Lévy過程の在庫制御問題について

野場　啓

本稿では，ランニングコストと制御コストを最小に抑えることを目的とする，古典的な在庫制御問題を扱う．制御前の在庫量は Lévy 過程で表す．Lévy 過程の定義と基本的な性質を説明したのち，Lévy 過程を用いた在庫制御問題の研究を二つ紹介する．

キーワード：Lévy 過程，在庫制御問題，バリア戦略

1. 序

近年 COVID-19 によるパンデミックの影響で，世界中の多くの都市で医療崩壊が起きた．医療崩壊を防ぐためには，利用可能なベッド，人工呼吸器，その他の医療リソースの数，院内感染のリスクなどを考慮し受け入れる患者数を制限する必要がある．

医療崩壊を極力防ぐために，あらゆるコストを最小化する最適な受け入れ患者数を求める問題は，在庫制御問題の枠組みに落とし込むことができる．在庫制御問題では，制御前の在庫量を何かしらの確率過程で表し，その在庫量を制御することで，在庫を保持し続けるコストと制御コストを最小化することを目的とする．

在庫制御問題はヘルスケアマネジメントだけでなく，数理ファイナンスに応用することもできる．在庫量を表す確率過程を通貨のレートとみなすことで，取引所において通貨を安定させるためのレートの調整の問題とみなせる．

在庫制御問題の多くは，ブラウン運動，正のジャンプをもたないドリフト付き複合 Poisson 過程，またそれらを組み合わせた確率過程によって制御前の在庫量を表すことで研究されてきた．多くの研究では，固定コストを考慮するかどうかに応じて，バリア戦略または (s,S) 型戦略が最適戦略になることが示されてきた．

2000 年代に入り，（標本路が単調ではない）正のジャンプをもたない Lévy 過程のスケール関数の理論が発展してきた．スケール関数とは，正のジャンプをもたない Lévy 過程のある区間からの脱出時刻の分布や吸収壁ポテンシャル測度（Lévy 過程の Feller 過程としての性質を表せる測度である）を特徴づけることができる関数である．スケール関数は Lévy 過程の Laplace 指数と Laplace 変換を用いて定義できるため，数値計算に適している．また在庫制御問題において，片側のジャンプをもたない Lévy 過程に対して特定の戦略をとったときのコストの期待正味現在価値 (net present value，NPV) はスケール関数を用いて表現することができる．以上の理由から，在庫制御問題は近年片側のジャンプをもたない Lévy 過程の枠組みで文献 [1] をはじめとして研究され始めた．

ここで，上記のヘルスケアマネジメントの問題に戻る．患者の数は，パンデミックにより急激に増加したり，ワクチンの開発により急激に減少する可能性がある．そのため，患者の数を表す確率過程は，正と負のいずれのジャンプももちうるべきであり，そのような枠組みでの在庫制御問題の研究は最近まで存在していなかった．一方，今年出版された文献 [2] では，正と負のいずれのジャンプももちうる Lévy 過程に対して，ある条件の下で最適配当問題を解決した．われわれは文献 [3] で，文献 [2] で用いた手法を参考に，正と負のいずれのジャンプももちうる Lévy 過程（一般の Lévy 過程と呼ぶことにする）に対する在庫制御問題を考え，バリア戦略が最適戦略となることを示した．

本稿では 2 節で Lévy 過程の基本的な性質や構造を，3 節で在庫制御問題の数学的な設定を説明したのち，4 節で負のジャンプをもたない Lévy 過程を用いた在庫制御問題の研究の例として文献 [1] を，5 節で一般の Lévy 過程を用いた在庫制御問題の研究の例として文献 [3] を紹介する．

2. Lévy 過程とは

2.1 Lévy 過程の定義

ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で，$t \geq 0$ に対して定義される確率変数 $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ を考える．この確率変数の集合 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ のことを**確率過程**と呼ぶ．次の条件を満たす確率過程 X を **Lévy 過程**と呼ぶ：

1. 写像 $t \mapsto X_t$（この写像は標本路と呼ばれる）は，

のば　けい
統計数理研究所統計思考院
〒 190–8562 東京都立川市緑町 10–3
knoba@ism.ac.jp

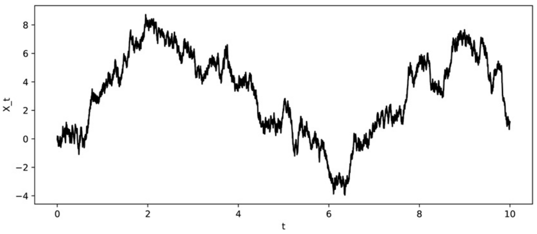

図 1　標準ブラウン運動

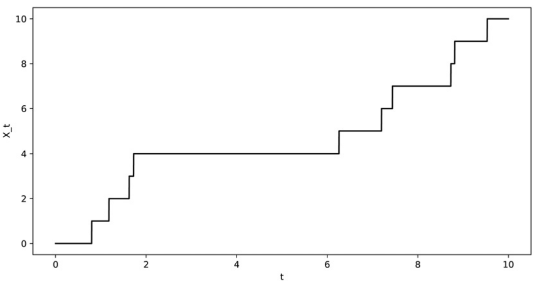

図 2　Poisson 過程

確率 1 で右連続かつ左極限をもつ関数である．

2. $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ を満たす．
3. 確率過程 X は，**独立増分性**を満たす．つまり，任意の非負の実数 $s \leq t$ に対して，確率変数 $X_t - X_s$ は，$\{X_u : u \in [0, s]\}$ と独立である．
4. 確率過程 X は，**定常増分性**を満たす．つまり，任意の非負の実数 $s \leq t$ に対して，確率変数 $X_t - X_s$ は確率変数 $X_{t-s} - X_0$ と同分布である．

以後，確率過程 X は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で，上記の条件を満たすとする．値 $x \in \mathbb{R}$ を出発する Lévy 過程は，$X^{(x)} := \{x + X_t : t \geq 0\}$ で与えられる．

例 2.1.　値 $t \geq 0$ に対して，X_t が平均 0，分散 t の正規分布となるとき，この Lévy 過程は**標準ブラウン運動**と呼ばれる（図 1）．標準ブラウン運動の標本路は連続である．

例 2.2.　値 $t \geq 0$ と $\lambda > 0$ に対して，X_t が強度 λt の Poisson 分布となる時，この Lévy 過程は強度 λ の **Poisson 過程**と呼ばれる（図 2）．Poisson 過程の標本路は単調増加で自然数の値をとる．

値 $x \in \mathbb{R}$ に対して，可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ の確率測度 $\mathbb{P}_x$ を x 出発の Lévy 過程の確率法則とし，$\mathbb{P}_x$ による期待値は $\mathbb{E}_x$ で表すことにする．つまり，確率測度 $\mathbb{P}_x$ は確率過程 X と任意の非負可測汎関数 f に対して，

$$\mathbb{E}_x [f(X)] = \mathbb{E}\left[f(X^{(x)})\right]$$

を満たす．$\mathbb{P}$ と $\mathbb{P}_0$ は同じ確率測度である．

2.2　Lévy 過程の構造

Lévy 過程 X に対して，次の二つの式を満たす関数 $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が存在することが知られている：

$$\mathbb{E}\left[e^{i\theta X_t}\right] = e^{-t\Psi(\theta)}, \qquad t \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) = &-ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 \\ &+ \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x 1_{\{|x|<1\}})\Pi(dx).\end{aligned} \tag{2.1}$$

ただし，$a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ で，Π は次の式を満たす $\mathbb{R}$ 上の測度である：

$$\Pi(\{0\}) = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\Pi(dx) < \infty.$$

関数 Ψ，式 (2.1)，測度 Π，三つ組 (a, σ, Π) は，それぞれ Lévy 過程 X の**特性指数**，**Lévy-Khintchine 表現**，**Lévy 測度**，**生成三つ組**と呼ばれる．Lévy 過程と上記の条件を満たす生成三つ組は，Lévy-Khintchine 表現を通して一対一に対応することが知られている．つまり，生成三つ組は Lévy 過程を特徴づけるパラメータである．

値 $t \geq 0$ に対して，Lévy 過程 X は次のように書けることが知られている：

$$X_t = at + \sigma B_t + J_t + M_t. \tag{2.2}$$

ただし，$B = \{B_t : t \geq 0\}$ は標準ブラウン運動であり，$J = \{J_t : t \geq 0\}$ は

$$J_t = \sum_{s \in [0,t]} (X_s - X_{s-}) 1_{\{|X_s - X_{s-}| \geq 1\}}, \quad t \geq 0,$$

つまり X の大きさが 1 以上のジャンプによって作られる確率過程，$M = \{M_t : t \geq 0\}$ は X の大きさが 1 未満のジャンプとその補正によって作られるマルチンゲールである．確率過程 J と M は，Lévy 測度 Π によって決まる．式 (2.2) のような X の表現は，**Lévy-Itô 分解**と呼ばれる．Lévy-Itô 分解により，生成三つ組が Lévy 過程 X の構造を表現しているといえる．

1 節で名前を出した Lévy 過程について，説明を以下で補足する．X は，生成三つ組が，$\Pi(\mathbb{R}) < \infty$ を満たすときドリフト付き複合 Poisson 過程，$\Pi(0, \infty) = 0$ を満たすとき正のジャンプをもたない Lévy 過程，$\Pi(-\infty, 0) = 0$ を満たすとき負のジャンプをもたない Lévy 過程と呼ばれる．また，$a = 0$，$\sigma = 1$，

$\Pi(\mathbb{R}) = 0$ を満たすとき標準ブラウン運動，$a = 0$, $\sigma = 0$, $\Pi(\mathbb{R}) = \Pi(\{1\}) = \lambda > 0$ を満たすとき強度 λ の Poisson 過程である．

2.3　Lévy 過程の生成作用素

Feller 過程を特徴づける道具に，生成作用素と呼ばれるものが存在する．Lévy 過程は Feller 過程に含まれており，またその生成作用素は，生成三つ組を用いて表されることが知られている．具体的には，Lévy 過程の生成作用素 $\mathcal{L}$ は，十分に滑らか（たとえば $C^2(\mathbb{R})$ に含まれる）で良い条件を満たす（たとえば無限小や無限大で 0 に収束する）関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}g(x) &= ag'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 g''(x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (g(x+z) - g(x) - g'(x)z1_{(|z|<1)})\Pi(dz)\end{aligned}$$

を満たす作用素として与えられる．

2.4　Lévy 過程の到達時刻

値 $x \in \mathbb{R}$ に対し，Lévy 過程の半区間 $(-\infty, x)$ および (x, ∞) への到達時刻を，次の記号で表す：

$$\begin{aligned}\tau_x^- &= \inf\{t > 0 : X_t < x\}, \\ \tau_x^+ &= \inf\{t > 0 : X_t > x\}.\end{aligned}$$

到達時刻の性質は，在庫制御問題の最適性の証明で重要になってくる．

3.　在庫制御問題について

本節では，1 節で説明した在庫制御問題の数学的な設定を簡単に説明する．

まず，値 0 を出発する Lévy 過程 $D := \{D_t : t \geq 0\}$ はある物の需要を表すものとする．その在庫量の初期値を $x \in \mathbb{R}$ としたとき，時間 $t \geq 0$ における在庫量は，$X_t := x - D_t$ で表すことができる．つまり，Lévy 過程 $X := \{X_t : t \geq 0\}$ は，制御を行わない場合の在庫量の時間変化を表す．

ランニングコストを抑えるために，適宜在庫を追加したい．ここで在庫の追加方法の戦略を確率過程 $\pi = \{R_t^\pi : t \geq 0\}$ で表すものとする．R_t^π は時刻 t までに追加した在庫の総量を表している．戦略 π は少なくとも次の二つの条件を満たすものとする．

1. 写像 $t \mapsto R_t^\pi$ は，単調増加で右連続かつ左極限をもつ．
2. 戦略 π は，Lévy 過程 X によって生成される自然なフィルトレーション $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ に対して適合である．つまり，戦略 π の挙動は Lévy 過程 X の挙動に依存する．

戦略 π をとったときの在庫量の時間変化は，

$$U_t^\pi := X_t + R_t^\pi, \quad t \geq 0$$

で表される．

ランニングコストや制御コストに関する記号をいくつか定義していく．正の値 q を割引率とする．つまり，時間 $t \geq 0$ における金銭の価値は，e^{-qt} だけ割引して考えるものとする．次に，凸関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を在庫保持コストとする．つまり，在庫量が $x \in \mathbb{R}$ のときの在庫保持コストは $f(x)$ で表される．このとき，戦略 π をとったときのランニングコストは，

$$\int_0^\infty e^{-qt} f(U_t^\pi) dt$$

で与えられる．また，在庫補充にかかるユニットコスト/リワードは，ある汎関数 F を用いて $F(R^\pi)$ と表せるとする（汎関数 F は問題の設定によって変化する）．以上から，在庫量が $x \in \mathbb{R}$ で始まるときのコストの NPV は，

$$v_\pi(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-qt} f(U_t^\pi) dt + F(R^\pi)\right]$$

で与えられる．本稿の目的は，v_π を最小化する戦略 π を見つけ出すことである．つまり，すべての戦略によって作られる集合を $\mathcal{A}$ としたとき，

$$v_{\pi^*}(x) = \inf_{\pi \in \mathcal{A}} v_\pi(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

を満たす戦略 $\pi^* \in \mathcal{A}$ を見つけたい．式 (3.1) を満たす戦略 π^* は，**最適戦略**と呼ばれる．

4.　負のジャンプをもたないケースの例

本節では，負のジャンプをもたない Lévy 過程を扱った研究の例として，文献 [1] で与えられた結果を簡単に説明する．文献 [1] は，在庫制御問題にスケール関数を用いた最初の研究である．この節では，X を負のジャンプをもたず，標本路が単調増加でない Lévy 過程とする．つまり，生成三つ組 (a, σ, Π) は，$a < 0$ と $\sigma > 0$ のうち少なくとも一つと，$\Pi(\infty, 0) = 0$ を満たす（図 3）．

4.1　問題の設定

コスト関数 f や Lévy 過程 X には，いくつかのテクニカルな条件を課す必要があるが，本稿ではその説明を省略することにする．

在庫補充には，ユニットコスト/リワード $C \in \mathbb{R}$（$C > 0$ のときはコスト，$C < 0$ のときはリワードで

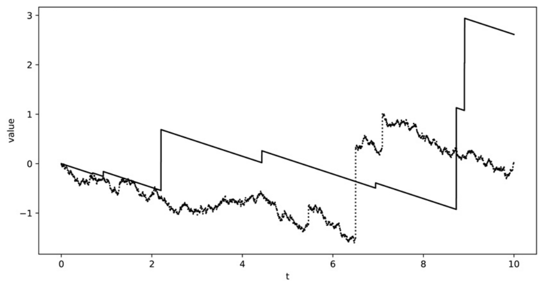

図 3　負のジャンプをもたない Lévy 過程の例
実線：$a < 0$ かつ $\sigma = 0$ の場合，点線：$\sigma > 0$ の場合.

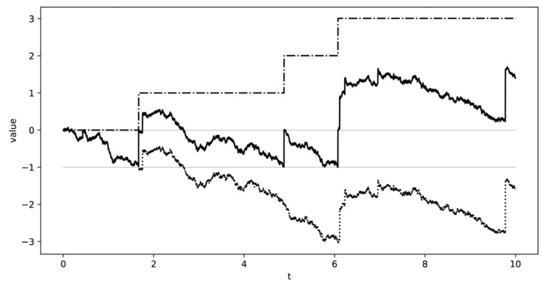

図 4　$(-1, 0)$ 型戦略
実線：制御後の在庫量，　点線：制御前の在庫量，一点鎖線：補充した在庫量.

ある）と固定コスト $K > 0$ がかかるとする（文献 [1] では固定コストがない場合も扱っているが，この節では固定コストが存在する場合のみ扱うことにする）．そのため，在庫補充は離散的に行われる．よって，$\mathcal{A}$ は単調増加な $\mathbb{F}$ についての停止時間の列 $\{T_k^\pi\}_{k\in\mathbb{N}}$ と各 $k \in \mathbb{N}$ に対して定義される $\mathcal{F}_{T_k^\pi}$-可測な正の確率変数 u_k^π を用いて，

$$R_t^\pi = \sum_{k\in\mathbb{N}} 1_{\{T_k^\pi \le t\}} u_k^\pi, \quad t \ge 0 \tag{4.1}$$

と書ける戦略から構成される．値 $y > 0$ に対して $g(y) := Cy + K$ とすると，戦略 π をとったときの制御コストは割引率が $q > 0$ を満たすことも用いて，

$$F(R^\pi) = \sum_{t\in[0,\infty)} e^{-qt} g(R_t^\pi - R_{t-}^\pi) 1_{\{\Delta R_t^\pi > 0\}}$$

と表すことができる．上記の設定の下で (3.1) を満たす最適戦略 π^* を見つけ出したい．

4.2　(s, S) 型戦略

1 節で述べたように，文献 [1] では，(s, S) 型戦略の最適性を示した．ここでは (s, S) 型戦略の定義を説明する．

二つの実数 s, S が $s < S$ を満たすとする．このとき，(s, S) 型戦略 $\pi^{s,S}$ とは，$k \in \mathbb{N}$ に対して定義される次の式

$$T_k^{\pi^{s,S}} = \inf\left\{t > T_{k-1}^{\pi^{s,S}} : S + (X_t - X_{T_{k-1}^{\pi^{s,S}}}) < s\right\},$$
$$u_k^{\pi^{s,S}} = -\left(X_{T_k^{\pi^{s,S}}} - X_{T_{k-1}^{\pi^{s,S}}}\right)$$

から帰納的に定義される $T_k^{\pi^{s,S}}$ および $u_k^{\pi^{s,S}}$ を用いて，式 (4.1) により構成される戦略を指す．大まかにいえば，在庫量が値 s を切るたびに，値 S になるように補充する戦略である（図 4）．

4.3　検証補題

戦略の最適性を証明するためには，次の補題を用いる必要がある．

補題 4.1.　十分に滑らかな関数 w が次の条件を満たすとする：ある実数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\mathcal{L}w(x) - qw(x) + f(x) \ge 0, \ x \in \mathbb{R}\backslash\{c\}, \tag{4.2}$$
$$w(x) \le K + \inf_{u\ge 0}(Cu + w(x+u)), \ x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

このとき，$w(x) \le \inf_{\pi\in\mathcal{A}} v_\pi(x), x \in \mathbb{R}$ が成り立つ．

この補題の証明は，文献 [4] などに書かれている．このような検証補題は，Lévy 過程を用いた確率制御の研究でよく使われる．多くの検証補題の証明は，伊藤の公式（たとえば文献 [5] を参照）を用いて計算すればできることが知られている．上記の補題から，ある (s, S) 型戦略を用いたときにコストの NPV が十分に滑らかで，式 (4.2) と (4.3) を満たすことを示せばよい．

4.4　スケール関数

本節について詳しくは文献 [6] や文献 [7] を見ていただきたい．Lévy 過程 X は負のジャンプをもたないため，$\hat{X} = \{\hat{X}_t := -X_t : t \ge 0\}$ は正のジャンプをもたない Lévy 過程である．Lévy 過程 $\hat{X}$ の三つ組 $(\hat{a}, \hat{\sigma}, \hat{\Pi})$ は，次の条件を満たす：

$$\hat{a} = -a, \quad \hat{\sigma} = \sigma,$$
$$\hat{\Pi}((k, l)) = \Pi((-l-k)), \ \text{for } k < l.$$

正のジャンプをもたない Lévy 過程 $\hat{X}$ には，次の二つの式を満たす関数 $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ が存在することが知られている：

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta \hat{X}_t}\right] = e^{t\psi(\theta)}, \qquad t \ge 0, \ \theta \ge 0,$$

$$\psi(\theta)=\hat{a}\theta+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\theta^2 + \int_{(0,\infty)}(e^{\theta x}-1-\theta x 1_{\{x>-1\}})\hat{\Pi}(dx).$$

この関数 ψ は，$\hat{X}$ の Laplace 指数と呼ばれる．非負の実数 $q \geq 0$ に対し，$\hat{X}$ の q-スケール関数 $W^{(q)}:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ とは，$(-\infty,0)$ 上では 0 であり，$[0,\infty)$ 上では連続で，Laplace 変換

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}W^{(q)}(x)dx=\frac{1}{\psi(\beta)-q},\quad \beta>\Phi(q)$$

を満たす関数である．ここで, 関数 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ は，次の式で与えられる：

$$\Phi(\lambda):=\sup\{\theta\geq 0:\psi(\theta)=q\}.$$

次の関数を定義する：

$$\bar{W}^{(q)}(x)=\int_0^{x\wedge 0}W^{(q)}(y)dy,$$
$$Z^{(q)}(x)=1+q\bar{W}^{(q)}(x).$$

Lévy 過程 $\hat{X}$ の到達時間を,

$$\hat{\tau}_x^-=\inf\{t>0:\hat{X}_t<x\},$$
$$\hat{\tau}_x^+=\inf\{t>0:\hat{X}_t>x\}$$

で表すと，実数 $q\geq 0$, $c<x<d$ と非負可測関数 f に対して,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\hat{\tau}_d^+};\hat{\tau}_d^+<\hat{\tau}_c^-\right]=\frac{W^{(q)}(x-c)}{W^{(q)}(d-c)},$$
$$\mathbb{E}_x\left[e^{-q\hat{\tau}_c^-};\hat{\tau}_d^+<\hat{\tau}_c^-\right] = Z^{(q)}(x-c)-Z^{(q)}(d-c)\frac{W^{(q)}(x-c)}{W^{(q)}(d-c)},$$
$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\hat{\tau}_c^-\wedge\hat{\tau}_d^+}e^{-qt}f(\hat{X}_t)dt\right] = \int_c^d f(y)\left(\frac{W^{(q)}(x-c)W^{(q)}(d-y)}{W^{(q)}(d-c)} - W^{(q)}(x-y)\right)dy$$

が成り立つ．この性質は非常に重要であり，正のジャンプをもたない Lévy 過程の極限での挙動や条件付け，Wiener-Hopf 分解の構造の理解に有用であることが知られている．片側のジャンプをもたない Lévy 過程の在庫制御問題を含む確率制御の問題にも有用である．

4.5 主結果と証明の方針

スケール関数と生成作用素の関係は，文献 [8]，文献 [9] および文献 [10] で扱われてきた．本稿でも (s,S) 型戦略のコストの NPV をスケール関数で表し，上記の先行研究を含むさまざまなスケール関数の性質を用いて補題 4.1 の条件を満たすことを示している．関数 $v_{\pi^{s,S}}$ のスケール関数を用いた表示については，非常に複雑であるため本稿では省略する．詳しくは文献 [1] を見ていただきたい．

スケール関数を用いて，二つの値 s^* および S^* を定義する（詳しくは文献 [1] を参照)．スケール関数の性質を用いることで，次の主結果が得られる．

定理 4.1（文献 [1]）**.** (s^*,S^*) 型戦略 π^{s^*,S^*} が最適戦略である．

5. 一般の Lévy 過程の場合

本節では, 正と負のいずれのジャンプももちうる Lévy 過程を扱った研究の例として，文献 [3] で与えられた結果を簡単に説明する．

5.1 問題の設定

4 節と同様に，コスト関数 f と Lévy 過程には，いくつかのテクニカルな条件を課す必要があるが，本稿ではその説明を省略することにする．

在庫補充には，ユニットコスト/リワード $C\in\mathbb{R}$ がかかり，固定コストはかからないものとする．そのため，4 節と異なり，いつでもいかなるときでも在庫の補充を行うことができる．このケースでは，$\mathcal{A}$ は単調増加で $\mathbb{F}$-適合な確率過程の集合だと考える（ほかにも細かい条件を課す必要がある)．割引率は $q>0$ なので，戦略 π をとったときの制御コストは,

$$F(R^\pi)=C\int_{[0,\infty)}e^{-qt}dR_t^\pi$$

と表すことができる．

5.2 バリア戦略

1 節で述べたように，文献 [3] では，バリア戦略の最適性を示した．ここではバリア戦略の定義を説明する．

ある実数 $b\in\mathbb{R}$ に対し, 値 b でのバリア戦略 π^b とは,

$$R_t^{\pi^b}=-\left\{\inf_{s\in[0,t]}(X_s-b)\wedge 0\right\},\quad t\geq 0,$$

を満たす戦略を指す．大まかにいえば，在庫量が値 b を切るたびに，値 b を下回った分だけ在庫を補充する戦略である（図 5).

5.3 検証補題

4 節と同様に，伊藤の公式を用いることで次の補題

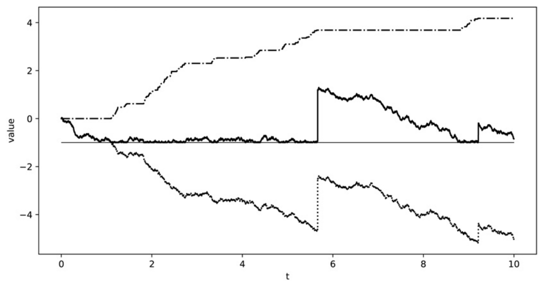

図 5　-1 でのバリア戦略
実線：制御後の在庫量，点線：制御前の在庫量，一点鎖線：補充した在庫量．

を証明することができる．

補題 5.1（文献 [3]）**.** 十分に滑らかな関数 w が次の条件を満たすとする：

$$\mathcal{L}w(x) - qw(x) + f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$
$$w'(x) + C \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

このとき，$w(x) \leq \inf_{\pi \in \mathcal{A}} v_\pi(x), x \in \mathbb{R}$ が成り立つ．

上記の補題から，あるバリア戦略を用いたときにコストの NPV が十分に滑らかで，式 (5.1) と (5.2) を満たすことを示せばよい．

5.4　証明の方針

4 節では，(s,S) 型戦略のコストの NPV をスケール関数で表し，スケール関数を利用することで検証補題で提示された条件を示した．しかし，一般の Lévy 過程に対してはスケール関数を用いることはできない．そのため，文献 [3] では，標本路の挙動をわずかにずらしたとき，バリア戦略のコストの NPV にどのような影響を与えるかを観察することにより，その性質を求めた．具体的には，次の補題を与えた．

補題 5.2（文献 [3]）**.** 条件 $b \neq x$ を満たす実数 $b, x \in \mathbb{R}$ に対して，次の式が成り立つ：

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{v_{\pi^{b+\varepsilon}}(x) - v_{\pi^b}(x)}{\varepsilon} = \mathbb{E}_x \left[\int_{\tau_b^-}^{\infty} e^{-qt} f'_+(U_t^{\pi^b}) dt \right] + C\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^-} \right].$$

ただし，関数 f'_+ は関数 f の右微分である．

この補題は，確率過程 $U^{\pi^{b+\varepsilon}}$ および U^{π^b} の標本路を観察し評価することにより，証明することができる．この補題により，バリア戦略のバリアの位置は，

$$b^* = \inf\left\{ b \in \mathbb{R} : \mathbb{E}_b \left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_+(U_t^{\pi^b}) dt \right] + C \geq 0 \right\}$$

が最適であることがわかる．補題 5.2 と同様に，x を出発する場合，および $x+\varepsilon$ を出発する場合の U^{π^b} の標本路を観察し評価することにより，次の補題が得られる．

補題 5.3（文献 [3]）**.** 実数 $b, x \in \mathbb{R}$ に対して，次の式が成り立つ：

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{v_{\pi^b}(x+\varepsilon) - v_{\pi^b}(x)}{\varepsilon} = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_b^-} e^{-qt} f'_+(X_t) dt \right] - C\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^-} \right].$$

特に，関数 $v_{\pi^{b^*}}$ は $C^1(\mathbb{R})$ に属し，その微分はある値 $\varepsilon^* \in [0,1]$ と関数

$$f'_{\varepsilon^*}(y) := (1-\varepsilon^*) f'_+(y) + \varepsilon^* f'_-(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

を用いて，実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して次の式で与えられる：

$$v'_{\pi^{b^*}}(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} f'_{\varepsilon^*}(U_t^{\pi^b}) dt \right].$$

この補題と伊藤の公式を用いることにより，先行研究と同様にして関数 $v_{\pi^{b^*}}$ が補題 5.1 で与えられた条件を満たすことがわかり，次の定理を得ることができる．

定理 5.1（文献 [3]）**.** 値 b^* は実数であり，値 b^* でのバリア戦略 π^{b^*} が最適戦略である．

6.　結論

4 節で紹介した研究のように，片側のジャンプをもたない Lévy 過程を用いた在庫制御問題は，スケール関数を用いることで解決されてきた．一方で 5 節で紹介した研究により，一般の Lévy 過程を用いた在庫制御問題は，新たに導入した標本路を観察する手法を用いることにより解決できる場合があることがわかった．しかし，主要な戦略のコストの NPV の具体的な計算は避けているため，スケール関数を用いた議論に比べて数値計算のハードルは高い．

謝辞　本稿を作成するにあたり，構成についてアドバイスを下さった関西大学の山崎和俊先生に，心より感謝致します．

参考文献

[1] K. Yamazaki, "Inventory control for spectrally positive Lévy demand processes," *Mathematics of Operations Research*, **42**, pp. 212–237, 2017.

[2] K. Noba, "On the optimality of double barrier strategies for Lévy processes," *Stochastic Processes and Their Applications*, **131**, pp. 73–102, 2021.

[3] K. Noba and K. Yamazaki, "On singular control for Lévy processes," arXiv:2008.03021v2, 2020.

[4] A. Bensoussan, R. H. Liu and S. P. Sethi, "Optimality of an (s, S) policy with compound Poisson and diffusion demands: A quasi-variational inequalities approach," *SIAM Journal on Control and Optimization*, **44**, pp. 1650–1676, 2005.

[5] P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations (Stochastic Modelling and Applied Probability*, 21), Springer-Verlag, 2005.

[6] A. Kuznetsov, A. E. Kyprianou and V. Rivero, "The theory of scale functions for spectrally negative Lévy processes," *Lévy Matters II. Lecture Notes in Mathematics Vol. 2061*, S. Cohen, A. Kuznetsov, A. E. Kyprianou and V. Rivero (eds.), Springer, pp. 97–186, 2013.

[7] A. E. Kyprianou, *Fluctuations of Lévy Processes with Applications*, Springer, 2014.

[8] F. Avram, Z. Palmowski and M. R. Pistorius, "On the optimal dividend problem for a spectrally negative Lévy process," *The Annals of Applied Probability*, **17**, pp. 156–180, 2007.

[9] E. Biffis and A. E. Kyprianou, "A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk processes," *Insurance: Mathematics and Economics*, **46**, pp. 85–91, 2010.

[10] M. Egami and K. Yamazaki, "Precautionary measures for credit risk management in jump models," *Stochastics*, **85**, pp. 111–143, 2013.

