

パラメータ不確実性を考慮した連続時間マルコフ連鎖モデルによるシステム性能評価

岡村 寛之, 鄭 俊俊, 土肥 正

本稿では、連続時間マルコフ連鎖モデルを用いたシステム性能評価において、パラメータの不確実性を考慮した分析を紹介する。一般に、不確実性は確率モデルそのもので表現する偶発的不確実性 (Aleatoric Uncertainty) と、データなどの情報不足から生じる認識的不確実性 (Epistemic Uncertainty) に分類できる。確率モデルによる性能評価は主に偶発的不確実性に焦点が当てられるが、パラメータに対する認識的不確実性もシステム性能評価に少なからず影響を与える。本稿では、認識的不確実性を考慮した評価尺度とそれを算出するためのモーメント法を紹介する。また、モーメント法から得られる近似式では確率モデルから得られる性能評価指標の偏導関数 (パラメータ感度) を必要とする。そのため、連続時間マルコフ連鎖モデルに着目して、具体的な偏導関数の計算方法について言及する。

キーワード：連続時間マルコフ連鎖モデル, 偶発的不確実性, 認識的不確実性, 感度解析

1. はじめに

システム性能評価はシステム設計において最終製品の品質を保証するうえで重要な役割を果たす。一般的に、システム性能評価ではシステムの振る舞いを表現するモデルを構築し、振る舞いをシミュレートあるいは振る舞いに関する何らかの指標を計算する。特にシステムが不確実な環境で動作する場合は確率的な要素が含まれるため確率モデルによるモデル化が必要となる。

確率モデルは解析的な取り扱いの観点からさまざまなクラスに分類されているが、モデル表現力と解析容易性のバランスからマルコフ連鎖モデルが用いられることが多い。マルコフ連鎖モデルは将来の (確率的な) 振る舞いが現在の状態だけに依存して決定するモデルであり、待ち行列解析に基づくシステム性能評価や信頼性評価でよく用いられる。

確率モデルによるシステム性能評価では、最終的に得られる性能評価指標と現実のシステムで計測される性能評価指標が乖離しないように注意する必要がある。乖離する原因には、モデル化する際に生じるモデル化誤差と、モデルパラメータを決める際に生じる推定誤差がある。前者はモデルの妥当性そのものに言及して

おり、一般的にはモデル適合度のような尺度により評価される必要がある。一方、後者は何らかの情報に基づいてモデルパラメータを決める際に作り込まれる誤差であるが、観測情報を増やすことで誤差を減らすことができる。これらの誤差はいずれも不確実性から生じたものであると考えられるが、それぞれ起因する不確実性が異なることに注意する。前者は現象そのものもつ不確実性を取り扱っており、後者は観測する情報の不完全性から生じた不確実性である。一般に、これらの不確実性は偶発的不確実性 (Aleatoric Uncertainty) と認識的不確実性 (Epistemic Uncertainty) として区別される。確率モデルによる性能評価においては主に偶発的不確実性を中心に扱うことが多いが、パラメータの推定誤差に代表される認識的不確実性を完全に排除することはできないため、認識的不確実性を与える影響を考慮した評価が必要となる。

Harverkort and Meeuwissen [1] はマルコフ報酬モデルの感度解析について言及している。Singpurwalla [2] はベイズ推定から得られる信頼度に対してパラメータの推定誤差が与える影響をモデル化している。Devaraj et al. [3], Mishra and Trivedi [4] は特定のマルコフモデルに対して陽表現とサンプリングに基づいた手法の比較を行っている。Dhople and Dominguez-Garcia [5] は連続時間マルコフ連鎖モデルの定常解に対する感度ならびにテイラー展開による近似を提案している。また、Takhedmit and Abbas [6] は待ち行列システムに対する不確実性を考慮した評価を行っている。Okamura et al. [7] は連続時間マルコフ連鎖モデルの定常解に対して汎用的に適用できる手法を紹介し

おかむら ひろゆき, どひ ただし
 広島大学大学院先進理工系科学研究科
 〒 739-8527 広島市鏡山 1-4-1
 okamu@hiroshima-u.ac.jp
 dohi@hiroshima-u.ac.jp
 てい しゅんしゅん
 立命館大学情報理工学部
 〒 525-8577 滋賀県草津市野路東 1-1-1
 jzheng@asl.cs.ritsumei.ac.jp

ている。本稿では、連続時間マルコフ連鎖モデルに着目し、定常解および過渡解のいずれの場合でも適用できる不確実性を考慮したシステム評価手法を議論する。

2. 不確実性を考慮したシステム性能評価指標

2.1 不確実性の表現

本稿では認識的不確実性 (Epistemic Uncertainty) について考察する。先にも述べたように認識的不確実性とは、統計におけるデータ観測誤差のように、データ本来がもつ不確実性 (偶発的不確実性, Aleatoric Uncertainty) とは異なり、観測その他の誤差から生じる不確実性である。認識的不確実性は、本質的には観測量を増やすことで取り除くことができる。たとえば、「システムへの到着はポアソン過程に従う」、「ポアソン過程の到着率を 10.0 と推定する」とした場合、システムへの到着過程本来の不確実性はポアソン過程によってもたらされるが、到着率を 10.0 とすることの不確かさもシステム性能へ影響する。この場合、前者が偶発的不確実性、後者が認識的不確実性となる。つまり、確率モデルおよびそこから得られるシステム性能評価においては、認識的不確実性はモデルパラメータの決定に対する不確実性となる。

一般にモデルパラメータの決定については、(i) データから演繹的に決定する方法、(ii) ドメインエキスパートの知見から決定する方法が考えられる。しかしながらいずれの場合においても決定されたパラメータには何らかの不確実性が含まれている。

(i) データから演繹的に決定する方法

観測データからモデルパラメータを決定する手法として、推測統計による統計的推定が挙げられる。統計的推定では、真のモデルと観測データの乖離度を何らかの形で表現し、その乖離度に基づいてパラメータの決定が行われる。代表的な手法として最尤法があり、パラメータの点推定値を与える。またたとえば、母平均パラメータの推定に対する不確実性評価としては信頼区間 (Confidence Interval) の手法がある。ここでは特にベイズ推定の考え方を紹介する。

いまデータから決定するモデルパラメータ (ベクトル) を $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ とする。モデルパラメータに対する不確実性を実現するため、パラメータを確率変数 Θ で表現する。このとき、パラメータ θ に対する事前の知識は確率密度 (事前密度) $f_{\Theta}(\theta)$ で表現される。モデルからの標本 \mathcal{D} が与えられたとき、パラメータ θ に対する事後密度はベイズの定理より

$$f_{\Theta}(\theta|\mathcal{D}) = \frac{p(\mathcal{D}|\theta)f_{\Theta}(\theta)}{\int p(\mathcal{D}|\theta)f_{\Theta}(\theta)d\theta} \quad (1)$$

として得られる。ここで $p(\mathcal{D}|\theta)$ はパラメータ θ のもとで観測データ \mathcal{D} が出現する確率 (密度) であり、最尤法における尤度に対応する。また、式 (1) の分母は $\int \dots \int p(\mathcal{D}|\theta)f_{\Theta}(\theta)d\theta_1 \dots d\theta_n$ の多重積分であり、以降も多重積分に対してこのような表記を用いる。ベイズ推定の枠組みでは、事後密度がパラメータに対する不確実性そのものを表現しており、事後密度のばらつきが大きければパラメータの不確実性が高いこと、事後密度のばらつきが小さければ不確実性が低いことを表現できる。

(ii) ドメインエキスパートの知見から決定する方法

ドメインエキスパートの知見から決定する場合、不確実性の表現としては「だいたい 9 から 10 の間」のような表現となる。これは「真のパラメータ」に対する分布を暗に表現しているため、先のベイズ推定と同様に確率密度 $f_{\Theta}(\theta)$ によってパラメータ値に対する不確実性 (認識的不確実性) を表現できる。しかしながら、厳密な分布型を示しているわけではないため何らかの仮定が必要となる。たとえば、「だいたい 9 から 10 の間」という表現の場合では、正規分布を仮定し、パラメータが区間 $[9, 10]$ となる確率を 0.95 あるいは 0.99 として分布型を決定する方法、あるいは区間 $[9, 10]$ の一様分布を仮定する方法などが考えられる。

2.2 不確実性を考慮した性能評価指標

いま対象とする確率モデルから得られる性能評価指標を $M(\theta)$ をする。ここで θ はモデルパラメータであり、性能評価指標がモデルパラメータに依存することを表現している。ここで $M(\theta)$ は一般的には確率モデルから得られる何らかの期待値であることに注意する。たとえば、待ち行列システムであれば系内容数分布そのものや平均系内容数、平均待ち時間など確率モデルがもつ本質的な不確実性 (偶発的不確実性) を考慮した指標となる。本稿では、パラメータ値の不確実性 (認識的不確実性) が性能評価指標に与える影響を評価する。

いまパラメータに対する不確実性が確率密度関数 $f_{\Theta}(\theta)$ で与えられるものとする。つまり、パラメータが確率変数 Θ で与えられることになるため、性能評価指標 $M(\Theta)$ も確率変数となり、この確率変数に対する平均、分散、分布関数などで認識的不確実性が与える影響を評価する。具体的には次のような問題として定式化される。

- 平均：

$$E[M(\Theta)] = \int M(\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta. \quad (2)$$

- 分散

$$\begin{aligned} \text{Var}[M(\Theta)] &= E[M(\Theta)^2] - E[M(\Theta)]^2, \\ E[M(\Theta)^2] &= \int M(\theta)^2 f_{\Theta}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

- 累積分布関数

$$\begin{aligned} F_M(m) &= P(M(\Theta) \leq m) \\ &= \int I(M(\theta) \leq m) f_{\Theta}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $I(A)$ は事象 A に対する指標関数である。式 (2) から (4) の指標はベイズ推定の枠組みでは自然に導出される。たとえば文献 [2] では、不確実性を考慮した平均信頼度を *survivability* と呼び議論している。

上述の性能評価指標に対する平均や分散を計算する際、(i) どのようにしてパラメータに対する確率密度関数 $f_{\Theta}(\theta)$ を得るか、(ii) 平均・分散などにあらわれる多重積分をどのようにして計算するかが問題となる。問題 (i) に関して、データが得られる場合にはベイズ推定の枠組みを利用することが考えられる。一方、ドメインエキスパートの知見から推定する場合においても何らかの仮定を用いてパラメータに関する確率密度を得る。しかしながら、式 (2) から式 (4) で用いている $f_{\Theta}(\theta)$ は複数のパラメータに対する同時密度関数であることに注意しなければならない。ベイズ推定では同時事後分布を理論的に導出できるものの、実際のデータを使って推定する場合にはその計算の困難性が問題となる。また、ドメイン知識の利用においては、そもそもどのようにして同時密度を得るかが問題となる。次に (ii) の問題について、 $f_{\Theta}(\theta)$ がパラメータすべてに対する同時分布となるため、式 (2) から式 (4) で用いる積分が多重積分となり、それをどのようにして計算するかが問題となる。高次元の多重積分は数値計算が難しい問題として知られており、一般的にはモンテカルロ積分などの適用を余儀なくされる。

上記二つの問題を同時に解決する有力なアプローチとしてベイズ推定における MCMC (マルコフ連鎖モンテカルロ法) がある。これはパラメータの事後分布に従うサンプルを生成する手法であり、得られたサンプルでモンテカルロ積分を適用することで性能評価指標の平均や分散を算出できる。実際に文献 [4] ではサンプリングに基づく手法が紹介されている。しかしな

がら、MCMC などは比較的多くの計算資源を必要とすることが知られている。また、ドメインエキスパートの知見などから算出する方法について対応することができない。

2.3 不確実性評価に対するモーメント法

本稿では、先の二つの問題を同時に解決するもう一つのアプローチとしてモーメント法 [5, 7] について議論する。ここで議論するモーメント法のアイデアは不確実性を考慮した性能評価指標に対するテイラー展開を行い、高次の項を打ち切ることで、パラメータの不確実性に対する平均および分散から評価を行うための近似式を得るというものである。具体的に、パラメータベクトルが $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ として与えられるとき、性能評価指標の平均と分散に対する近似式は次のようになる。

$$\begin{aligned} E[M(\Theta)] &\approx M(\hat{\theta}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M''_{i,i}(\hat{\theta}) \text{Var}[\Theta_i] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} M''_{i,j}(\hat{\theta}) \text{Cov}[\Theta_i, \Theta_j], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Var}[M(\Theta)] \approx E[M(\Theta)^2] - E[M(\Theta)]^2, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} E[M(\Theta)^2] &\approx M(\hat{\theta})^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(M'_i(\hat{\theta})^2 + M(\hat{\theta}) M''_{i,i}(\hat{\theta}) \right) \text{Var}[\Theta_i] \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left(M'_i(\hat{\theta}) M'_j(\hat{\theta}) + M(\hat{\theta}) M''_{i,j}(\hat{\theta}) \right) \\ &\quad \times \text{Cov}[\Theta_i, \Theta_j]. \end{aligned} \quad (7)$$

ここでパラメータの点推定値に対して $\hat{\theta} = E[\Theta]$ を仮定している。また $M'_i(\hat{\theta})$ および $M''_{i,j}(\hat{\theta})$ は性能評価指標の各パラメータに対する 1 階および 2 階の偏導関数を表す。

$$M'_i(\hat{\theta}) = \left. \frac{\partial M(\theta)}{\partial \theta_i} \right|_{\theta=\hat{\theta}}, \quad M''_{i,j}(\hat{\theta}) = \left. \frac{\partial^2 M(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\theta=\hat{\theta}}. \quad (8)$$

式 (5) および (6) は、パラメータに対する平均 $E[\Theta_i]$ 、分散 $\text{Var}[\Theta_i]$ および共分散 $\text{Cov}[\Theta_i, \Theta_j]$ に関する情報のみを必要としており、密度関数そのものを利用しない。そのため、ドメインエキスパートからの知見であってもある程度の見積もりが可能となる。加えて多重積分計算を省くことができているため計算に関するコストも高くない。一方で、確率モデルから得られる性能評価指標 $M(\theta)$ に対する偏導関数の導出が必要となる。

3. 連続時間マルコフ連鎖モデルに対する不確実性を考慮した性能評価指標

3.1 連続時間マルコフ連鎖モデルの性能評価指標

前節で紹介したモーメント法では確率モデルから得られる性能評価指標の各パラメータに対する偏導関数が必要となる。性能評価指標が陽に表現される場合には、偏導関数を解析的に求めることができるが、マルコフモデルなどの一般的によく利用される確率モデルでは性能評価指標の陽表現を求めることができないことが多い。ここでは連続時間マルコフ連鎖による確率モデルに着目し、性能評価指標 $M(\theta)$ のパラメータ θ に対する偏導関数を導出する手法について考察する。

いま有限状態の連続時間マルコフ連鎖を考え、その無限小生成行列を Q とする。また、時刻 $t = 0$ における状態を表す初期確率ベクトル（行ベクトル）を π_0 とする。連続時間マルコフ連鎖モデルでは、性能評価指標を報酬として与えることが多い。一般的に連続時間マルコフ連鎖では滞在報酬および推移報酬の二種類が存在する。滞在報酬は、状態を訪問している間に得られる報酬であり、各状態で単位時間あたりに得られる報酬を要素にもつ列ベクトル r_S で表現できる。推移報酬は状態間の推移が発生したときに得られる報酬であり、報酬が発生する推移率と一回の推移で得られる報酬の積を要素に持つ列ベクトル r_T で表現できる。たとえば状態 i から状態 j へ推移するときの報酬を $r_{i,j}$ とすると、 r_T の i 要素は

$$[r_T]_i = \sum_{j=1}^n r_{i,j} q_{i,j} \quad (9)$$

となる。ここで $q_{i,j}$ は状態 i から状態 j への推移率である。さらに報酬を表す確率過程（報酬過程）として、時刻 t に得られる報酬を表す $Z(t)$ ならびに時刻 t までの累積報酬 $Y(t) = \int_0^t Z(\tau) d\tau$ を考えることができる。

以上の準備のもと、連続時間マルコフ連鎖モデルにおける性能評価指標の多くは次のいずれかに分類される。

- (a) 定常報酬: $E[Z(\infty)] = \pi_s r_S$
- (b) 平均報酬: $\lim_{t \rightarrow \infty} E[Y(t)/t] = \pi_s (r_S + r_T)$
- (c) 瞬間報酬: $E[Z(t)] = \pi(t) r_S$
- (d) 累積報酬: $E[Y(t)] = \nu(t) (r_S + r_T)$

ここで π_s および $\pi(t)$ は定常状態および時刻 t における状態確率ベクトルであり次のように与えられる。

$$\pi_s Q = 0, \quad \pi_s \mathbf{1} = 1, \quad (10)$$

$$\pi(t) = \pi_0 \exp(Qt). \quad (11)$$

さらに $\nu(t) = \int_0^t \pi(\tau) d\tau$ であり、 $\mathbf{0}$ と $\mathbf{1}$ はそれぞれすべての要素が 0 および 1 の列ベクトルである。

たとえば、 $M/M/1/K$ 待ち行列システムにおける平均系内容数は (a) に属し、ロス確率は (b) に属する。また 2 状態信頼性モデルにおける定常アベイラビリティは (a) に属し、信頼度は (c) に属する [8]。

3.2 性能評価指標の偏導関数

ここでは、性能評価指標が連続時間マルコフ連鎖モデルの定常報酬、平均報酬、瞬間報酬、累積報酬として与えられるとき、それらの偏導関数を算出する手法について言及する。特に、紙面の都合上、1 階の偏導関数の算出のみについて示す。

定常報酬、平均報酬に対しては定常確率ベクトル π_s の偏導関数（パラメータ感度とも呼ばれる）を求める必要がある。定常確率ベクトルは式 (10) を満足するため、両辺にあるパラメータ θ_i について偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_s}{\partial \theta_i} Q + \pi_s \frac{\partial Q}{\partial \theta_i} &= 0, \\ \frac{\partial \pi_s}{\partial \theta_i} \mathbf{1} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

上記は連立一次方程式であるため通常の連立一次方程式の解法により得ることができる。また、文献 [5] では一般逆行列を用いた導出を示している。一方、 Q が大規模な疎行列の場合ではガウスザイデル法を応用した計算量の観点から有利な解法が提案されている [9]。最終的に定常報酬および平均報酬の 1 階偏導関数は

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} E[Z(\infty)] = \frac{\partial \pi_s}{\partial \theta_i} r_S + \pi_s \frac{\partial r_S}{\partial \theta_i} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \lim_{t \rightarrow \infty} E[Y(t)/t] &= \frac{\partial \pi_s}{\partial \theta_i} (r_S + r_T) \\ &+ \pi_s \left(\frac{\partial r_S}{\partial \theta_i} + \frac{\partial r_T}{\partial \theta_i} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

次に瞬間報酬について考える。瞬間報酬では連続時間マルコフ連鎖の過渡解 $\pi(t)$ に対する偏導関数を算出する必要がある。連続時間マルコフ連鎖の過渡解は次の常微分方程式の解として得られる。

$$\frac{d}{dt} \pi(t) = \pi(t) Q, \quad \pi(0) = \pi_0. \quad (15)$$

これをパラメータ θ_i で偏微分すると

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \pi(t)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \pi(t)}{\partial \theta_i} Q + \pi(t) \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \quad \frac{\partial \pi(0)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \pi_0}{\partial \theta_i} \quad (16)$$

を得る. 式 (15) と式 (16) を整理すると

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Pi}(t) = \boldsymbol{\Pi}(t)\mathbf{Q}_{\theta_i}, \quad \boldsymbol{\Pi}(0) = \left(\pi_0 \quad \frac{\partial\pi_0}{\partial\theta_i}\right). \quad (17)$$

ここで $\boldsymbol{\Pi}(t) = (\boldsymbol{\pi}(t), \partial\boldsymbol{\pi}(t)/\partial\theta_i)$ および

$$\mathbf{Q}_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \partial\mathbf{Q}/\partial\theta_i \\ & \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

つまり, $\partial\boldsymbol{\pi}(t)/\partial\theta_i$ は $\boldsymbol{\Pi}(t) = \boldsymbol{\Pi}(0)\exp(\mathbf{Q}_{\theta_i}t)$ の解に対する部分ベクトルとして算出できる. また, $\partial\nu(t)/\partial\theta_i$ は $\partial\boldsymbol{\pi}(t)/\partial\theta_i$ の積分として得られる. これに対しては, 行列指数関数 $\exp(\mathbf{Q}_{\theta_i}t)$ に対して一様化手法が適用可能であることから, 累積一様化手法 [10] を適用することで効率的に算出できる.

4. 数値例

不確実性を伴うシステム性能評価の例として, ここでは $M/M/1/K$ 待ち行列システムを考える. $M/M/1/K$ 待ち行列システムはシステムへの客の到着がポアソン過程, サービス窓口が一つ, 単一の客に対するサービス時間が指数分布に従うモデルである. また系内の容量が K で与えられる. つまり, サービス中の客を含め K 人が系内にいるときに到着する客はキャンセルされる. このとき, $M/M/1/K$ 待ち行列システムは, 系内に滞在する客数を状態とする連続時間マルコフ連鎖モデルで表現することができる. 具体的に客の到着率を λ , サービス率を μ とすると以下のような $(K+1) \times (K+1)$ の無限小生成行列を得る.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu & -\mu \end{pmatrix}. \quad (19)$$

この無限小生成行列から定常確率ベクトルを計算することで, 系内客数分布を算出できる. また, 報酬ベクトルを $\mathbf{r}_S = (0, 1, \dots, K)^T$ としたときの定常報酬で平均系内客数を算出することができる.

到着率 λ , サービス率 μ の不確実性が系内客数分布ならびに平均系内客数に与える影響をモーメント法に基づいて調べる. 特に, 到着時間間隔およびサービス時間に対するそれぞれ n 個のデータを用いてパラメータを推定する場合を考える. 一般に, 母平均の推定量は標本の平均で与えられ, 標本平均の分散は母分散 σ^2 から σ^2/n として得られる. いま, 母集団は平均 $1/\lambda$ および $1/\mu$ の指数分布であるため, n 個のデータから

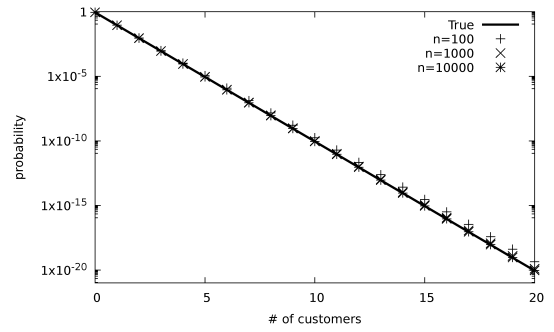


図1 系内客数分布 ($K = 20, \lambda = 0.1, \mu = 1.0$)

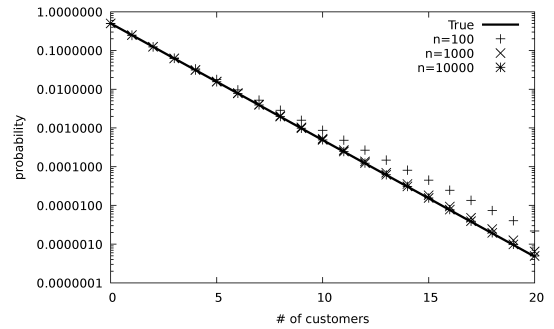


図2 系内客数分布 ($K = 20, \lambda = 0.5, \mu = 1.0$)

$\hat{\theta}_1 = 1/\lambda$ および $\hat{\theta}_2 = 1/\mu$ の推定結果として次の結果が得られたという状況を想定する.

$$E[\hat{\theta}_1] = 1/\lambda, \quad \text{Var}[\hat{\theta}_1] = 1/(\lambda^2 n), \quad (20)$$

$$E[\hat{\theta}_2] = 1/\mu, \quad \text{Var}[\hat{\theta}_2] = 1/(\mu^2 n). \quad (21)$$

これは, n 個のデータから真のパラメータ λ, μ を正確に推定できた理想的な状況であるが, 推定量 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ にはデータ量に応じた (認知的) 不確実性が含まれ, その分散は標本平均の分散となるため $\text{Var}[\hat{\theta}_1], \text{Var}[\hat{\theta}_2]$ として上記の式が得られる.

図1から図3は $K = 20$ および $\lambda = 0.1, 0.5, 0.9, \mu = 1.0$ としたときの系内客数分布を表している. 図の実線は設定したモデルパラメータから得られる系内客数分布であり, グラフ上の点はデータ数を $n = 100, 1,000, 10,000$ として上記の理想的な推定を行ったもとで算出される不確実性を考慮した系内客数分布を表している. これらの図から $\lambda = 0.1, \lambda = 0.5$ の場合では, $n = 100, 1,000, 10,000$ のいずれも真の系内客数分布をかなり正確に推定することができる. これは, $\lambda = 0.1$ および $\lambda = 0.5$, つまり, システムのトラフィック密度が高くない場合では, 比較的少ないデータ数で系内客数分布の推定が可能であることを示唆している. 一方, $\lambda = 0.9$ の場合, $n = 100$ では真の系

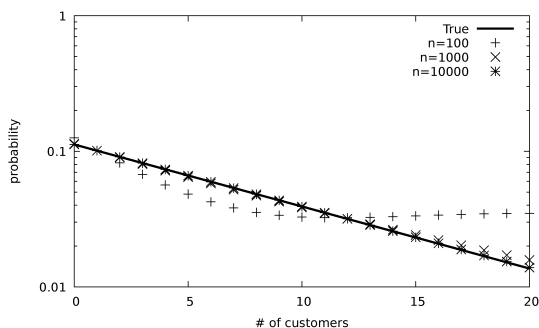


図 3 系内客数分布 ($K = 20, \lambda = 0.9, \mu = 1.0$)

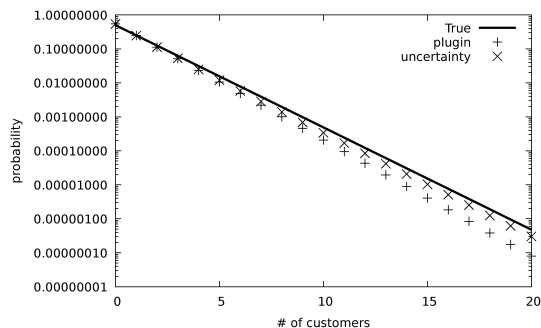


図 5 系内客数分布の推定値 ($K = 20, \lambda = 0.5, \mu = 1.0, n = 100$)

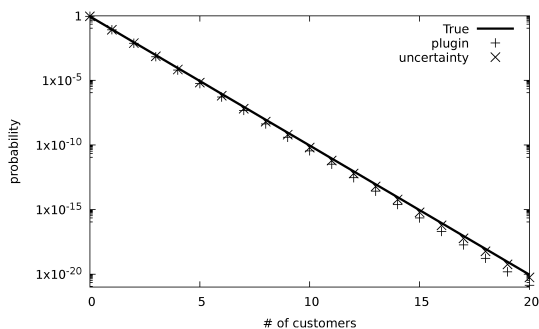


図 4 系内客数分布の推定値 ($K = 20, \lambda = 0.1, \mu = 1.0, n = 100$)

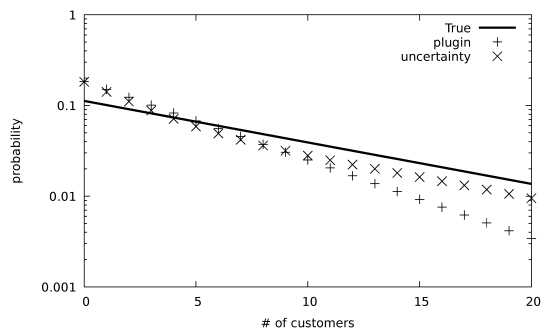


図 6 系内客数分布の推定値 ($K = 20, \lambda = 0.9, \mu = 1.0, n = 100$)

内客数分布とはかなり異なった値となっている。また $n = 1,000, n = 10,000$ の場合でも $\lambda = 0.1, \lambda = 0.5$ ほどの正確な推定ができていないことがわかる。これは高トラフィックな環境の方がパラメータの不確実性に対して敏感であり、正確な推定を行うために多くのデータを必要とすることを示している。

次に図 4 から図 6 は真の到着時間間隔およびサービス時間の分布から $n = 100$ のサンプルを生成し、そのデータに基づいて系内客数分布を推定した結果を表している。図の plugin は推定したパラメータをそのまま λ, μ に適用したときの系内客数分布を表している。また uncertainty は不確実性を考慮したモーメント法で算出した系内客数分布の推定値を表している。これらの図からも、トラフィック密度が高い場合、正確な推定を行うためには、より多くのデータが必要となることがわかる。また、plugin と uncertainty を比較すると、 $\lambda = 0.9$ の場合において顕著な違いが確認され、uncertainty の方が少しだけ真の系内客数分布に近い傾向が読み取れる。

表 1 と表 2 は同じサンプルを使って平均系内客数を plugin および uncertainty で推定した結果である。表における True は真のパラメータ (設定した λ, μ) を用

表 1 平均系内客数の推定値 (plugin)

λ	True	$n = 100$	$n = 1,000$	$n = 10,000$
0.1	0.111	0.100	0.112	0.113
0.5	1.000	0.835	1.020	1.028
0.9	6.420	4.209	6.719	6.824

表 2 平均系内客数の推定値 (uncertainty)

λ	True	$n = 100$	$n = 1,000$	$n = 10,000$
0.1	0.111	0.101	0.112	0.113
0.5	1.000	0.867	1.026	1.028
0.9	6.420	5.005	6.824	6.836

いて平均系内客数を計算した結果を表している。また、それぞれの方法でデータ数を $n = 100, 1,000, 10,000$ と変化させて推定を行っている。これらの表からもトラフィック密度が高い場合には正確な推定が困難になることがわかる。また先の考察と同様に $\lambda = 0.9$ の場合で不確実性を考慮した手法の方が True に近いことがわかる。

5. まとめ

本稿では推定誤差のような認識的不確実性に着目し、その不確実性を考慮したモデル性能評価について議論した。特に、パラメータの平均・分散およびモデルのパラメータに対する偏導関数（パラメータ感度）を利用するモーメント法による近似式を示した。また、具体的に連続時間マルコフ連鎖モデルに対する偏導関数の算出について言及した。数値例では、 $M/M/1/K$ 待ち行列システムに対する認識的不確実性を考慮した解析を行い、トラフィック密度が高い場合に認識的不確実性が大きな影響を与えることを示した。

今後の発展としては、より高次のモーメントを利用して性能評価指標分布の裾に関する評価を行うことが考えられる。また一般分布を含む場合の解析および相型分布を用いた近似を適用した場合の認識的不確実性の影響について考察する。

参考文献

- [1] B. R. Haverkort and A. M. H. Meeuwissen, “Sensitivity and uncertainty analysis of markov-reward models,” *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, pp. 147–154, 1995.
- [2] N. D. Singpurwalla, *Reliability and Risk: A Bayesian Perspective*, John Wiley & Sons, 2006.
- [3] A. Devaraj, K. Mishra and K. S. Trivedi, “Uncertainty propagation in analytic availability models,” In *Proceedings of the 2010 29th IEEE Symposium on Reliable Distributed Systems*, pp. 121–130, 2010.
- [4] K. Mishra and K. S. Trivedi, “Uncertainty propagation through software dependability models,” In *Proceedings of the 2011 IEEE 22nd International Symposium on Software Reliability Engineering*, pp. 80–89, 2011.
- [5] S. V. Dhople and A. D. Dominguez-Garcia, “A parametric uncertainty analysis method for markov reliability and reward models,” *IEEE Transactions on Reliability*, **61**, pp. 634–648, 2012.
- [6] B. Takhedmit and K. Abbas, “A parametric uncertainty analysis method for queues with vacations,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **312**, pp. 143–155, 2017.
- [7] H. Okamura, T. Dohi and K. Trivedi, “Parametric uncertainty propagation through dependability models,” In *Proceedings of the 2018 Eighth Latin American Symposium on Dependable Computing (LADC)*, pp. 10–18, 2018.
- [8] K. Trivedi and A. Bobbio, *Reliability and Availability Engineering: Modeling, Analysis, and Applications*, Cambridge University Press, 2017.
- [9] H. Okamura and T. Dohi, “Performance comparison of algorithms for computing parametric sensitivity functions in continuous-time Markov chains,” In *Proceedings of The 7th Asia-Pacific International Symposium on Advanced Reliability and Maintenance Modeling (APARM 2016)*, pp. 415–422, 2016.
- [10] A. Reibman and K. S. Trivedi, “Transient analysis of cumulative measures of Markov model behavior,” *Stochastic Models*, **5**, pp. 683–710, 1989.