n-1} q_i f(x_i)$$

と書ける．$\sum_{i=1}^{n-1} q_i=1$ であり，帰納法の仮定と $f$ が凸関数であることを用いると，

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited. 

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geq p_n f(x_n) + (1-p_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} q_i x_i\right)$$
$$\geq f\left(p_n x_n + (1-p_n)\sum_{i=1}^{n-1} q_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

が成立する．

$X$ が定数の場合は，ある番号 $i$ が存在して $p_i = 1, p_j = 0, j \neq i$ となるので，等号が成立する．$f$ が狭義の凸関数であれば，等号成立はその場合に限ることも定義 2.2 から明らかであり，定理が証明された．□

イェンセンの不等式を図形的に解釈すると，$f$ が凸関数であれば，$x_1, \ldots, x_n$ に対し，$\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ が構成する凸包が $f(x)$ のグラフの上側に位置することを意味する．図 1 に，$n = 3$ の場合の簡単な例を示しておく．

以下の議論で記法を簡便化するため，記法上の約束を定めておく．

**記法上の約束　2.4**

$$0\log_2 0 = 0; (0/0) = 1; 0\log_2(0/0) = 0;$$
$$p > 0 \text{ のとき } p\log_2(p/0) = \infty$$

**定理 2.5　シャノンの補助定理**

定義 2.1 の相対エントロピー $H(P||Q)$ について

$$H(P||Q) \geq 0$$

が成立する．等号成立は，すべての $x \in \Omega$ に対して $P(x) = Q(x)$ のとき，またその場合に限る．

[証明]

確率 $p_i = p[X = i]$ が正となる領域を

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega | p_i > 0\}$$

とおくと，定義 2.1 より，

$$H(P||Q) = \sum_{x\in\Omega} P(x)\log_2 \frac{P(x)}{Q(x)}$$
$$= \sum_{x\in\Omega_+} P(x)\log_2 \frac{P(x)}{Q(x)}$$
$$= -\sum_{x\in\Omega_+} P(x)\log_2 \frac{Q(x)}{P(x)}$$

と書ける．$-\log_2 t$ は狭義の凸関数であるので，定理 2.3 より，

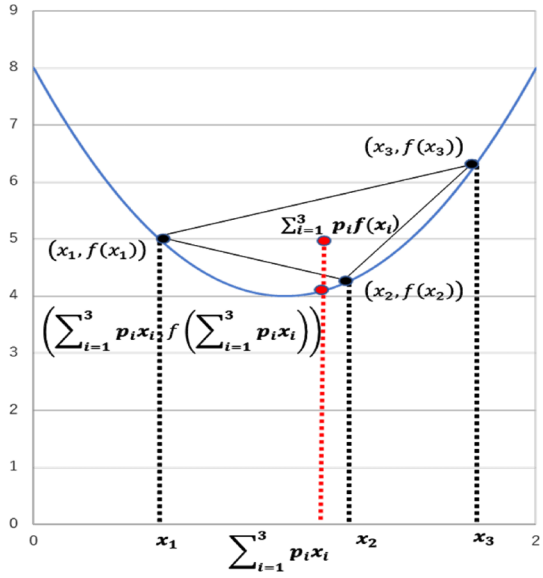


**図 1**　イェンセンの不等式の図形的意味

$$H(P||Q) = -\sum_{x\in\Omega_+} P(x)\log_2 \frac{Q(x)}{P(x)}$$
$$\geq -\log_2\left(\sum_{x\in\Omega_+} P(x)\frac{Q(x)}{P(x)}\right) \tag{2.6}$$
$$= -\log_2\left(\sum_{x\in\Omega_+} Q(x)\right) \geq -\log_2(1) = 0$$

(2.7)

が成立する．

すべての $x \in \Omega$ に対して $P(x) = Q(x)$ であるとき，$H(P||Q) = 0$ となることは自明である．逆に，$H(P||Q) = 0$ であるとする．このとき，イェンセンの不等式 (2.6) が狭義で成立すれば $H(P||Q) > 0$ となるので，イェンセンの不等式は等号で成立しなければならない．等号成立は，確率 $P(x)$ で値 $Q(x)/P(x)$ を取る $\Omega_+$ 上の確率変数 $Z$ が定数である場合に限るので，すべての $x \in \Omega_+$ に対してある定数 $\alpha$ が存在して，

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \alpha$$

となる．いま，ある $x \in \Omega \setminus \Omega_+$ に対して $Q(x) > 0$ であるとすると，式 (2.7) の最後の不等式が狭義に成立して $H(P||Q) > 0$ となる．したがって，すべての $x \in \Omega \setminus \Omega_+$ に対して $Q(x) = 0$ である．これより，

$$1 = \sum_{x\in\Omega} Q(x) = \sum_{x\in\Omega_+} Q(x)$$
$$= \sum_{x\in\Omega_+} \alpha P(x) = \alpha$$

が成立し，すべての $x \in \Omega$ に対して $P(x) = Q(x)$ で


Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

あることが証明された．□

非負の数列 $(u_i)_{i=1}^n$ と $(v_i)_{i=1}^n$ を考える．$U = \sum_{i=1}^n u_i$，$V = \sum_{i=1}^n v_i$ に対して，$\hat{u}_i = u_i/U$ と $\hat{v}_i = v_i/V$ を定義すると，これらは離散確率分布となる．記法上の約束 2.4 を前提として，相対エントロピーの定義式 (2.1) における確率分布 $P(x)$ と $Q(x)$ が $(\hat{u}_i)_{i=1}^n$ と $(\hat{v}_i)_{i=1}^n$ をもつとし，定理 2.5 の非負性を適用すると，次の対数和不等式が得られる．この不等式は，情報理論では良く使われる形であり，後述するように，シャノンの第一基本定理の証明にも用いられる．

**定理 2.6　対数和不等式**

非負の数列 $(u_i)_{i=1}^n$ と $(v_i)_{i=1}^n$　について

$$\sum_{i=1}^n u_i \log_2 \frac{u_i}{v_i} \geq \left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \log_2 \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$$

が成立する．等号が成立するのは，$u_i/v_i = c, i = 1, \ldots, n$ の場合，また，その場合に限る．

シャノンの補助定理 2.5 から，有限集合上で定義される確率変数 $X$ に対するエントロピーの上界を求めることができる．

**定理 2.7　有限集合上で定義されるエントロピーの上界**

有限集合 $\Omega$ 上で定義される確率変数 $X$ に対して，

$$H(X) \leq \log_2 |\Omega|$$

が成立する．ここで，$|\Omega|$ は有限集合 $\Omega$ の要素の数を表わす．等号成立は，$X$ が $\Omega$ 上の一様分布にしたがうとき，またその場合に限る．

[証明]

$X$ の確率分布を $P(x)$，$\Omega$ 上の一様分布を

$$U(x) = \frac{1}{|\Omega|} \tag{2.8}$$

とすると，両者の相対エントロピーは，

$$\begin{aligned} H(P||U) &= \sum_{x\in\Omega} P(x) \log_2 \frac{P(x)}{U(x)} \\ &= \sum_{x\in\Omega} P(x) \log_2 P(x) \\ &\quad + \sum_{x\in\Omega} P(x) \log_2 |\Omega| \\ &= -H(X) + \log_2 |\Omega| \end{aligned}$$

と書くことができ，定理 2.5 から不等式が成立する．等号成立条件は，相対エントロピーが 0 となる条件から導かれる．□

## 3.　相互情報量とエントロピー

エントロピーの概念を離れて式 (2.1) を眺めると，二つの確率分布 $P(x)$ と $Q(x)$ が一致する場合に 0 の値を取るので，この式は両分布がどれだけ異なっているのかを測る指標とも読み取れる．この観点から，相対エントロピーは Kullback-Leibler Divergence とも呼ばれる．この考え方を，2 次元確率分布の独立性を測る目的に適用することで得られるのが相互情報量 (mutual information) の概念である．

**定義 3.1　相互情報量**

$\Omega_1 \times \Omega_2$ 上で定義される離散確率変数 $(X, Y)$ の同時確率を $P_{XY}(x, y) = P[X = x, Y = y]$，周辺確率を $P_X(x) = \sum_{y\in\Omega_2} P_{XY}(x, y)$, $P_Y(y) = \sum_{x\in\Omega_1} P_{XY}(x, y)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} &I(X;Y) = H(P_{XY}||P_X P_Y) \\ &= \sum_{x\in\Omega_1} \sum_{y\in\Omega_2} P_{XY}(x, y) \log_2 \frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x) P_Y(y)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

を $X$ と $Y$ の相互情報量と呼ぶ．

相互情報量は $X$ と $Y$ について対称であり，さらに，相互情報量とエントロピーの間に，次の定理で示す関係が存在する．

**定理 3.2　相互情報量とエントロピーの関係**

(a) $I(X;Y) = I(Y;X)$

(b) $X$ と $Y$ が独立のとき，また，そのときに限り，$I(X;Y) = 0$

(c) $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$

(d) $I(X;X) = H(X)$

(e) $0 \leq I(X;Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$

(f) $I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

[証明]

定義 3.1 より，(a) は自明．また $X$ と $Y$ が独立のとき，$P_{XY}(x, y) = P_X(x) P_Y(y)$ となるので，(b) も定理 2.5 と定義 3.1 より直ちに帰結される．ベイズの定理 (1.4) より，

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited. 

$$
\begin{aligned}
&I(X;Y)\\
&=\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2}P_{XY}(x,y)\log_2\frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)P_Y(y)}\\
&=\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2}P_{XY}(x,y)\log_2\frac{P_{X|Y}(x|y)}{P_X(x)}\\
&=\sum_{x\in\Omega_1}\sum_{y\in\Omega_2}P_{XY}(x,y)\log_2 P_{X|Y}(x|y)\\
&\quad-\sum_{x\in\Omega_1}\left(\sum_{y\in\Omega_2}P_{XY}(x,y)\right)\log_2 P_X(x)\\
&=-H(X|Y)+H(X)
\end{aligned}
$$

が成立し，(a) の対称性から (c) が証明される．これより，$P[X=Y]=1$ の場合，条件付きエントロピー $H(X|X)$ は 0 となることに注意すると，

$$I(X;X)=H(X)-H(X|X)=H(X)$$

となり，(d) が成立する．すなわち，自分自身との相互情報量はエントロピーと一致する．(e) は，定理 2.5 の相対エントロピーの非負性と定義 3.1 から明らか．(f) については，定理 1.2 より

$$H(Y|X)=H(X,Y)-H(X)$$

が得られ，これと (c) を用いると

$$
\begin{aligned}
I(X;Y)&=H(Y)-H(Y|X)\\
&=H(X)+H(Y)-H(X,Y)
\end{aligned}
$$

が成立し，定理が証明されたことになる．□

定理 3.2 の内容は，図 2 に示すように，集合論で使われるベン図を援用すると理解しやすい．同時エントロピー $H(X,Y)$ は，$X$ と $Y$ のそれぞれのエントロピー $H(X)$ と $H(Y)$ の和集合に対応し，相互情報量 $I(X;Y)$ は共通集合に対応している．また，条件付きエントロピー $H(X|Y)$ は $H(X)$ と相互情報量 $I(X;Y)$ との差集合，$H(Y|X)$ は $H(Y)$ と $I(X;Y)$ との差集合に対応している．

定理 1.2 と，定理 3.2 (b) (c) (e) から，次の補題が直ちに帰結される．

**補題 3.3　エントロピーと条件付きエントロピーの関係**

$$
\begin{aligned}
H(X|Y)\le H(X)\le H(X,Y)\\
H(Y|X)\le H(Y)\le H(X,Y)
\end{aligned}
$$

$X$ と $Y$ が独立のとき，また，そのときに限って等号が成立する．

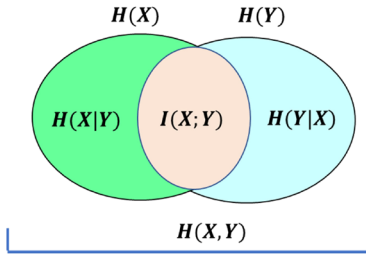


**図 2**　同時エントロピー・条件付きエントロピー・相互情報量

## 4.　シャノンの第一基本定理（情報源符号化定理）

いよいよ，シャノンの第一基本定理（情報源符号化定理）を証明することに取りかかる．連載第 18 回より，情報源の符号化と符号語長に関する記法を復習しておこう．

メッセージを表わす記号の集合を $\mathcal{S}$，その要素 $x\in S$ に有限な 0-1 の列を割り当てる写像 $C\colon \mathcal{S}\to B^\infty$ を符号，その値 $C(x)$ を記号 $x$ の符号語，その長さを符号語長と呼び，$l_C(x)=|C(x)|$ で表わす．このとき，$\mathcal{S}$ 上の確率変数 $X$ に対する符号 $C$ の平均符号語長 $L_C(X)$ は

$$L_C(X)=\sum_{x\in\mathcal{S}}P(x)l_C(x)\qquad(4.1)$$

で与えられる．また，$C$ の逆像 $C^{-1}\colon B^\infty\to\mathcal{S}$ が存在するとき，$y=C(x)$ に対して $x=C^{-1}(y)$ を $y$ の $x$ への復元と呼ぶ．

情報源の生成するメッセージとは，$\mathcal{S}$ に属する記号を有限個並べて生成される系列であり，$\boldsymbol{x}=[x_1,\dots,x_n]\in\mathcal{S}^n$ に対応する符号列を $C(\boldsymbol{x})=C(x_1),\dots,C(x_n)\in B^\infty$ と書く．この写像は個別記号を符号化する $C(x_j)$ の拡張写像であり，隣接する符号間の境界を示す記号をもたない．どの符号値も，ほかの符号値の先頭部分と一致しない符号を語頭符号と呼ぶ．語頭符号は，ルート・ノードから出発し，0-1 の分岐を繰り返すことによって，すべての符号をリーフ・ノードにもつ 2 分木構造として表現することが可能である．どの符号値も，ほかの符号値の先頭部分と一致しないという定義から，ある記号の符号値が中間ノードとして現れることはなく，すべての符号値がリーフ・ノードとして表現されることになり，一意復元可能符号となっている．以下の議論では，語頭符号のみを対象とし，例として，次の語頭符号 $C$ とその 2 分木構造を示しておく（表 3）．


Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

**表 3**　語頭符号 $C$

| 記号 | 符号 $C$ |
|---|---|
| a | 0 |
| b | 10 |
| c | 110 |

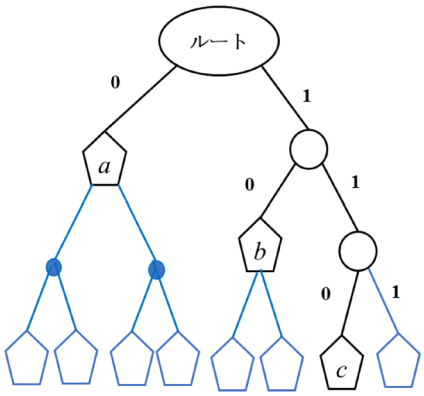


**図 3**　語頭符号 $C$ の木構造

図 3 では，語頭符号 $C$ の構成する 2 分木を黒で示し，それに青で描かれた部分を書き加えてできる完全 2 分木を同時に示してある．

シャノンの第一基本定理の証明に重要な役割を果たすのが，次のクラフトの不等式である．

**定理 4.1**　**クラフトの不等式**

$m$ 個の記号で構成される符号 $C$ を考え，それぞれの符号語長が $l_1, l_2, \ldots, l_m$ で与えられているとする．もし，この符号が語頭符号であれば，

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{-l_i} \leq 1 \qquad (4.2)$$

を満たす．逆に不等式 (4.2) が満たされるならば，深度 $l_m$ の完全 2 分木の中から，符号語長 $l_1, l_2, \ldots, l_m$ をもつ語頭符号を取り出すことができる．

[証明]

必要であれば並べ替えることにより，一般性を失うことなく，$l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_m$ と仮定できる．

対応する語頭記号の構成する 2 分木 $T(C)$ を考え，それを部分木として含む完全 2 分木を $T$, $T$ のリーフ・ノードの集合を $L$ と定義する．深度 $l_i (i = 1, \ldots, m-1)$ の $T(C)$ のリーフ・ノードが下方で網羅する $T$ のリーフ・ノードの集合を $L_i$，深度 $l_m$ の $T(C)$ のリーフ・ノードの集合を $L_m$ とすると，明らかに

$$i \neq j \Longrightarrow L_i \cap L_j = \phi; \cup_{i=1}^{m} L_i \subset L \qquad (4.3)$$

が成立する．

今，$T$ のルート・ノードに重み 1 を与え，深度 $l_i$ に並ぶ $2^{l_i}$ 個の各節点に $2^{-l_i}$ の重みを与える．特に，$L$ に属する深度 $l_m$ に並ぶ $2^{l_m}$ 個のリーフ・ノードの重みは $2^{-l_m}$ であり，それらの重みの総和は 1 である．明らかに，不等式 (4.2) の左辺は，深度 $l_i$ に位置する $T(C)$ のリーフ・ノードの重み $2^{-l_i}$ を $i = 1$ から $m$ まで足したものである．したがって，式 (4.3) より不等式 (4.2) が証明された．

逆に，ある符号語長の順序対　$l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_m$ が不等式 (4.2) を満たすものとする．まず，議論を簡潔にするため，$l_1 < l_2 < \ldots < l_m$ を仮定する．今，ルート・ノードから出発して，深度が $l_1$ となる完全 2 分木 $T_1$ を構成し，そのリーフ・ノードの一つを選んで符号長 $l_1$ の符号語に対応させる．それ以外のリーフ・ノードについては，それぞれの下に深度 $l_2 - l_1$ の完全 2 分木を付加し，結果として得られる 2 分木を $T_2$ とする．符号語として付与されていない $T_2$ のリーフ・ノードの数は，$2^{l_2} - 2^{l_2 - l_1} = 2^{l_2}\left(1 - 2^{-l_1}\right) > 0$ となり，深度 $l_2$ の $T_2$ のリーフ・ノードが一つ選べるので，それを符号長 $l_2$ の符号語に対応させる．

この手続きを $k-1$ 回繰り返し，その結果，2 分木 $T_{k-1}$ を得て，深度 $l_{k-1}$ の $T_{k-1}$ のリーフ・ノードを一つ選び，それを符号長 $l_{k-1}$ の符号語に対応させることができたとしよう．選ばれなかった $T_{k-1}$ のリーフ・ノードのそれぞれの下に深度 $l_k - l_{k-1}$ の完全 2 分木を付加し，得られた 2 分木を $T_k$ とすると，そのリーフ・ノードの数は，不等式 (4.2) より，

$$2^{l_k} - 2^{l_k - l_1} - 2^{l_k - l_2} - \ldots - 2^{l_k - l_{k-1}}$$

$$= 2^{l_k}\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} 2^{-l_i}\right) > 2^{l_k}\left(1 - \sum_{i=1}^{m} 2^{-l_i}\right) > 0$$

を満たし，そこから一つを選んで符号長 $l_k$ の符号語に対応させることができることになる．よって帰納法により，この手続きを $l_1$ から $l_m$ まで $m$ 回繰り返し，すべての符号がリーフ・ノードとして与えられる 2 分木を構成できたことになり，対応する符号が語頭符号となることが証明された．

もし隣接する符号語長が同じとなった場合は，違いが出るまで，同じ深度のリーフ・ノードから横並びに選び符号語に対応させ続ければ良い．厳密には，上述の議論に沿って帰納的に証明する必要があるが，ここでは詳細を省く．□


Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

図 3 では，符号 $a$ に対応する重みが 1/2，符号 $b$ の重みが 1/4，符号 $c$ の重みが 1/8 で，その和は 7/8 で 1 よりも小さくなっている．その理由は，$\cup_{i=1}^{3} L_i$ が $L$ を網羅しておらず，一番右端の $L$ のリーフ・ノードが $T(C)$ から外れているからである．

次の定理で，語頭符号の平均符号語長が対応するエントロピーよりも小さくできないことを示す．シャノンの第一基本定理の証明に向けて，重要な第一歩となる．

**定理 4.2　情報源符号化逆定理**

$\mathcal{S}$ 上で定義される確率変数 $X$ が確率分布 $P(x)$ をもつとする．このとき，任意の語頭符号 $C$ の平均符号語長 $L_C(X)$ は，次の不等式を満たす．

$$H(X) \leq L_C(X) \tag{4.4}$$

等号成立は，すべての $x \in \mathcal{S}$ に対し $P(x) = 2^{-l_C(x)}$ となるとき，また，その場合に限る．

[証明]

平均符号語長とエントロピーとの差を評価すると，

$$\begin{aligned} L_C(X) - H(X) &= \sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)\, l_C(x) \\ &\quad + \sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)\log_2 P(x) \\ &= \sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)\left\{\log_2 2^{l_C(x)} + \log_2 P(x)\right\} \\ &= \sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)\log_2 \frac{P(x)}{2^{-l_C(x)}} \end{aligned}$$

を得る．この最後の式に定理 2.6 の対数和不等式を適用すると，

$$\begin{aligned} L_C(X) - H(X) &= \sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)\log_2 \frac{P(x)}{2^{-l_C(x)}} \\ &\geq \left\{\sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)\right\}\log_2 \frac{\sum_{x\in S} P(x)}{\sum_{x\in S} 2^{-l_C(x)}} \\ &= \log_2 \frac{1}{\sum_{x\in S} 2^{-l_C(x)}} \end{aligned}$$

が成立する．ここで，定理 4.1 のクラフトの不等式より $\sum_{x\in S} 2^{-l_C(x)} \leq 1$ であることに注意すると，

$$L_C(X) - H(X) \geq \log_2 \frac{1}{\sum_{x\in S} 2^{-l_C(x)}} \geq \log_2 \frac{1}{1} = 0$$

が証明された．

$L_C(X) - H(X) = 0$ となる場合は，対数和不等式の等号成立条件から，ある定数 $\alpha$ が存在して

$$\frac{P(x)}{2^{-l_C(x)}} = \alpha$$

とならなければならない．さらに，クラフトの不等式の等号成立条件から

$$\sum_{x\in S} 2^{-l_C(x)} = 1$$

であるから，$1 = \sum_{x\in S} P(x) = \alpha \sum_{x\in S} 2^{-l_C(x)} = \alpha$ が帰結される．□

この定理は，情報 $X$ をそのエントロピー $H(X)$ より圧縮してしまうと，その符号は語頭符号とはなり得ず，復元できなくなることを示している点で極めて重要である．

**定理 4.3　シャノンの第一基本定理（情報源符号化定理）**

$\mathcal{S}$ 上で定義される確率変数 $X$ が確率分布 $P(x)$ をもつとする．語頭符号の集合を $HC(\mathcal{S})$ とし，平均符号語長を最小にする $C_X^* \in HC(\mathcal{S})$ を

$$C_X^* = \underset{C\in HC(\mathcal{S})}{\operatorname{argmin}} \left\{ L_C(X) = \sum_{x\in\mathcal{S}} P(x) l_C(x) \right\}$$

と定義する．このとき，

$$H(X) \leq L_{C_X^*}(X) < H(X) + 1 \tag{4.5}$$

が成立する．

[証明]

定理 4.2 で，$L_C(X) - H(X) = 0$ となるのは，$P(x) = 2^{-l_C(x)}$ の場合に限ることを示した．したがって，なるべく平均符号語長を短くする符号 $C \in HC(S)$ を考えるには，$P(x) = 2^{-l_C(x)}$ を $l_C(X)$ について解いて $l_C(X) = -\log_2 P(x)$ とするのが自然であるが，この式の右辺は整数になるとは限らない．そこで，整数でない場合は切り上げることで符号語長を定めることとし，$\hat{C}$ を

$$l_{\hat{C}}(X) = \lceil -\log_2 P(x) \rceil$$

と定義する．明らかに $\lceil -\log_2 P(x) \rceil \geq -\log_2 P(x)$ であるから，

$$\begin{aligned} \sum_{x\in\mathcal{S}} 2^{-l_{\hat{C}}(x)} &= \sum_{x\in\mathcal{S}} 2^{-\lceil -\log_2 P(x)\rceil} \\ &\leq \sum_{x\in\mathcal{S}} 2^{-\{-\log_2 P(x)\}} = \sum_{x\in\mathcal{S}} P(x) = 1 \end{aligned}$$

となり，$\hat{C}$ はクラフトの不等式を満たすので，定理 4.1 より $\hat{C} \in HC(S)$ とできる．

$\hat{C}$ の平均符号化長を求めると，


Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

$$L_{\hat{C}}(X)=\sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)\, l_{\hat{c}}(x)$$
$$=\sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)\lceil -\log_2 P(x)\rceil$$

と書ける．切り上げの定義から，$\lceil -\log_2 P(x)\rceil < -\log_2 P(x)+1$ が成立するので，

$$L_{\hat{C}}(X) < \sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)\{-\log_2 P(x)+1\}$$
$$= -\sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)\log_2 P(x)+\sum_{x\in\mathcal{S}} P(x)$$
$$= H(X)+1$$

となる．$C_X^*$ の定義から，$L_{C_X^*}(X)\le L_{\hat{C}}(X)$ であり，この結果と定理 4.2 から定理が証明される．□

シャノンの第一基本定理は，確率変数 $X$ によって記述される情報を符号化するとき，$H(X)$ と $H(X)+1$ の間まで送信量を圧縮することが可能であることを示している．次回は，そのような符号化が実際どのようにして実現できるのか，いくつかの手法を簡単な例を用いて紹介する．

第一基本定理は誤通信が発生しないということを前提としており，現実的な観点から，シャノンは第一基本定理に満足しなかった．雑音干渉およびデータ破損が発生するとき，そうした誤りを検出・訂正するための最大効率の水準を示すべく努力し，確立されたのがシャノンの第二基本定理（通信路符号化定理）である．この定理についても，次回以降，議論を進めることにする．

## 参考文献


[1] H. Goldstine, The Computer from Pascal to von Neumann, Princeton University Press, 1972.（末包良太，米口肇，犬伏茂之訳，『復刊　計算機の歴史―パスカルからノイマンまで―』，共立出版，2016.）

[2] S. McCartney, The Triumphs and Tragedies of the World's First Computer, Walker, 1999.（日暮雅通訳，『エニアック―世界最初のコンピュータ開発秘話―』，パーソナルメディア，2001.）

[3] 坂村健，『痛快！　コンピュータ学』，集英社，1999（文庫版 2002）.

[4] 竹内伸，『実物でたどるコンピュータの歴史―石ころからリンゴへ―』，東京理科大学出版センター(編)，東京書籍，2012.

[5] 小田徹，『コンピュータ開発のはてしない物語―起源から驚きの近未来まで―』，技術評論社，2016.

[6] Wikipedia, Francois Viéte, https://enwikipedia.org/wiki/Francois_Viéte（2021 年 12 月 14 日閲覧）

[7] E. T. Bell, *Men of Mathematics Volume 1*, Simon & Schuster, 1937.（田中勇・銀林浩訳，『数学をつくった人びと上』，東京図書，1976.）

[8] Wikipedia, René Descartes, https://en.wikipedia.org/wiki/René_Descartes（2021 年 12 月 21 日閲覧）

[9] E. T. Bell, *Men of Mathematics Volume 2*, Simon & Schuster, 1937.（田中勇・銀林浩訳，『数学をつくった人びと下』，東京図書，1976.）

[10] Wikipedia, George Boole, https://en.wikipedia.org/wiki/George_Boole（2021 年 12 月 14 日閲覧）

[11] P. J. Nahin, *The Logician and the Engineer: How George Boole and Claude Shannon Created the Information Age*, Princeton University Press, 2012,（松浦俊輔訳，『0 と 1 の話―ブール代数とシャノン理論―』，青土社，2013.）

[12] J. Soni and R. Goodman, *A Mind at Play: How Claude Shannon Invented the Information Age*, Simon & Schuster, 2017,（小坂恵理訳，『クロード・シャノン―情報時代を発明した男―』，筑摩書房，2019.）

[13] Wikipedia, Claude Shannon, https://en.wikipedia.org/wiki/Claude_Shannon（2021 年 12 月 20 日閲覧）

[14] Wikipedia, Alan Turing, https://en.wikipedia.org/wiki/Alan_Turing（2021 年 12 月 20 日閲覧）

[15] B. J. Copeland,*Turing: Pioneer of the Information Age*, Oxford University Press, 2012,（服部桂訳，『チューリング―情報時代のパイオニア―』，NTT 出版，2013.）

[16] A. Hodges, *Alan Turing: The Enigma*, Princeton University Press, 2014,（土屋俊・土屋希和子訳，『エニグマ―アラン・チューリング伝―』，勁草書房，2015.）

[17] 高岡詠子，『チューリングの計算理論入門―チューリング・マシンからコンピュータへ―』，講談社，2014.

[18] Wikipedia, Galileo Galilei, https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei（2021 年 12 月 21 日閲覧）

[19] Wikipedia, Nicolaus Copernicus, https://en.wikipedia.org/wiki/Nicolaus_Copernicus（2021 年 12 月 21 日閲覧）

[20] Wikipedia, Marin Mersenne, https://en.wikipedia.org/wiki/Marin_Mersenne（2021 年 12 月 21 日閲覧）

[21] Wikipedia, Isaac Beeckman, https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Beeckman（2022 年 1 月 2 日閲覧）

[22] Wikipedia, Adrien Baillet, https://en.wikipedia.org/wiki/Adrien_Baillet（2022 年 1 月 2 日閲覧）

[23] Wikipedia, Elisabeth of the Palatinate, https://en.wikipedia.org/wiki/Elisabeth_of_the_Palatinate（2022 年 1 月 2 日閲覧）

[24] Wikipedia，エリーザベト・フォン・デア・プファルツ (1618-1680), https://ja.wikipedia.org/wiki/ エリーザベト・フォン・デア・プファルツ (1618-1680)（2022 年 1 月 2 日閲覧）

[25] 有賀暢迪，“合理力学の一例としての衝突理論　1720–1730 年”，科学哲学科学史研究，**6**, pp. 17–37, 2012.

[26] Wikipedia，ソディの 6 球連鎖，https://ja.wikipedia.org/wiki/ソディの 6 球連鎖（2022 年 1 月 4 日閲覧）

[27] Wikipedia, Thorold Gosset, https://en.wikipedia.org/wiki/Thorold_Gosset（2022 年 1 月 4 日閲覧）

[28] 寒川町ガイド，https://samukawaguide.blogspot.com/2019/12/6.html（2022 年 1 月 4 日閲覧）

[29] Wikipedia, Gottfried Wilhelm Leibniz, https://en.wikipedia.org/wiki/Gottf_ried_Wilhelm_Leibniz（2022 年 1 月 4 日閲覧）

[30] Wikipedia, Christina, Queen of Sweden, https://en.wikipedia.org/wiki/Christina,_Queen_of_Sweden（2022 年 1 月 4 日閲覧）

[31] Wikipedia, Isaac Newton, https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton（2022 年 1 月 4 日閲覧）

[32] 向井茂，“不変式の話，”数学セミナー連載，2005 年 12 月号，2006 年 1，2，4 月号.

[33] 日本医学会ホームページ，https://jams.med.or.jp/


 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited. 

news/013.html（2022 年 2 月 4 日閲覧）
[34] Wikipedia, Vannevar Bush, https://en.wikipedia.org/wiki/Vannevar_Bush（2022 年 2 月 25 日閲覧）
[35] Britanica, William-Thomson-Baron-Kelvin, https://www.britannica.com/biography/William-Thomson!-Baron-Kelvin（2022 年 3 月 6 日閲覧）
[36] Wikipedia, Hannibal Ford, https://en.wikipedia.org/wiki/Hannibal_Ford（2022 年 3 月 6 日閲覧）
[37] Wikipedia, Joseph Fourier, https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier（2022 年 3 月 6 日閲覧）
[38] Wikipedia, ユトランド沖海戦, https://ja.wikipedia.org/wiki/ユトランド沖海戦（2022 年 3 月 6 日閲覧）
[39] Wikipedia, Mark I Fire Control Computer, https://en.wikipedia.org/wiki/Mark_I_Fire_Control_Computer（2022 年 3 月 7 日閲覧）
[40] Wikipedia, Bell Labs, https://en.wikipedia.org/wiki/Bell_Labs（2022 年 4 月 7 日閲覧）
[41] Wikipedia, Thornton Carle Fry, https://en.wikipedia.org/wiki/Thornton_Carle_Fry（2022 年 4 月 7 日閲覧）
[42] Wikipedia, Schön scandal, https://en.wikipedia.org/wiki/Schön_scandal（2022 年 4 月 7 日閲覧）
[43] Wikipedia, ヘンドリック・シェーン, https://ja.wikipedia.org/wiki/ヘンドリック・シェーン（2022 年 4 月 7 日閲覧）
[44] Wikipedia, ジョン・フォン・ノイマン, https://ja.wikipedia.org/wiki/ジョン・フォン・ノイマン（2022 年 4 月 29 日閲覧）
[45] Wikipedia, ヘルマン・ワイル, https://ja.wikipedia.org/wiki/ヘルマン・ワイル（2022 年 4 月 29 日閲覧）
[46] Wikipedia, 第二次世界大戦, https://ja.wikipedia.org/wiki/第二次世界大戦（2022 年 5 月 31 日閲覧）
[47] Wikipedia, フランクリン・ルーズベルト, https://ja.wikipedia.org/wiki/フランクリン・ルーズベルト（2022 年 4 月 30 日閲覧）
[48] Wikipedia, ウォーレン・ウィーバー, https://ja.wikipedia.org/wiki/ウォーレン・ウィーバー（2022 年 5 月 3 日閲覧）
[49] Wikipedia, ジェイムス・コナント, https://ja.wikipedia.org/wiki/ジェイムス・コナント（2022 年 5 月 3 日閲覧）
[50] Wikipedia, ロバート・オッペンハイマー, https://ja.wikipedia.org/wiki/ロバート・オッペンハイマー（2022 年 5 月 3 日閲覧）
[51] Wikipedia, Homer Dudley, https://en.wikipedia.org/wiki/Homer_Dudley（2022 年 4 月 7 日閲覧）
[52] Wikipedia, SIGSALY, https://ja.wikipedia.org/wiki/SIGSALY（2022 年 5 月 31 日閲覧）
[53] Wikipedia, ワンタイムパッド, https://ja.wikipedia.org/wiki/ワンタイムパッド（2022 年 5 月 3 日閲覧）
[54] 釜賀一夫, 藤原邦樹, 吉村昭, “座談会日本陸軍暗号はなぜ破られなかったか,” 歴史と人物—太平洋戦争シリーズ—, 昭和 60 年冬号, 1985.
[55] Wikipedia, Harry Nyquist, https://en.wikipedia.org/wiki/Harry_Nyquist（2022 年 5 月 7 日閲覧）
[56] Wikipedia, Ralph Hartley, https://en.wikipedia.org/wiki/Ralph_Hartley（2022 年 5 月 7 日閲覧）
[57] Wikipedia, ニコラ・レオナール・サディ・カルノー, https://ja.wikipedia.org/wiki/ニコラ・レオナール・サディ・カルノー（2022 年 6 月 6 日閲覧）
[58] Wikipedia, ジェームズ・プレスコット・ジュール, https://ja.wikipedia.org/wiki/ジェームズ・プレスコット・ジュール（2022 年 6 月 6 日閲覧）
[59] Wikipedia, ユリウス・ロベルト・フォン・マイヤー, https://ja.wikipedia.org/wiki/ユリウス・ロベルト・フォン・マイヤー（2022 年 6 月 6 日閲覧）
[60] Wikipedia, ヘルマン・フォン・ヘルムホルツ, https://ja.wikipedia.org/wiki/ヘルマン・フォン・ヘルムホルツ（2022 年 6 月 6 日閲覧）
[61] Wikipedia, ルドルフ・クラウジウス, https://ja.wikipedia.org/wiki/ルドルフ・クラウジウス（2022 年 6 月 6 日閲覧）
[62] Wikipedia, ジェームズ・クラーク・マクスウェル, https://ja.wikipedia.org/wiki/ジェームズ・クラーク・マクスウェル（2022 年 6 月 6 日閲覧）
[63] Wikipedia, ルートヴィッヒ・ボルツマン, https://ja.wikipedia.org/wiki/ルートヴィッヒ・ボルツマン（2022 年 6 月 6 日閲覧）
[64] Wikipedia, エントロピー, https://ja.wikipedia.org/wiki/エントロピー（2022 年 6 月 6 日閲覧）
[65] Wikipedia, カルノーの定理_（熱力学）, https://ja.wikipedia.org/wiki/カルノーの定理_(熱力学)（2022 年 6 月 7 日閲覧）
[66] Wikipedia, ウィラード・ギブズ, https://ja.wikipedia.org/wiki/ウィラード・ギブズ（2022 年 6 月 7 日閲覧）
[67] 植松友彦,『イラストで学ぶ情報理論の考え方』, 講談社, 2012.
[68] Wikipedia, アルフレッド・ヴェイル, https://ja.wikipedia.org/wiki/アルフレッド・ヴェイル（2022 年 6 月 7 日閲覧）


*Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.*