

無限サーバ待ち行列モデルにおける Age of Information の解析

井上 文彰

Age of Information (AoI) はリアルタイムのモニタリングシステムにおける情報鮮度を定量的に表現する性能指標であり、近年その活発な研究が行われている。本稿では、初めに AoI の基本的な定式化を説明したのち、筆者が第 37 回待ち行列シンポジウムにおいて報告した「無限サーバ待ち行列モデル GI/GI/∞」ならびにその特別な場合における AoI の解析結果を紹介する。GI/GI/∞ 待ち行列モデルは遅延時間の系列が独立かつ同一に分布するという状況を表すモデルであり、情報通信ネットワークを簡易に表現するモデルとなっている。本稿では、GI/GI/∞ 待ち行列モデルにおける AoI の確率密度関数が満たす公式を導出し、それに基づいて、情報の取得（サンプリング）間隔が AoI に与える影響について考察する。特に、確率順序を用いた理論的な比較結果ならびに AoI の確率分布関数に対する陽表現公式をもとにした数値結果をともに示す。

キーワード：Age of Information, 無限サーバ待ち行列モデル, 確率順序

1. はじめに

情報通信技術の目覚ましい発展により、いまや情報通信は単なるデータ塊の交換手段にとどまらず、極めて多種多様な情報を共有する媒介者としての地位を確立しつつある。たとえば、遠隔会議・講義システムは言うまでもなくリアルタイムに動画や音声を共有するシステムであるが、さらに近い将来、仮想現実や複合現実技術との融合により、参加者間での高度で即応的なインタラクションが可能になると期待されている。ほかにも、高い安全性を有する自動運転車を実現するためには単一の車両が搭載するセンサ群（カメラ、3D-LiDAR、加速度・ジャイロセンサなど）から取得可能なセンシングデータを活用するだけでなく、周囲の車両や路側機と常に情報を共有することで広範囲にわたって「死角」を排除することが欠かせない。さらに、工場の自動化やスマート農業、小型レーダ群による高精度気象観測、カメラ群による人流・交通流の観測、河川・海洋モニタリングなど、高度なリアルタイム情報共有機構を主骨格とする情報システムは枚挙にいとまがない。

一般に、情報通信システムを合理的に設計し評価するには、その性能を定量的に表す適切な性能指標が不可欠である。従来、リアルタイム通信における代表的な性能指標としてシステム遅延が用いられてきた。システム遅延は送信元が情報の送出を開始してから受信

先への配信が完了するまでの総時間であり、確かに一見すると、これが小さいほど通信のリアルタイム性は高いといえるように思える。しかし実際には、リアルタイム情報共有という観点に立ったとき、システム遅延は本質的に不完全な性能指標である。なぜならば、システム遅延が小さいことは一回の通信時間が短いことを保証するが、それ単体では、共有されている情報の新しさ（鮮度）については何ら保証しないためである。

このような問題意識から近年導入されたのが、情報鮮度 Age of Information (AoI) [1–3] の概念である。AoI は直訳すると「情報の年齢」を意味しており、情報の受信先端末（モニタ）が現在表示している最新情報が、その生成時点を基点としてどれだけの時間を経過（加齢）したものであるかを表す量である。具体的には、時刻 t における AoI A_t は次式で定義される。

$$A_t = t - \eta_t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

ただし、 η_t は時刻 t においてモニタが表示している最新情報が生成された時刻を表す。上式は $\eta_t = t - A_t$ と書き直して解釈することもできる。すなわち、現在時刻 t においてモニタが表示している最新情報は、現在よりも時間 A_t だけさかのぼった時点で生成されたものであり、その分だけ加齢したものと捉えられる。

定義より、 η_t は時刻 t に関して区分的に一定値を取り、情報更新時点において増加（上向きにジャンプ）する。よって、式 (1) より、AoI A_t は時間経過に伴って直線的に増加してゆき、情報更新時点において下向きにジャンプするという、のこぎり刃状のグラフを描く（図 1）。特に、更新直後の情報は、情報伝送に要し

いのうえ よしあき

大阪大学大学院工学研究科

〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1

yoshiaki@comm.eng.osaka-u.ac.jp

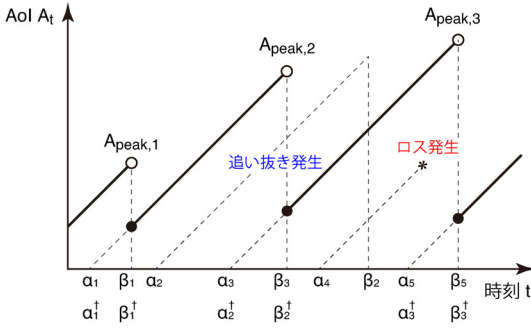


図1 AoI 過程 A_t の標本路の例
 α_n と β_n は情報パケットの生成時刻と受信時刻を表し、 α_n^\dagger と β_n^\dagger はそれらのうち、実際にモニタに表示された（有効な）パケットに関するものだけを抜き出した結果を表す。

たシステム遅延だけ既に古くなっているため、下向きジャンプ発生直後の AoI はシステム遅延に等しい。この事実から、前述した、システム遅延の不完全さをより深く理解することができる。すなわち、システム遅延は情報更新直後の情報鮮度を表しているが、それ以外の時刻における情報鮮度のダイナミクスについては何ら情報を与えないのである。

AoI は近年、情報通信システムにおける情報鮮度の評価指標として注目されており、過去数年のうちに AoI に関する研究が非常に活発化している。詳しくは、最近出版された包括的なサーベイ論文 [4] や日本語による拙著解説 [5] を参照されたい。

本稿では、初めに、AoI に対する基本的な定式化の方法を説明したのち、筆者が第 37 回待ち行列シンポジウムにおいて報告した、無限サーバ待ち行列モデルに対する AoI 解析の結果を紹介する。無限サーバ待ち行列モデルは各パケットの遅延時間がほかのパケットとは独立に定まるモデルであり、複数経路の存在する通信ネットワークや大規模な計算機クラスタのモデルとして用いられている [6, 7]。無限サーバ待ち行列モデルにおける AoI 解析の先行研究は、AoI の平均値を特徴づけることに注力している。文献 [6] では M/M/∞ 待ち行列モデルにおける平均 AoI が導出されている。文献 [7] では D/GI/∞ 待ち行列モデルと密接に関連した離散時間待ち行列モデルがクラウドゲーミングシステムのモデルとして考察されており、平均 AoI に対する近似解析法が提示されている。先行研究における最も一般的な結果は文献 [8] に示されており、ここでは GI/GI/∞ 待ち行列モデルにおいて平均 AoI が満たす公式が導出されている。これに対し、本稿では、一般の GI/GI/∞ 待ち行列モデルにおいて AoI の確

率分布が満たす公式を導出する。さらに、情報の取得（サンプリング）間隔が AoI に与える影響について確率順序を用いた理論的な比較結果を導出する。

以下の本稿は次のように構成される。2 節では一般的な状況下における AoI 過程の定式化方法ならびに AoI 研究における代表的な問題設定について説明する。次に、3 節では無限サーバ待ち行列モデルにおける AoI の解析結果を紹介する。最初に一般の GI/GI/∞ 待ち行列モデルにおいて成立する結果を導出し、続いてその結果を特別化することで、情報サンプリング間隔が AoI に与える影響を議論する。最後に、4 節において本稿を締めくくる。

2. AoI 過程の定式化

送信元端末、通信路、および受信先端末（モニタ）から構成される通信システムを考える。送信元端末は情報更新パケットを時間間隔 G_n ($n \in \mathbb{Z}$) で生成し、通信路に送出する。すなわち、 n 番目のパケットの生成時刻を α_n とすると、次式が成立する。

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + G_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

以降では、一般性を失わずに $\alpha_0 < 0 \leq \alpha_1$ を仮定する。

n 番目のパケットは通信路に送出されたのち、長さ D_n だけ遅延してモニタに受信される。 β_n を n 番目のパケットの受信時刻とする。

$$\beta_n = \alpha_n + D_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ただし、 D_n (ならびに β_n) は無限大を取りうるとし、これはパケットロスの発生に相当する。 n 番目のパケットは時刻 β_n ($\beta_n \geq \alpha_n$) にモニタで受信され、モニタがその直前に表示していた情報が n 番目よりも古い場合に限りモニタの表示が更新される。そこで、モニタの表示を実際に更新するパケットを「有効パケット」と呼ぶことにし、 $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}$ を有効パケットの集合と定義する。

$$\mathcal{I} = \{n \in \mathbb{Z}; \beta_n < \min\{\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots\}\}$$

次の規則で有効パケットに番号を振ることを考える。 l 番目 ($l = 1, 2, \dots$) の有効パケットは、時刻 0 より後に生成された有効パケットのうち l 番目のものを指し、一方で l 番目 ($l = 0, -1, -2, \dots$) の有効パケットは時刻 0 からさかのぼって $-l$ 番目に生成された有効パケットを指すとする。 α_l^\dagger ($l \in \mathbb{Z}$) を l 番目の有効パケットの生成時刻、 β_l^\dagger をモニタでのその受信時刻とする。このとき、次式を満たす全単射 $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{I}$ が存

在する.

$$\alpha_\ell^\dagger = \alpha_{\phi(\ell)}, \quad \beta_\ell^\dagger = \beta_{\phi(\ell)}, \quad \ell \in \mathbb{Z}$$

$\phi(\ell)$ は ℓ 番目の有効パケットの、元々のパケット系列におけるインデックスを表している. G_ℓ^\dagger ($\ell \in \mathbb{Z}$) を $\ell-1$ 番目と ℓ 番目の有効パケットの生成間隔とし, D_ℓ^\dagger ($\ell \in \mathbb{Z}$) を ℓ 番目の有効パケットの遅延時間とする.

$$G_\ell^\dagger = \alpha_\ell^\dagger - \alpha_{\ell-1}^\dagger, \quad D_\ell^\dagger = \beta_\ell^\dagger - \alpha_\ell^\dagger = D_{\phi(\ell)}$$

AoI の定義 (式 (1)) の右辺に現れている η_t は、時刻 t までにモニタが受信したパケットのうち、最も新しいものの生成時刻を表すため、次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \eta_t &= \sup\{\alpha_n; n \in \mathcal{I}, \beta_n \leq t\} \\ &= \sup\{\alpha_\ell^\dagger; \ell \in \mathbb{Z}, \beta_\ell^\dagger \leq t\} \end{aligned}$$

これを用いると、式 (1) は次のように書き換えられる.

$$A_t = t - \alpha_\ell^\dagger, \quad t \in [\beta_\ell^\dagger, \beta_{\ell+1}^\dagger), \ell \in \mathbb{Z}$$

以上の議論より、パケット生成間隔 $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ならびに遅延時間 $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ の系列に対し、AoI 過程 $(A_t)_{t \in \mathbb{R}}$ が定義されることがわかる (図 2). また、一般に、有効パケットの生成時刻系列 $(\alpha_\ell^\dagger)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ ならびに受信時刻系列 $(\beta_\ell^\dagger)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ によって定義される仮想的な待ち行列モデルを常に考えることができる. すなわち、生成済みかつ未受信の有効パケットが滞在する仮想的な空間を待ち行列システムと捉えたと、 α_ℓ^\dagger は ℓ 番目のパケットのシステムへの「到着時刻」を、 β_ℓ^\dagger はその「離脱時刻」をそれぞれ表している. この意味で、AoI $(A_t)_{t \in \mathbb{R}}$ は待ち行列モデルにおける性能指標ともみなせる.

AoI 研究における主要な問題設定の一つは、 $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ならびに $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が従う確率法則が与えられたときに、AoI 過程 $(A_t)_{t \in \mathbb{R}}$ の確率的性質を特徴づけることにある. パケット生成間隔 $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は通常、センサの情報サンプリング間隔に相当するため、これは独立かつ同一に分布する確率変数列であると仮定するのが自然である. 特に代表的なものとして、 G_n が一定値 τ に等しい場合 (等間隔サンプリング) や指数分布に従う場合 (ポワソンランダムサンプリング) が挙げられる.

一方、遅延時間系列 $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ のモデル化にはさまざまなアプローチが有り得る. たとえば、サービス時間が独立かつ同一に分布する単一サーバ待ち行列モデルを考え、そこへの到着間隔系列が $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ であるときに生み出される遅延時間系列によって $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を与えるという手法がよく用いられている. これは、情

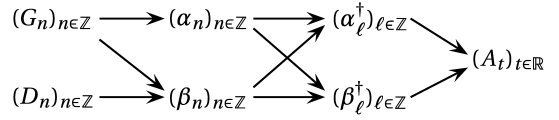


図 2 生成間隔系列 $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ならびに遅延時間系列 $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ と AoI 過程 $(A_t)_{t \in \mathbb{R}}$ の関係

報鮮度を高く保つことを目的にパケット生成頻度を高く (G_n を小さく) 設定した場合に、むしろ通信路に輻輳が生じてしまい、遅延時間 D_n が大きくなることで逆に情報鮮度が低くなりかねない状況をモデル化するのに適している. このアプローチは特に、輻輳が主要な問題となる状況下での最適なパケット生成頻度の決定に用いられる.

また一方で、遅延時間系列 $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を単に、独立かつ同一に分布する確率変数列 $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ に等しいものとしてモデル化するというアプローチも存在し、こちらが以下の本稿の主題である. これは、十分な帯域資源を有する通信システムや大規模な計算機クラスタを想定したモデルであり、この場合、システムは到着間隔系列 $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ならびにサービス時間系列 $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ により定められる無限サーバ待ち行列モデルに等しい. 以下では、無限サーバ待ち行列モデルにおける記法に合わせ、 $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ の代わりに $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を用いて遅延時間系列を表記する.

3. 無限サーバ待ち行列モデルにおける AoI

生成間隔系列 $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ならびに遅延時間系列 $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ はそれぞれ独立かつ同一に分布する確率変数列をなすと仮定し、前者の従う確率分布関数を $G(x)$ ($x \geq 0$), 後者の従う確率分布関数を $H(x)$ ($x \geq 0$) と表す. 加えて、 $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ならびに $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は独立であると仮定する. ケンドールの記法では、このモデルは GI/GI/ ∞ 待ち行列モデルに相当する.

各パケットはモニタに届かずロスすることがあるものとする. これは、非零の確率で遅延時間が無限大となり得る、つまり、パケット遅延の確率分布関数 $H(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) が一般に劣確率的であると仮定することで表現できる. すなわち、 $p_{\text{loss}} \in [0, 1)$ をパケットロス確率とし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{H}(x) = 1$ を満たす非負確率分布関数 $\hat{H}(x)$ ($x \geq 0$) を用いて $H(x)$ を次式で与える.

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ (1 - p_{\text{loss}})\hat{H}(x), & x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

ここで、定義より $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 1 - p_{\text{loss}}$ が成り立つ. $\bar{H}(x) := 1 - H(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) をパケット遅延の

補分布関数と定義する. $A_{\text{peak},\ell}$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) を ℓ 番目のピーク AoI [9], すなわち ℓ 番目の有効パケットをモニタが受信する直前における AoI とする (図 1).

$$\begin{aligned} A_{\text{peak},\ell} &= \beta_\ell^\dagger - \alpha_{\ell-1}^\dagger = \beta_\ell^\dagger - \beta_{\ell-1}^\dagger + \beta_{\ell-1}^\dagger - \alpha_{\ell-1}^\dagger \\ &= H_{\ell-1}^\dagger + B_\ell^\dagger \end{aligned} \quad (3)$$

ただし, $B_\ell^\dagger := \beta_\ell^\dagger - \beta_{\ell-1}^\dagger$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) はモニタにおける ℓ 番目と $\ell-1$ 番目の情報更新間隔を表す.

以下では, システムは定常かつエルゴード的であると仮定する. $G, G^\dagger, H, H^\dagger, A$, ならびに A_{peak} をそれぞれ, $G_n, G_n^\dagger, H_n, H_n^\dagger, A_n$, ならびに $A_{\text{peak},\ell}$ を表す一般の確率変数とする. また, λ ならびに λ^\dagger を全パケットならびに有効パケットの平均生成頻度と定義する.

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}[G]}, \quad \lambda^\dagger = \frac{1}{\mathbb{E}[G^\dagger]}$$

また, $\lambda \in (0, \infty)$ を仮定する. 以降では, 空和は 0, 空積は 1 にそれぞれ等しいという慣用に従う.

以下の解析では, 次の関係式を出発点として用いる.

補題 1 (文献 [10] (定理 10)). 定常 AoI A は連続な確率分布をもち, その確率密度関数は次式で与えられる.

$$a(x) = \lambda^\dagger \{\Pr(A_{\text{peak}} > x) - \Pr(H^\dagger > x)\}, \quad x \geq 0 \quad (4)$$

直観的には, 式 (4) の左辺ならびに右辺は単位時間あたりに AoI 過程がレベル x を上向きならびに下向きに通過する平均回数を表しており, システムの安定性から, これらは等しい値となる.

以下では式 (4) の右辺に現れている各項を考察する. まず, 式 (3) より次式を得る.

$$\begin{aligned} \Pr(A_{\text{peak},\ell+1} > x) \\ &= \Pr(H_\ell^\dagger > x) + \Pr(H_\ell^\dagger \leq x, H_\ell^\dagger + B_{\ell+1}^\dagger > x) \end{aligned}$$

また, $P_{\mathcal{I}} := \Pr(0 \in \mathcal{I})$ を, ランダムに選ばれたパケットが有効となる確率と定義すると

$$P_{\mathcal{I}} = \Pr\left(H_0 < \min_{n \in \{1, 2, \dots\}} \left\{ \sum_{i=1}^n G_i + H_n \right\}\right)$$

が得られる. したがって, $\lambda^\dagger = \lambda P_{\mathcal{I}}$ に注意すると, 式 (4) は次のように書き換えられる.

$$a(x) = \lambda P_{\mathcal{I}} \cdot \Pr(H_\ell^\dagger \leq x, H_\ell^\dagger + B_{\ell+1}^\dagger > x) \quad (5)$$

さらに, 次式が成り立つことがわかる.

$$\begin{aligned} \Pr(H_\ell^\dagger \leq x, H_\ell^\dagger + B_{\ell+1}^\dagger > x) \\ &= \Pr(H_0 \leq x, \text{パケット } 1, 2, \dots \text{ のうちいずれも} \\ &\quad \text{時刻 } \alpha_0 + x \text{ までにモニタへ到達しない} \mid 0 \in \mathcal{I}) \\ &= \frac{1}{P_{\mathcal{I}}} \cdot \Pr\left(H_0 \leq x, \min_{n \in \{1, 2, \dots\}} \left\{ \sum_{i=1}^n G_i + H_n \right\} > x\right) \\ &= \frac{1}{P_{\mathcal{I}}} \cdot H(x) \mathbb{E}\left[\prod_{n=1}^{\infty} \bar{H}\left(x - \sum_{i=1}^n G_i\right)\right] \end{aligned} \quad (6)$$

したがって, 式 (5) と (7) を組み合わせることにより次の結果を得る.

定理 1. ロスのある定常な GI/GI/ ∞ 待ち行列モデルにおいて, AoI の確率密度関数は次式で与えられる.

$$a(x) = \lambda H(x) \mathbb{E}\left[\prod_{n=1}^{\infty} \bar{H}\left(x - \sum_{i=1}^n G_i\right)\right], \quad x \geq 0 \quad (8)$$

次に, 上記の結果をパケット生成間隔が一定間隔に等しい場合 (D/GI/ ∞ 待ち行列モデル) ならびに指数分布に従う場合 (M/GI/ ∞ 待ち行列モデル) に特別化する. D/GI/ ∞ 待ち行列モデルではパケットの生成間隔は一定値 τ ($\tau > 0$) を取り, 次式が成り立つ.

$$\lambda = 1/\tau \quad (9)$$

定理 2. ロスのある定常な D/GI/ ∞ 待ち行列モデルにおいて次のことが成り立つ.

(i) AoI の確率密度関数は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{H(x)}{\tau} \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau), \\ x &\in [K\tau, (K+1)\tau), \quad K = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

(ii) AoI の補分布関数は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \Pr(A > x) \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{x-K\tau}^{\tau} \left(\prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + u) \right) du \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \int_0^{x-K\tau} \left(\prod_{n=0}^K \bar{H}(n\tau + u) \right) du, \\ x &\in [K\tau, (K+1)\tau), \quad K = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

定理 2 の証明は付録 A において与える.

一方, M/GI/ ∞ 待ち行列モデルでは, パケット生成間隔はパラメタ λ の指数分布に従う.

定理 3. ロスのある定常な M/GI/∞ 待ち行列モデルにおいて、次のことが成り立つ。

(i) AoI の確率密度関数は次式で与えられる。

$$a(x) = \lambda H(x) \exp\left(-\lambda \int_0^x H(y) dy\right), \quad x \geq 0 \quad (12)$$

(ii) AoI の補分布関数は次式で与えられる。

$$\Pr(A > x) = \exp\left(-\lambda \int_0^x H(y) dy\right), \quad x \geq 0 \quad (13)$$

注意 1. 式 (2) より、式 (13) は次式で書き換えられる。

$$\Pr(A > x) = \exp\left(-\lambda(1 - p_{\text{loss}}) \int_0^x \hat{H}(y) dy\right) \quad (14)$$

定理 3 の証明は付録 B において与える。

単純な陽形式解 (13) が得られたことにより、パケット遅延時間のばらつきが AoI に与える影響に関する理論的な結果を導くことができる。その準備として、二種類の確率順序を導入する。

定義 1 (文献 [11] (p. 3)). X と Y を非負確率変数とする。次式が成り立つとき、 X は Y よりも通常の意味での確率順序の意味で小さいといい、 $X \leq_{\text{st}} Y$ と表記される。

$$\Pr(X > x) \leq \Pr(Y > x), \quad x \geq 0$$

定義 2 (文献 [11] (p. 110)). X と Y を、等しい平均 $E[X] = E[Y] < \infty$ を有する非負確率変数とする。次式が成り立つとき、 X は Y よりも凸順序の意味で (ばらつきが) 小さいといい、 $X \leq_{\text{cx}} Y$ と表記される。

$$\int_x^\infty \Pr(X > t) dt \leq \int_x^\infty \Pr(Y > t) dt, \quad x \geq 0$$

注意 2. $X \leq_{\text{st}} Y$ が成り立つことは

$$E[\psi(X)] \leq E[\psi(Y)]$$

がすべての (上式の期待値が存在する) 単調非減少関数 $\psi(x)$ について成り立つことと等価である [11] (p. 4).

特に、 $X \leq_{\text{st}} Y \Rightarrow E[X^n] \leq E[Y^n]$ ($n = 1, 2, \dots$) が成立する。

注意 3. $X \leq_{\text{cx}} Y$ が成り立つことは

$$E[\hat{\psi}(X)] \leq E[\hat{\psi}(Y)]$$

がすべての (上式の期待値が存在する) 凸関数 $\hat{\psi}(x)$ について成り立つことと等価である [11] (式 (3.A.1)). 特に、 $\text{Cv}[\cdot]$ を変動係数 (標準偏差と期待値の比) とすると、 $X \leq_{\text{cx}} Y \Rightarrow \text{Cv}[X] \leq \text{Cv}[Y]$ が成立する。

系 1. パケット生成頻度 λ 、ロスしないパケットの平均遅延 $E[\hat{H}] < \infty$ 、ならびにロス確率 p_{loss} がそれぞれ同一である二つの定常な M/G/∞ 待ち行列モデルを考える。 k 番目 ($k = 1, 2$) の待ち行列モデルに対し、 $A^{(k)}$ ならびに $\hat{H}^{(k)}$ を AoI ならびにロスしないパケットの遅延時間を表す一般の確率変数とすると、次の関係が成り立つ。

$$\hat{H}^{(1)} \leq_{\text{cx}} \hat{H}^{(2)} \Rightarrow A^{(1)} \geq_{\text{st}} A^{(2)}$$

証明. 式 (14) は次式で書き換えられる。

$$\Pr(A > x) = \exp\left[-\lambda(1 - p_{\text{loss}}) \cdot \left(x - E[\hat{H}] + \int_x^\infty (1 - \hat{H}(y)) dy\right)\right]$$

よって、定義 1 と定義 2 から系 1 を得る。 \square

系 1 はパケット遅延のばらつきの増加は AoI の減少につながることを示している。これは直観的には、ばらつきの大きな確率変数は稀に極端に大きな値を取る一方で、平均よりも小さな値を取る頻度が高いことによる。無限サーバ待ち行列モデルではパケットの追い抜きが発生することから、稀に現れる大きな遅延時間が AoI に与える影響が限定的であるため、むしろ小さな遅延時間が頻繁に現れることにより AoI が小さくなるのである。図 3 に数値例を示す。この図では、ロスのない M/Gamma/∞ 待ち行列モデルにおいて、サンプリング頻度 $\lambda = 2$ および平均パケット遅延 $E[H] = 1$ を固定し、遅延時間の変動係数 $\text{Cv}[H]$ の複数の値に対して AoI の補分布関数をプロットしている。図より、パケット遅延の変動は、AoI が小さな値を取る確率に対して比較的大きな影響を与えることが読み取れる。

また、Jensen の不等式より、平均の等しいあらゆる非負確率変数の中で、一定分布が凸順序に関して最小

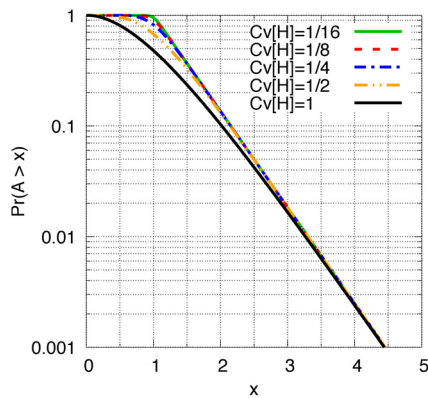


図3 M/Gamma/∞ 待ち行列モデルにおける AoI の補分布関数 ($\lambda = 2, E[H] = 1$)

となる [11] (式 (3.A.48)). したがって、系 1 より、あらゆる M/GI/∞ 待ち行列モデルの中で M/D/∞ 待ち行列モデルが通常の意味で最大の、すなわち最悪の AoI 性能を有することがわかる。

一方で、以下に示すように、D/GI/∞ 待ち行列モデルは確率順序の意味で M/GI/∞ 待ち行列モデルよりも小さな AoI を達成する。

定義 3. X ならびに Y を連続な非負確率分布に従う確率変数とし、その確率密度関数をそれぞれ $f_X(x)$ ならびに $f_Y(x)$ ($x \geq 0$) と表す。次式が成り立つとき、 X は Y よりもハザード率順序の意味で小さいといい、 $X \leq_{hr} Y$ と表記する。

$$\frac{f_X(x)}{\Pr(X > x)} \geq \frac{f_Y(x)}{\Pr(Y > x)}, \quad x \geq 0$$

注意 4. 次式を用いると、 $X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y$ が成り立つことが容易に確認できる。

$$\Pr(X > x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{f_X(t)}{\Pr(X > t)} dt\right), \quad x \geq 0$$

定理 4. パケット生成頻度 λ 、ロス確率 p_{loss} 、ならびにロスしないパケットの遅延時間分布 $\hat{H}(x)$ ($x \geq 0$) がそれぞれ同一の定常な D/GI/∞ ならびに M/GI/∞ 待ち行列モデルを考える。 $A^{D/GI/\infty}$ と $A^{M/GI/\infty}$ をこの D/GI/∞ と M/GI/∞ 待ち行列モデルにおける AoI を表す一般の確率変数とすると、次式が成立する。

$$A^{D/GI/\infty} \leq_{hr} A^{M/GI/\infty}$$

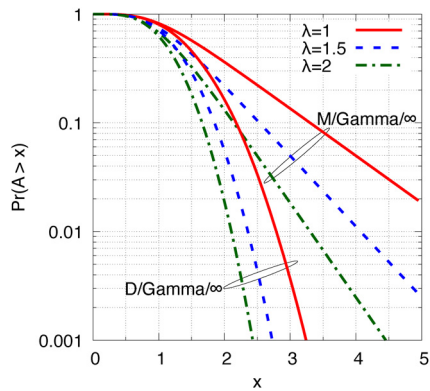


図4 D/Gamma/∞ ならびに M/Gamma/∞ 待ち行列モデルにおける AoI の補分布関数 ($E[H] = 1, Cv[H] = 0.5$)

証明. $a^{D/GI/\infty}(x)$ ならびに $a^{M/GI/\infty}(x)$ ($x \geq 0$) を $A^{D/GI/\infty}$ ならびに $A^{M/GI/\infty}$ の確率密度関数とする。式 (12) および (13) より、次式が得られる。

$$\frac{a^{M/GI/\infty}(x)}{\Pr(A^{M/GI/\infty} > x)} = \lambda H(x) \quad (15)$$

一方で、式 (11) より、 $x \in [K\tau, (K+1)\tau)$ ($K = 0, 1, \dots$) に対し次式が成立する。

$$\begin{aligned} \Pr(A^{D/GI/\infty} > x) &\leq \frac{\tau - (x - K\tau)}{\tau} \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau) \\ &\quad + \frac{x - K\tau}{\tau} \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau) \\ &= \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau) \end{aligned}$$

よって、式 (9) ならびに (10) より

$$\frac{a^{D/GI/\infty}(x)}{\Pr(A^{D/GI/\infty} > x)} \geq \lambda H(x), \quad x \geq 0$$

が得られ、これと式 (15) より定理 4 が導かれる。□

$E[H] = 1$ かつ $Cv[H] = 0.5$ の D/Gamma/∞ ならびに M/Gamma/∞ 待ち行列モデルにおける AoI の補分布関数を図 4 に示す。図より、D/Gamma/∞ 待ち行列モデルでは AoI が大きな値を取る確率が M/Gamma/∞ 待ち行列モデルと比べて非常に小さくなり、したがって、一定間隔で情報更新パケットを生成することはランダムな間隔を用いるよりも AoI 性能の観点で大幅に優れていることがわかる。

4. まとめ

本稿では無限サーバ待ち行列モデルにおける AoI の確率分布を考察した. 初めに一般の定常 GI/GI/∞ 待ち行列モデルを解析し, AoI の確率密度関数が満たす公式 (8) を導出した. 次にその結果を特別化することで, D/GI/∞ ならびに M/GI/∞ 待ち行列モデルにおける AoI の確率分布関数を与える単純な陽表現公式 (11) ならびに (13) を導出した. 最後に, この陽表現公式を利用して AoI 分布に関する理論的な比較結果を導出した. 特に, D/GI/∞ 待ち行列モデルは M/GI/∞ よりもハザード率順序の意味で小さな AoI を有することを証明した. この理論的結果は一定のサンプリング間隔を用いることはランダムな間隔を用いるよりも AoI の観点で効果的であることを示唆している.

本稿で紹介した結果の応用として, 遅延耐性ネットワークにおける AoI を, 無限サーバ待ち行列モデルを用いて解析した論文を筆者らは最近発表した [12]. 本稿の内容に興味をもたれた方はこちらも一読いただくと幸いである.

参考文献

- [1] S. Kaul, M. Gruteser, V. Rai and J. Kenney, “Minimizing age of information in vehicular networks,” In *Proceedings of IEEE SECON 2011*, pp. 350–358, 2011.
- [2] S. Kaul, R. Yates and M. Gruteser, “Real-time status: How often should one update?” In *Proceedings of IEEE INFOCOM 2012*, pp. 2731–2735, 2012.
- [3] A. Kosta, N. Pappas and V. Angelakis, “Age of information: A new concept, metric, and tool,” *Foundations and Trends® in Networking*, **12**, pp. 162–259, 2017.
- [4] R. Yates, Y. Sun, D. R. Brown III, S. Kaul, E. Modiano and S. Ulukus, “Age of information: An introduction and survey,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **39**, pp. 1183–1209, 2021.
- [5] 井上文彰, 滝根哲哉, “Age of Information — 基本概念とその理論的解析—,” *IEICE Fundamentals Review*, **13**, pp. 197–208, 2020.
- [6] C. Kam, S. Kompella, G. D. Nguyen and A. Ephremides, “Effect of message transmission path diversity on status age,” *IEEE Transactions on Information Theory*, **62**, pp. 1360–1374, 2016.
- [7] R. Yates, M. Tavan, Y. Hu and D. Raychaudhuri, “Timely cloud gaming,” In *Proceedings of IEEE INFOCOM 2017*, 2017.
- [8] R. Talak, S. Karaman and E. Modiano, “Can determinacy minimize age of information?” arXiv: 1810.04371v2, 2018.
- [9] M. Costa, M. Codreanu and A. Ephremides, “On the age of information in status update systems with packet management,” *IEEE Transactions on Information Theory*, **62**, pp. 1897–1910, 2016.
- [10] Y. Inoue, H. Masuyama, T. Takine and T. Tanaka,

“A general formula for the stationary distribution of the age of information and its application to single-server queues,” *IEEE Transactions on Information Theory*, **65**, pp. 8305–8324, 2019.

- [11] M. Shaked and J. G. Shanthikumar, *Stochastic Orders*, Springer, 2006.
- [12] Y. Inoue and T. Kimura, “Age-effective information updating over intermittently connected MANETs,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **39**, pp. 1293–1308, 2021.
- [13] H. C. Tijms, *Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, John Wiley & Sons, 1994.

付録

A. 定理 2 の証明

$G_n = \tau$ より, 式 (8) は次のように単純化される.

$$a(x) = \frac{H(x)}{\tau} \prod_{n=1}^{\infty} \bar{H}(x - n\tau)$$

よって, $x \in [K\tau, (K+1)\tau)$ ($K = 0, 1, \dots$) に対し,

$$a(x) = \frac{H(x)}{\tau} \prod_{n=1}^K \bar{H}((K-n)\tau + x - K\tau)$$

が得られ, 式 (10) が導かれる. さらに, 式 (10) より

$$\begin{aligned} \Pr(A \leq x) &= \sum_{k=0}^{K-1} \int_0^{\tau} \frac{H(k\tau + u)}{\tau} \prod_{n=0}^{k-1} \bar{H}(n\tau + u) du \\ &+ \int_0^{x-K\tau} \frac{H(K\tau + u)}{\tau} \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + u) du \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left(1 - \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + u) \right) du \\ &+ \frac{1}{\tau} \int_0^{x-K\tau} \left(\prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + u) \right. \\ &\quad \left. - \prod_{n=0}^K \bar{H}(n\tau + u) \right) du \end{aligned}$$

が成り立つため, $\Pr(A > x) = 1 - \Pr(A \leq x)$ より式 (11) を得る.

B. 定理 3 の証明

式 (13) は式 (12) から容易に導かれるため, 以下では式 (12) を証明する. 各 $x \geq 0$ に対し, 確率変数 $N_\lambda(x)$ を次式で定義する.

$$N_\lambda(x) = \max \left\{ n; \sum_{i=1}^n G_i \leq x \right\}$$

M/GI/∞ 待ち行列モデルではサンプリング間隔

G_1, G_2, \dots はパラメタ λ の指数分布に従って独立かつ同一に分布するため, $N_\lambda(x)$ は平均 λx のポワソン分布に従う. さらに, ポワソン過程の基本的な性質 [13] (定理 1.2.5) より, $N_\lambda(x) = k$ ($k = 1, 2, \dots$) が与えられた条件下における $(\sum_{i=1}^n G_i)_{n=1,2,\dots,k}$ は, $[0, x]$ 上の一様分布に従う k 個の独立な確率変数の順序統計量と同一の結合確率分布を有する.

$$\frac{d^k \Pr \left(\sum_{i=1}^n G_i \leq x_n \ (n = 1, 2, \dots, k) \mid N_\lambda(x) = k \right)}{dx_1 dx_2 \cdots dx_k} = \begin{cases} \frac{k!}{x^k}, & 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq x \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

よって, 式 (8) は次式で書き換えられる.

$$\begin{aligned} a(x) &= \lambda H(x) \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N_\lambda(x) = k) \\ &\quad \cdot \mathbb{E} \left[\prod_{n=1}^k \bar{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) \mid N_\lambda(x) = k \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda H(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!} \int_{x_1=0}^x \int_{x_2=x_1}^x \cdots \int_{x_k=x_{k-1}}^x \\ &\quad \cdot \bar{H}(x-x_1) \bar{H}(x-x_2) \cdots \bar{H}(x-x_k) \frac{k!}{x^k} \\ &\quad \cdot dx_k dx_{k-1} \cdots dx_1 \\ &= \lambda H(x) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda x} \lambda^k \int_{y_1=0}^x \int_{y_2=0}^{y_1} \cdots \int_{y_k=0}^{y_{k-1}} \\ &\quad \cdot \bar{H}(y_1) \bar{H}(y_2) \cdots \bar{H}(y_k) dy_k dy_{k-1} \cdots dy_1 \quad (16) \end{aligned}$$

ここで, 部分積分により得られる次の恒等式を利用する.

$$\begin{aligned} &\int_{y_n=0}^t \bar{H}(y_n) \left(\int_{u=0}^{y_n} \bar{H}(u) du \right)^{k-n} dy_n \\ &= \frac{\left(\int_{u=0}^t \bar{H}(u) du \right)^{k-n+1}}{k-n+1}, \quad t \geq 0, n = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

これを式 (16) に対して繰り返し適用することで

$$a(x) = \lambda H(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x} \lambda^k}{k!} \left(\int_0^x \bar{H}(u) du \right)^k$$

が得られ, したがって式 (12) が導かれる.