

ブロードキャスト型合意形成における 合意結果の確率特性

塩田 茂雄, 加藤 大

さまざまな意見を有する複数のエージェントが相互に意見を交換し、自分の意見を逐次的に修正し、集団全体として合意に至る過程を記述する合意形成過程についてさまざまな研究が行われている。本稿では、参加者のうち誰か一人が発言し、ほかの参加者は聞く側に回るブロードキャスト型合意形成に焦点を当て、その合意結果の確率特性に関する最近のわれわれの研究結果を紹介する。

キーワード：合意形成、ブロードキャスト、合意結果、安定分布、正規分布、コーシー分布、レヴィ分布

1. はじめに

会議の目的は、特定の議題について参加者が意見を交換して合意を図り、何らかの意思決定をすることである。会議にはさまざまな考えをもつ参加者が集まるが、各参加者はほかの参加者と意見を交わすなかで自らの考えを徐々に修正し、どこかで合意点を見出して会議は終了する。

ある程度の単純化は行うとして、この合意形成の過程を数理的に論じることが可能だろうか。実は、合意形成過程を数理的に考察した文献は思いのほか多い。たとえば、DeGroot [1] は組織の構成員の合意形成プロセスを数理モデルで表現し、合意に至るための条件を考察している。Tsitsiklis [2] は複数のプロセッサによる分散処理における意思決定の問題を合意形成に類似したモデルで論じている。Tsitsiklis の研究例のように、会議の合意形成と似たプロセスは工学のさまざまな分野において登場する。たとえば、時刻情報を交換しながら自律分散的に装置が時刻同期を取ったり [3]、負荷情報を交換しながらプロセッサが自律分散的に負荷均等化（ロードバランシング）を図ったりすること [4, 5] などは合意形成のプロセスと似ている。センサーネットワークでの測定データの処理（データフュージョン） [6]、ドローンなどのモバイルエージェントの位置制御 [7, 8] などにおいても合意形成と似た問題が出現する。最近では、ソーシャルネットワーク

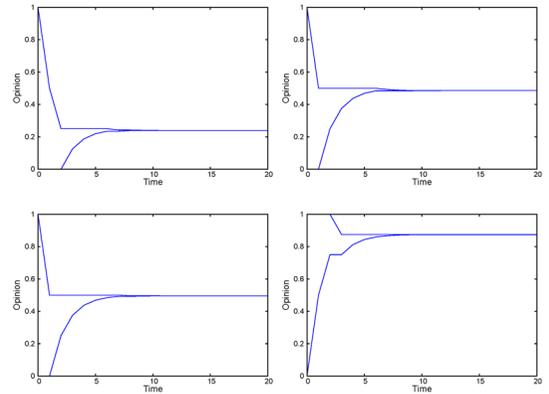


図 1 2 人の参加者による合意形成過程の例

上の合意形成も扱われている [9–11]。これらの研究では、会議で言うところの合意が成立する条件が主たる関心事である。

通常の会議では、参加者の一人が発言者となり、発言者以外の参加者は発言者の意見を聞く側に回る。参加者の意見が数値化されているとして、誰かが発言するたびに、発言を聞く側は自分と発言者の意見の平均を取って自分の意見と置き換えることを繰り返せば、いずれすべての参加者の意見は等しくなり、合意に達するはずである。しかし、合意到達時の意見（合意結果）がいつも同じであるとは限らない。実は、合意結果は参加者の発言の順序に大きく依存する。

図 1 は 2 人の参加者による合意形成過程の四つのシミュレーション結果を示したものである。会議開始時点では、一方の参加者の意見は 1、もう一方は 0 である。会議開始後、いずれかの参加者が確率 0.5 で自分の意見を述べる。聞いている側は、自分と発言者の意見の平均を取って自分の意見と置き換える。これを

しおだ しげお
千葉大学大学院工学研究院
〒 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33
shioda@faculty.chiba-u.jp
かとう だい
千葉大学大学院融合理工学府博士前期課程修了

繰り返す。いずれの図も縦軸は意見、横軸は時間であり、2本の線は2人の参加者の意見の時間変化を表している。2本の線は時間の経過とともに速やかに1本の線に合流し、合意は取れているが、合意結果はシミュレーションごとに大きく異なっている。

開催するたびにこのように結論が大きく変わるようでは会議には意味がない、と言えなくもない。したがって、会議の結論が一般にどのように分布するか、といった点は考察に値する対象であろう。

本稿では、合意結果の分布に関する最近のわれわれの研究結果を紹介する [12–14]。合意形成のためのアルゴリズムはブロードキャスト型 [15, 16] であるとする。ブロードキャスト型とは、参加者（以下、エージェントと呼ぶ）のうち、毎時刻、無作為に選ばれた1体のエージェントが隣接するエージェントに自分の意見をブロードキャストし、意見を聞く側は自分の意見と聞いた意見の加重平均を取って自分の意見と置き換えることを繰り返すアルゴリズムのことである。合意形成アルゴリズムにおいては、エージェントは必ずしも互いに相手の意見を直接聞くことができる必要はなく、ほかのエージェントの意見を介して相互に影響しあえば良い。会議の合意形成はもちろんブロードキャスト型である。また、無線の基本的な通信形態はブロードキャストであり、Twitter上の情報伝搬もブロードキャストであることから、ブロードキャスト型は会議以外の合意形成のモデル化においても比較的良好に登場する。

以下、まず2節において、本稿で用いるブロードキャスト型合意形成の数理モデルを説明する。ついで、3節において、合意結果に関する幾つかの基本的な結果を説明する。4節では、ブロードキャスト型合意形成の最も単純なモデルとして、2体のエージェントによる合意形成を取り上げ、高々2体のエージェントによる合意形成であっても合意結果の分布は非常に複雑な振る舞いを見せることを示す。さらに、5節において、2節で説明したモデルを各エージェントの初期意見が確率変数の場合に拡張し、6節ではエージェントの初期意見が安定分布に従うケースに焦点を当て、得られた知見に対してできるだけ直感的な解釈を与えることを試みる。

2. ブロードキャスト型合意形成モデル

有向グラフによりつながる N 体のエージェントを考える。エージェントには1から N までの番号が振られている。エージェントを接続する有向グラフの隣接行列を $A = (a_{mn})_{m,n \in N}$ で表す（エージェント m

から n への有向リンクが存在するときは $a_{mn} = 1$; 存在しないときは $a_{mn} = 0$ ）。

各離散時刻 ($t = 0, 1, \dots$) において、毎回独立に選ばれた1体のエージェントが自分の意見を隣接するエージェントにブロードキャストする。エージェント n が各離散時刻で意見をブロードキャストする確率を $p_n (> 0)$ と表し、時刻 t におけるエージェント n の意見を $x_n(t)$ と表す。 $x_n(t)$ は実数とする。離散時刻 t において、エージェント n は次の方程式により、自分の意見を更新する。

$$x_n(t+1) = x_n(t) + \sum_{m=1}^N \delta_{m,e_t} a_{mn} r_{mn} (x_m(t) - x_n(t)). \quad (1)$$

ここで、 e_t は、時刻 t に意見をブロードキャストしたエージェントの番号を表す確率変数であり、 $\delta_{m,n}$ は以下で定義される。

$$\delta_{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

確率変数 e_0, e_1, \dots は互いに独立とする。 r_{mn} は、エージェント n がエージェント m の意見を受信した際に、 n が受ける影響度を示す0以上1以下のパラメタであり、1に近いほど影響度が大きい（エージェント n はエージェント m の意見をより信用する）。以下では、 r_{mn} を信頼度パラメタと呼ぶ。

$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1(t), \dots, x_N(t))$ と定めることにより、(1) は以下のように行列形式で表現できる。

$$\mathbf{x}(t+1)^\top = Q^{(e_t)} \mathbf{x}(t)^\top. \quad (2)$$

ここで、 $Q^{(k)}$ はエージェント k が意見をブロードキャストした際のエージェントの意見の更新を表す行列である。 $Q^{(k)}$ の mn 成分 $q_{mn}^{(k)}$ は以下で表される。

$$q_{mn}^{(k)} = \begin{cases} 1 - r_{kn} a_{kn}, & m = n \\ r_{km} a_{km}, & m \neq n, n = k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$Q^{(k)}$ の対角要素と k 列目の要素はそれぞれ加重平均を取る際に自分とエージェント k の意見にかける重みを表しており、それ以外の要素は0である。 $Q^{(k)}$ は各行の要素の合計が1に等しい確率行列である。 $Q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N p_k Q^{(k)}$ を定義すると、 Q も確率行列であり、以下が成立する。

$$E[\mathbf{x}(t+1)|\mathbf{x}(t)] = Q\mathbf{x}(t)^\top. \quad (3)$$

要素の和を 1 に正規化した固有値 1 の Q の左固有ベクトルを $\boldsymbol{\pi}$ で表し、 $\bar{X}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\pi}\mathbf{x}(t)^\top$ とする。 $\bar{X}(t)$ は時刻 t でのエージェントの意見の ($\boldsymbol{\pi}$ の要素を重みとする) 加重平均である。 $t \geq s$ ならば (3) より

$$\begin{aligned} E[\bar{X}(t)|\mathbf{x}(s)] &= E[\boldsymbol{\pi}\mathbf{x}(t)^\top|\mathbf{x}(s)] = \boldsymbol{\pi}Q^{t-s}\mathbf{x}(s)^\top \\ &= \boldsymbol{\pi}\mathbf{x}(s)^\top = \bar{X}(s). \end{aligned}$$

したがって

$$E[\bar{X}(t)|\bar{X}(s)] = E[E[\bar{X}(t)|\mathbf{x}(s)]|\bar{X}(s)] = \bar{X}(s).$$

すなわち $\bar{X}(t)$ はマルチンゲールである。なお、ブロードキャスト型合意形成では、ある種の既約性が満たされれば確率 1 で合意が形成されることが知られている。本モデルにおいても、次に示すとおり、 Q が既約であれば、確率 1 で合意が形成される (証明は省く)。

補題 2.1 (文献 [13]). Q が既約であれば、 $t \rightarrow \infty$ において確率 1 で \mathbf{x} の要素がすべて等しくなり、合意が形成される。したがって、 Q が既約であれば、 $\bar{X}(t)$ は $t \rightarrow \infty$ において確率 1 で合意結果に収束する。

3. 合意結果に関する基本的な結果

本節では、ブロードキャスト型合意形成における合意結果に関する基本的な結果を紹介する。話を簡単にするために、本節以降、エージェントは互いに直接意見を交換でき (隣接行列 A は完全グラフの構造をもち)、かつ信頼度パラメタは共通の値 r を取ることを仮定する。この仮定のもとでは、 $\boldsymbol{\pi} = (p_1, \dots, p_N)$ であり、したがって時刻 t でのエージェントの意見の加重平均は $\bar{X}(t) = \sum_{n=1}^N p_n x_n(t)$ となる。また、 $0 < r \leq 1$ とする。 $r > 0$ は Q を既約とするための仮定である。

定理 3.1.

$$\bar{X}(t) = (1-r)^t \bar{X}(0) + r \sum_{k=0}^{t-1} (1-r)^k x_{e_k}(0).$$

証明. (2) を用いると $\bar{X}(t)$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) &= \boldsymbol{\pi} \left(\prod_{k=0}^{t-1} Q^{(e_k)} \right) \mathbf{x}(0)^\top, \quad (4) \\ \prod_{k=0}^{t-1} Q^{(e_k)} &\stackrel{\text{def}}{=} Q^{(e_{t-1})} \times \dots \times Q^{(e_0)}. \end{aligned}$$

$\mathbf{1}$ を要素がすべて 1 の横ベクトルとすると

$$\begin{aligned} Q^{(e_0)} \mathbf{x}(0)^\top &= (1-r)\mathbf{x}(0)^\top + r x_{e_0}(0) \mathbf{1}^\top, \\ \left(\prod_{k=1}^{t-1} Q^{(e_k)} \right) \mathbf{1}^\top &= \mathbf{1}^\top. \end{aligned}$$

上式を (4) に代入して

$$\bar{X}(t) = (1-r)\boldsymbol{\pi} \left(\prod_{k=1}^{t-1} Q^{(e_k)} \right) \mathbf{x}(0)^\top + r x_{e_0}(0). \quad (5)$$

次に

$$Q^{(e_1)} \mathbf{x}(0)^\top = (1-r)\mathbf{x}(0)^\top + r x_{e_1}(0) \mathbf{1}^\top,$$

を (5) に代入して

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) &= (1-r)^2 \boldsymbol{\pi} \left(\prod_{k=2}^{t-1} Q^{(e_k)} \right) \mathbf{x}(0)^\top \\ &\quad + (1-r) r x_{e_1}(0) + r x_{e_0}(0). \end{aligned}$$

以上を繰り返すことで証明が完了する。 \square

定理 3.1 より、合意結果 $\bar{X}(\infty)$ は次のように表せることがわかる。

$$\bar{X}(\infty) = r \sum_{t=0}^{\infty} (1-r)^t x_{e_t}(0). \quad (6)$$

(6) で e_t は時刻 t に発言したエージェントの番号である点に注意してほしい。 $Z_t \stackrel{\text{def}}{=} x_{e_t}(0)$ とおくと、 Z_t は確率 p_n で $x_n(0)$ に等しい値を取る離散確率変数である。(6) は

$$\bar{X}(\infty) = r \sum_{t=0}^{\infty} (1-r)^t Z_t, \quad (7)$$

と書いて、 Z_0, Z_1, \dots は独立同分布な確率変数列であるので、原理的には畳み込みを無限回行えば、 $\bar{X}(\infty)$ の分布が求まる。

$\bar{X}(\infty)$ の期待値や分散は以下で与えられる。

$$E[\bar{X}(\infty)] = E[Z_0], \quad \text{Var}[\bar{X}(\infty)] = \frac{r \text{Var}[Z_0]}{2-r}. \quad (8)$$

言いかえると、合意結果の期待値は信頼度パラメタ r に依存せず、合意結果の分散は r の増加関数である。信頼度パラメタが大きいほど主体性がないともいえるので、主体性のない人達が集まる会議ほど、その会議の結論は開催の度に大きくブレるということになる。

4. 2体のエージェントによる合意形成

Z_0, Z_1, \dots の分布が与えられたとしても、現実には (7) に基づいて合意結果 $\bar{X}(\infty)$ の分布を計算することは困難である。しかし、 $N = 2$ の場合、すなわち2体のエージェントによる合意形成の場合であれば何とかなるかもしれない。本節では、2体のエージェントによる合意結果の確率特性について紹介する。

以下では、簡単のため $p_1 = p_2 = 0.5$ とし、また一般性を失うことなく $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ を仮定する。このとき、 Z_0, Z_1, \dots は確率0.5で0、確率0.5で1を取るベルヌーイ確率変数となり、合意結果は互いに独立なベルヌーイ確率変数の和として表現することができる。実は、独立なベルヌーイ確率変数の和については古くから研究が行われており、これらの研究成果 [17] から、次の結論が得られる。

定理 4.1. $\bar{X}(\infty)$ の分布は r に以下のように依存する。

1. $r = 0.5$ のとき、 $\bar{X}(\infty)$ は0以上1以下の一様分布に従う。
2. $r \in (0.5, 1)$ のとき、 $\bar{X}(\infty)$ の分布は連続かつルベグ測度に関して特異である。
3. ほとんどすべての $r \in (0, 0.5)$ に対し、 $\bar{X}(\infty)$ の分布はルベグ測度に関して絶対連続である。

高々2体のエージェントの場合であっても、合意結果の分布は r の値によって大きく形を変える。 $r = 0.5$ のときに、合意結果が0から1の間に一様に分布してしまうのは少々驚きである(合意を図る意味がない)。また、 r がわずかでも0.5を超えると、特異分布になってしまうのも面白い。加えて、 r が0.5以下では必ずルベグ測度に関して絶対連続な分布になるわけではなく、例外が存在する。たとえば、 $r = (3 - \sqrt{5})/2 = 0.38196605\dots$ のときは $\bar{X}(\infty)$ の分布は特異であることが、「エルデシュ数」などで有名なポール・エルデシュによって示されている [18]¹。

図2は、初期意見が0と1の2体のエージェントの間で合意形成を図るシミュレーションを200回行い、2体の各エージェントの意見の時間変化を重ね書きしたものである。信頼度パラメタ r に依存して合意結果の分布範囲が大きく変わることが確認できる。

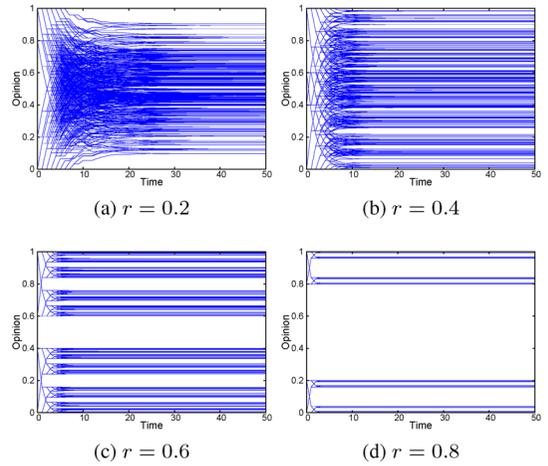


図2 2人の参加者による合意形成過程の信頼度パラメタ依存性

5. 初期意見が確率変数の場合

次にエージェントの初期意見 $x_1(0), \dots, x_N(0)$ が確率変数の場合を考察する。初期意見が確率変数であることを示すため、 $X_1(0), \dots, X_N(0)$ と大文字で記載する。 $X_1(0), \dots, X_N(0)$ は独立同分布であり、発言の順番を表す e_0, e_1, \dots とは独立であるとする。以下では、エージェント数 N と信頼度パラメタ r への依存性を陽に示すため、 $\bar{X}(t)$ は $\bar{X}^{(N)}(t, r)$ と記載することとする。ただし、時刻0でのエージェントの意見の加重平均は r に依存しないので、 $\bar{X}^{(N)}(0)$ と記す。定理3.1は次のように書ける。

$$\bar{X}^{(N)}(t, r) = (1-r)^t \bar{X}^{(N)}(0) + r \sum_{k=0}^{t-1} (1-r)^k X_{e_k}(0). \quad (9)$$

この式は次のように書き直すことができる。

定理 5.1.

$$\bar{X}^{(N)}(t, r) = \sum_{n=1}^N A_n(t, r) X_n(0), \quad t = 1, 2, \dots$$

ここで $A_n(t, r)$ は以下で定義される0以上1以下の値を取る確率変数である。

$$A_n(t, r) \stackrel{\text{def}}{=} p_n + r \sum_{k=0}^{t-1} (1-r)^k (1_{\{e_k=n\}} - p_n).$$

証明. $\bar{X}^{(N)}(0) = \sum_{n=1}^N p_n X_n(0)$ を (9) に代入して

¹ $r = 1$ の場合は、 $\bar{X}(\infty)$ は確率0.5で0、確率0.5で1に等しい。したがって、 $\bar{X}(\infty)$ の分布は連続ではない。

$$\begin{aligned}
\bar{X}^{(N)}(t, r) &= (1-r)^t \bar{X}^{(N)}(0) \\
&\quad + r \sum_{k=0}^{t-1} (1-r)^k X_{e_k}(0) \\
&= \sum_{n=1}^N \left\{ p_n (1-r)^t + r \sum_{k=0}^{t-1} (1-r)^k 1_{(e_k=n)} \right\} X_n(0) \\
&= \sum_{n=1}^N \left\{ p_n + r \sum_{k=0}^{t-1} (1-r)^k (1_{(e_k=n)} - p_n) \right\} X_n(0) \\
&= \sum_{n=1}^N A_n(t, r) X_n(0).
\end{aligned}$$

ここで最後から 2 番目の等式は $(1-r)^t = 1 - \sum_{k=0}^{t-1} (1-r)^k$ から導かれる。□

$\sum_{n=1}^N A_n(t, r) = 1$ であることに注意すると、定理 5.1 は、 $\bar{X}^{(N)}(t, r)$ が初期意見 $X_1(0), \dots, X_N(0)$ の (加重和 1 の) 加重平均であることを意味している。ただし、加重に相当する $A_n(t, r)$ は確率変数である。

信頼度パラメタが 0 のときは、どのエージェントが意見をブロードキャストしても、それに誰も影響されないの、各エージェントの意見は初期値のまま推移し、合意に達しない。したがって、 $\bar{X}^{(N)}(\infty, 0) = \bar{X}^{(N)}(0)$ である。信頼度パラメタ r がわずかでも 0 より大きければ合意は形成され、 $\bar{X}^{(N)}(\infty, r)$ は合意結果に一致するが、 $\bar{X}^{(N)}(\infty, r)$ は $r \rightarrow 0$ の極限で $\bar{X}^{(N)}(\infty, 0) = \bar{X}^{(N)}(0)$ に確率 1 で収束する (証明は省く)。

一方、信頼度パラメタが 1 のときは、時刻 0 で意見をブロードキャストしたエージェントの意見を全員が鵜呑みにして、そこで合意に達する (隣接行列 A は完全グラフの構造をもつと仮定しているため)。すなわち、 $\bar{X}^{(N)}(\infty, 1) = X_{e_0}(0)$ である。 $X_{e_0}(0)$ は $X_1(0)$ と同じ分布に従うので、 $\bar{X}^{(N)}(\infty, 1) \stackrel{d}{=} X_1(0)$ と書ける。ここで $\stackrel{d}{=}$ は分布の意味で等しいことを表す。

以上見たように、信頼度パラメタ r が 0 と 1 という両極端なケースでの合意結果 (正確には、 $r \rightarrow 0$ と $r = 1$ での合意結果) は対照的な振る舞いをする。 $r \rightarrow 0$ の極限では合意結果はエージェントの初期意見の平均値 $\bar{X}^{(N)}(0)$ に等しい。 $X_1(0)$ が可積分であれば、 $p_1 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$ として $N \rightarrow \infty$ とすれば、大数の法則より $\bar{X}^{(N)}(0)$ は $E[X_1(0)]$ に収束し、合意結果のランダム性は消える。一方、 $r = 1$ では合意結果は任意に選んだエージェントの初期意見に等しく、 $N \rightarrow \infty$ の極限でも合意結果にはランダム性が残る。なお、この結論はあくまで $X_1(0)$ が可積分である場合に限る。たとえば、 $X_1(0)$ がコーシー分布に従う場合は、 $\bar{X}^{(N)}(0) = X_1(0)$ であり、 $\bar{X}^{(N)}(\infty, 0)$ と

$\bar{X}^{(N)}(\infty, 1)$ は (分布の意味で) 等しい。

6. 初期意見が安定分布に従う場合

6.1 基本的な結果

定理 5.1 で見たように、合意結果はエージェントの初期意見 $X_1(0), \dots, X_N(0)$ の加重和 1 の加重平均として表すことができる。もし、 $X_1(0), \dots, X_N(0)$ が安定分布 [19] に従うならば、安定分布はいくつ足しても安定分布なので、合意結果も安定分布に従うことが期待できる。そこで、本節では $X_1(0), \dots, X_N(0)$ が安定分布 [19] である場合について考察する。

以下では、 $X_1(0), \dots, X_N(0)$ はいずれも $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ と表記される安定分布に従うとする。ここで、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は安定分布を特徴づけるパラメタであり、 $\alpha \in (0, 2]$ は特性指数、 $\beta \in [-1, 1]$ は歪度指数、 $\gamma \in (0, \infty)$ は尺度母数、 $\delta \in (-\infty, \infty)$ は位置母数と呼ばれる。安定分布の表記の 5 番目の数字 (0 か 1) は表記法の種類を表しており、本稿では 5 番目の数字が 0 である表記法を用いる。

安定分布の四つのパラメタのうち、特性指数 α は安定分布の裾の広がり特徴づける最も重要な量であり、 α が小さいほど裾が広い。 $\alpha = 2$ であれば分散が存在し、 $\alpha > 1$ であれば期待値が存在する。 $\alpha \leq 1$ ではもはや期待値も存在しない。正規分布は $\alpha = 2$ 、コーシー分布は $\alpha = 1$ ($\beta = 0$)、レヴィ分布は $\alpha = 0.5$ ($\beta = 1$) である。

安定分布の和について、次の重要な結果が知られている。

定理 6.1 (文献 [19])。 $\{S_n\}_{n=1}^N$ が独立同分布で、かつ安定分布 $\mathbf{S}(\alpha, \beta_n, \gamma_n, \delta_n; 0)$ に従う確率変数ならば、任意の実数 a_1, \dots, a_N に対し、 $\sum_{n=1}^N a_n S_n$ は安定分布 $\mathbf{S}(\alpha, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}; 0)$ に従う確率変数となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} &= \left(\sum_{n=1}^N |a_n \gamma_n|^\alpha \right)^{1/\alpha}, \\
\bar{\beta} &= \frac{\sum_{n=1}^N \beta_n (\text{sign } a_n) |a_n \gamma_n|^\alpha}{\bar{\gamma}^\alpha}, \\
\bar{\delta} &= \begin{cases} \sum_{n=1}^N a_n \delta_n + \tan \frac{\pi \alpha}{2} \\ \quad \times (\bar{\beta} \bar{\gamma} - \sum_{n=0}^N \beta_n a_n \gamma_n), & \alpha \neq 1 \\ \sum_{n=1}^N a_n \delta_n + \frac{2}{\pi} \bar{\beta} \bar{\gamma} \log \bar{\gamma} \\ \quad - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \beta_n a_n \gamma_n \log |a_n \gamma_n|. & \alpha = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

定理 6.1 を定理 5.1 に適用すると、次の結果が得ら

れる。

定理 6.2. $X_1(0)$ が安定分布 $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ に従うならば, $\{A_n(t, r)\}_{n=1}^N$ の出現値 (e_0, \dots, e_{t-1}) の出現値を固定すれば, $\bar{X}^{(N)}(t, r)$ は安定分布 $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma_t, \delta_t; 0)$ に従う。ここで

$$\gamma_t = \gamma \left(\sum_{n=1}^N A_n(t, r)^\alpha \right)^{1/\alpha},$$

$$\delta_t = \begin{cases} \delta, & \alpha \neq 1 \\ \delta - \frac{2\beta\gamma}{\pi} \sum_{n=1}^N A_n(t, r) \log A_n(t, r), & \alpha = 1 \end{cases}$$

証明. 定理 6.1 において, $a_n = A_n(t, r)$, $\beta_n = \beta$, $\gamma_n = \gamma$, $\delta_n = \delta$ とすれば良い。たとえば

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \left(\sum_{n=1}^N (A_n(t, r)\gamma)^\alpha \right)^{1/\alpha} \\ &= \gamma \left(\sum_{n=1}^N A_n(t, r)^\alpha \right)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{n=0}^N \beta(\text{sign} A_n(t, r))(A_n(t, r)\gamma)^\alpha}{\gamma_t^\alpha} \\ &= \frac{\beta\gamma^\alpha \sum_{n=0}^N (A_n(t, r))^\alpha}{\gamma_t^\alpha} = \beta \end{aligned}$$

であるから, β が不変であることも得られる。 δ_t に関する結果も同様に得られる。 \square

定理 6.2 は $\bar{X}^{(N)}(t, r)$ も安定分布に従うことを述べているが, その尺度母数 γ_t は $\{A_n(t, r)\}_{n=1}^N$ に依存するので, 実質, γ_t は確率変数である。しかし, 次に示すように, $\bar{X}^{(N)}(t, r)$ の尺度母数 γ_t と初期意見の尺度母数 γ (定数) との間には deterministic な大小関係が成立する。

系 6.3. 定理 6.2 において, γ_t は次を満たす。

$$\gamma_t \begin{cases} \leq \gamma, & \alpha > 1 \\ = \gamma, & \alpha = 1 \\ \geq \gamma, & \alpha < 1 \end{cases}$$

証明. $\alpha > 1$ ならば $A_n(t, r)^\alpha \leq A_n(t, r)$ であるから, $\sum_{n=1}^N A_n(t, r) = 1$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \gamma \left(\sum_{n=1}^N A_n(t, r)^\alpha \right)^{1/\alpha} \\ &\leq \gamma \left(\sum_{n=1}^N A_n(t, r) \right)^{1/\alpha} = \gamma 1^{1/\alpha} = \gamma. \end{aligned}$$

$\alpha = 1, \alpha < 1$ の場合も同様に証明できる。 \square

系 6.3 の結果は γ_t を合意結果の尺度母数 γ_∞ に置き換えても成り立つ。尺度母数は分布の幅を規定する量であり, 分散が存在する場合は尺度母数は標準偏差に等しい。系 6.3 は次のように解釈することができる。 $\alpha > 1$ の場合は, 合意結果の分布の幅は初期意見の分布の幅よりも小さい。したがって, 合意形成のプロセスを踏むことで, ある程度, 意見の集約が図れるといえる。一方, $\alpha < 1$ の場合は, 合意結果の分布の幅は初期意見の分布の幅よりも大きい。つまり, 合意形成のプロセスを踏んだ結果, かえって意見が分散してしまう (集合知が期待できない?)。つまり, 会議を開催する意味があるのは, 会議の参加者の意見の分布がそれなりの (期待値が定義できる程度の) 幅に収まっている場合ということになる。

5 節において, $X_1(0)$ がコーシー分布に従う場合は, $\bar{X}(\infty, 0)$ と $\bar{X}(\infty, 1)$ は分布の意味で等しいことを述べた。実は, $X_1(0)$ がコーシー分布に従う場合, 信頼度パラメータ r の値によらず, $\bar{X}(\infty, r)$ は初期意見と同じコーシー分布に従うことが, 次のように示される。

定理 6.4. $X_1(0)$ がコーシー分布に従うならば, $\bar{X}^{(N)}(t, r)$ および $\bar{X}^{(N)}(\infty, r)$ は $X_1(0)$ と同じパラメータをもつコーシー分布に従う。

証明. コーシー分布は $\alpha = 1$ および $\beta = 0$ の安定分布である。定理 6.2 より $\bar{X}^{(N)}(t, r)$ もコーシー分布であり, その位置母数 δ は $X_1(0)$ と等しいことがわかる。さらに系 6.3 より $\bar{X}^{(N)}(t, r)$ の尺度母数 γ_t は $X_1(0)$ の尺度母数 γ と等しいことがわかる。以上より, $\bar{X}^{(N)}(t, r) \stackrel{d}{=} X_1(0)$ である。これがすべての $t = 0, 1, \dots$ について成り立つことから, $\bar{X}^{(N)}(\infty, r) \stackrel{d}{=} X_1(0)$ も成り立つ。 \square

6.2 エージェント数が十分大きい場合

定理 6.2 で見たように $X_1(0)$ が安定分布に従うならば $\bar{X}^{(N)}(t, r)$ も安定分布に従うが, その尺度母数 γ_t は確率変数であるため, $X_1(0)$ がコーシー分布である場合を除き, その分布を陽に知ることはできない。

いま, (9) に立ち返って, $p_1 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$ とおきつつ $N \rightarrow \infty$ の極限を考える. まず, N を十分大きくすれば, 時刻 0 から時刻 $t-1$ までの間に 1 体のエージェントが複数回発言する確率をいくらでも小さくすることができる. すなわち, (9) において e_0, \dots, e_{t-1} が互いに異なるエージェントを指し, したがって $X_{e_0}, \dots, X_{e_{t-1}}$ を互いに独立とみなせる確率は, N を十分大きくすると 1 にいくらでも近づく. 事実, $X_1(0)$ が可積分であれば, 次が成り立つ (証明は省く).

$$\bar{X}^{(\infty)}(t, r) \stackrel{\text{d}}{=} (1-r)^t E[X_1(0)] + r \sum_{k=0}^{t-1} (1-r)^k Z_k. \quad (10)$$

ここで Z_0, Z_1, \dots は $X_1(0)$ と同じ分布に従う互いに独立な確率変数列である (3 節の Z_0, Z_1, \dots とは少し意味が異なる).

$X_1(0)$ が安定分布に従い, その特性指数が $\alpha > 1$ を満たすならば, $X_1(0)$ は可積分であり, (10) が成り立つ. したがって, 次の結果が得られる.

定理 6.5. $X_1(0)$ が安定分布 $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ に従い, かつ $\alpha > 1$ ならば, $\bar{X}^{(\infty)}(t, r)$ は安定分布 $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma_t, \delta; 0)$ に従う. ここで,

$$\gamma_t = \gamma r \left(\frac{1 - (1-r)^{t\alpha}}{1 - (1-r)^\alpha} \right)^{1/\alpha}.$$

証明. 定理 6.1 において, $a_n = r(1-r)^n$, $\beta_n = \beta$, $\gamma_n = \gamma$, $\delta_n = \delta$ とすれば良い. たとえば

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \left(\sum_{n=0}^{t-1} (r(1-r)^n \gamma)^\alpha \right)^{1/\alpha} \\ &= \gamma r \left(\frac{1 - (1-r)^{t\alpha}}{1 - (1-r)^\alpha} \right)^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

また, $\bar{X}^{(\infty)}(t, r)$ の歪度指数, 位置母数が $X_1(0)$ と同じであることも得られる. \square

$\bar{X}^{(\infty)}(t, r)$ は ($t < \infty$ なので) 合意結果ではない. $N \rightarrow \infty$ での合意結果は (N と t の両方を無限大とした場合の収束先なので) 少し慎重に考える必要がある. エージェントが N 体のとき, 時刻 t における意見の最大値と最小値の差を表す確率変数を $dX^{(N)}(t)$ で表す. $N \rightarrow \infty$ で無限大に発散する非負整数列 $\{t_N\}_{N=1}^\infty$ が存在し, $dX^{(N)}(t_N)$ が 0 に確率収束するならば, すな

わち, 任意の $\epsilon > 0$ に対し,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left(dX^{(N)}(t_N) > \epsilon \right) = 0$$

であれば, $N \rightarrow \infty$ においても合意が成立し, その際の合意結果は $\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{X}^{(N)}(t_N, r)$ に等しいとみなすこととする. このとき, 次の結果が得られる.

定理 6.6. $N \rightarrow \infty$ で無限大に発散する非負整数列 $\{t_N\}_{N=1}^\infty$ が存在し, 任意の $\epsilon > 0$ に対し,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} NP(|X_1(0)| > \epsilon(1-r)^{-t_N}) = 0 \quad (11)$$

が満たされれば, $N \rightarrow \infty$ において合意が成立する.

証明. 誰かが意見を発言するたびに, 意見の最大値と最小値の差はそれまでの $(1-r)$ 倍になることから $dX^{(N)}(t_N) = dX^{(N)}(0)(1-r)^{t_N}$ である. したがって,

$$\begin{aligned} P \left(dX^{(N)}(t_N) \leq \epsilon \right) &= P \left(dX^{(N)}(0) \leq \epsilon(1-r)^{-t_N} \right) \\ &\geq P \left(2 \max\{|X_1(0)|, \dots, |X_N(0)|\} \leq \epsilon(1-r)^{-t_N} \right) \\ &= \left(1 - P \left(|X_1(0)| > \frac{\epsilon}{2}(1-r)^{-t_N} \right) \right)^N. \end{aligned}$$

ここで $N \rightarrow \infty$ の極限を考えると

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P \left(dX^{(N)}(t_N) \leq \epsilon \right) &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - P \left(|X_1(0)| > \frac{\epsilon}{2}(1-r)^{-t_N} \right) \right)^N \\ &= e^{-\lim_{N \rightarrow \infty} NP(|X_1(0)| > \frac{\epsilon}{2}(1-r)^{-t_N})} = 1. \end{aligned}$$

以上より証明が完了する. \square

t_N が \sqrt{N} よりもゆっくりと増大すれば, 時刻 0 から時刻 $t_N(\epsilon)$ までに複数回発言するエージェントがいる確率は $N \rightarrow \infty$ の極限で無視でき, 次の結果が成り立つ (証明は省く).

定理 6.7. $N \rightarrow \infty$ で無限大に発散し (11) を満たす非負整数列 $\{t_N\}_{N=1}^\infty$ が存在するとする. $N \rightarrow \infty$ において $t_N/\sqrt{N} \rightarrow 0$ であるならば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{X}^{(N)}(t_N, r) \stackrel{\text{d}}{=} r \sum_{k=0}^{\infty} (1-r)^k Z_k. \quad (12)$$

ここで Z_0, Z_1, \dots は $X_1(0)$ と同じ分布に従う互いに独立な確率変数列である.

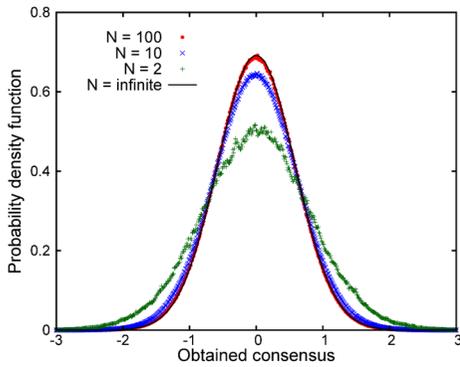


図3 合意結果の分布のエージェント数依存性：正規分布

$X_1(0)$ が安定分布 $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ に従えば, (12) の右辺は安定分布 $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma_\infty, \delta; 0)$ に従い,

$$\gamma_\infty = \frac{\gamma r}{(1 - (1-r)^\alpha)^{1/\alpha}}$$

である.

任意の $\eta \in (0, 0.5)$ と $c > 0$ により, $t_N = \lceil cN^\eta \rceil$ ($\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数) と定めると, $\lim_{N \rightarrow \infty} t_N / \sqrt{N} = 0$ である. 加えて, $t_N = \lceil cN^\eta \rceil$ とすれば, 裾が指数的に減衰する分布 (正規分布など) に加えて, 裾がべき的に減衰する分布 (レヴィ分布など) に $X_1(0)$ が従う場合でも, (11) は成立する. したがって, $X_1(0)$ がこれらの分布に従う場合は, $N \rightarrow \infty$ で合意が成立し, 合意結果は (12) で与えられる.

たとえば, $X_1(0)$ が平均 μ , 分散が σ^2 の正規分布に従うとする. 正規分布は特性指数が 2, $\gamma = \sigma$, $\delta = \mu$ の安定分布である. このとき (12) の右辺はやはり平均 μ の正規分布に従い, 分散 σ_∞^2 は以下で与えられる.

$$\sigma_\infty^2 = \frac{r\sigma^2}{2-r}. \quad (13)$$

図3は初期意見が平均0, 分散1の正規分布に従う場合, N の増加とともに合意結果の分布がエージェント数無限大の合意結果の分布 (分散が(13)で与えられる平均0の正規分布) にどのように近づくかを調べたものである. 信頼度パラメタは $r = 0.5$ としている. N を100まで増やせば, エージェント数無限大の際の分布とほぼ一致することが確認できる. また N が増えるほど, 分布の幅が狭まる傾向も見える.

また, $X_1(0)$ が位置母数 δ , 尺度母数が γ のレヴィ分布に従う場合, (12) の右辺は位置母数が δ , 尺度母数 γ_∞ が以下で与えられるレヴィ分布に従う.

$$\gamma_\infty = \frac{\gamma r}{2-r-2\sqrt{1-r}}. \quad (14)$$

図4は初期意見が尺度母数1, 位置母数0のレヴィ分布

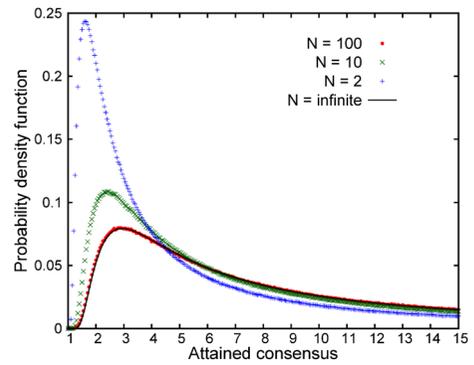


図4 合意結果の分布のエージェント数依存性：レヴィ分布

に従う場合, N の増加とともに合意結果の分布がエージェント数無限大の合意結果の分布 (位置母数0, 尺度母数が(14)で与えられるレヴィ分布) にどのように近づくかを調べたものである. やはり $r = 0.5$ としている. N を100まで増やせば, やはりエージェント数無限大の際の分布とほぼ一致する. さらに, 正規分布の場合 (図3) と異なり, N が大きくなるほど分布の幅が広がる (参加者が増えるほど收拾がつかなくなる) ことがわかる.

7. おわりに

本稿では, ブロードキャスト型合意形成における合意結果の確率特性について, 最近のわれわれの研究結果を紹介した. 単純なモデルではあるものの, 高々2体のエージェントであっても合意結果の確率的挙動は思いのほか複雑であり, ささまざまな考察を行える許容度のあるモデルであることがわかりいただけたかと思う.

3節の冒頭で述べたように, 本稿での考察は(1)エージェントが互いに直接意見を交換でき (隣接行列が完全グラフの構造をもち), かつ(2)信頼度パラメタは共通の値 r を取る (構成メンバが均質である) ことを仮定している. この仮定を緩めることが次の課題であるが, 次の課題に取り組む中で, また新しい発見が得られることを楽しみにしている.

参考文献

- [1] M. H. DeGroot, "Reaching a consensus," *Journal of the American Statistical Association*, **69**, pp. 118–121, 1974.
- [2] J. N. Tsitsiklis, "Problems in decentralized decision making and computation," Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- [3] Q. Li and D. Rus, "Global clock synchronization in sensor networks," *IEEE Transactions on Computers*, **55**, pp. 214–226, 2006.

- [4] S. Muthukrishnan, B. Ghosh and M. H. Schultz, “First-and second-order diffusive methods for rapid, coarse, distributed load balancing,” *Theory of Computing Systems*, **31**, pp. 331–354, 1998.
- [5] Y. Rabani, A. Sinclair and R. Wanka, “Local divergence of Markov chains and the analysis of iterative load-balancing schemes,” In *Proceedings of the 39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Cat. No. 98CB36280)*, 1998.
- [6] L. Xiao, S. Boyd and S. Lall, “A scheme for robust distributed sensor fusion based on average consensus,” In *Proceedings of the Fourth International Symposium on Information Processing in Sensor Networks (IPSN 2005)*, 2005.
- [7] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Graph rigidity and distributed formation stabilization of multi-vehicle systems,” In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, **3**, 2002.
- [8] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**, pp. 1520–1533, 2004.
- [9] D. Acemoğlu, G. Como, F. Fagnani and A. Ozdaglar “Opinion fluctuations and persistent disagreement in social networks,” In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011.
- [10] D. Acemoğlu, G. Como, F. Fagnani and A. Ozdaglar, “Opinion fluctuations and disagreement in social networks,” *Mathematics of Operations Research*, **38**, pp. 1–27, 2013.
- [11] C. Altafini and G. Lini, “Predictable dynamics of opinion forming for networks with antagonistic interactions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, **60**, pp. 342–357, 2014.
- [12] S. Shioda, “Distribution of consensus in a broadcasting-based consensus-forming algorithm,” *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, **48**, pp. 91–96, 2020.
- [13] 加藤大, 塩田茂雄, “ブロードキャスト型合意形成における合意結果の確率特性,” 待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」, 2021.
- [14] 塩田茂雄, “ブロードキャスト型合意形成における合意結果の分布に関する考察一,” 日本オペレーションズ・リサーチ学会待ち行列研究部会, 2021.
- [15] F. Fagnani and S. Zampieri, “Randomized consensus algorithms over large scale networks,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **26**, pp. 634–649, 2008.
- [16] T. C. Aysal, M. E. Yildiz, A. D. Sarwate and A. Scaglione, “Broadcast gossip algorithms for consensus,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, **57**, pp. 2748–2761, 2009.
- [17] P. Diaconis and D. Freedman, “Iterated random functions,” *SIAM review*, **41**, pp. 45–76, 1999.
- [18] P. Erdős, “On a family of symmetric Bernoulli convolutions,” *American Journal of Mathematics*, **61**, pp. 974–976, 1939.
- [19] J. P. Nolan, *Univariate Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*, Springer, 2020.