非線形半正定値計画問題に対する主双対内点法

矢部　博，山下　浩，原田　耕平

半正定値計画問題は線形計画問題，凸 2 次計画問題，2 次錐計画問題などを含む応用範囲の広い凸計画問題のクラスであり，多項式時間アルゴリズムに関連して内点法に基づいた数値解法がいろいろと研究されてきた．近年では，さらに応用範囲の広い非線形半正定値計画問題も扱われるようになってきたこともあり，その数値解法の開発が望まれている．本稿では主双対内点法に関連した山下・矢部・原田による一連の研究を紹介する．大域的収束性を実現するための手法として直線探索法と信頼領域法を用いた主双対内点法について解説するとともに，局所的に超 1 次収束する主双対内点法についても触れる．

キーワード：非線形半正定値計画，主双対内点法，直線探索法，信頼領域法，大域的収束性，超 1 次収束性

1. はじめに

本稿では次の非線形の半正定値計画 (SDP) 問題を扱う．

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & f(x), & x \in \mathbf{R}^n, \\
\text{subject to} & g(x) = 0, & X(x) \succeq O
\end{array}
\qquad (1)
$$

ただし，$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $X : \mathbf{R}^n \to \mathbf{S}^p$ は十分滑らかであるとし，$\mathbf{R}^n$ は n 次の実ベクトルの集合，$\mathbf{S}^p$ は p 次の実対称行列の集合とする．ここで，$X(x) \succeq O$, $X(x) \succ O$ はそれぞれ行列 $X(x)$ が半正定値，正定値であることを意味する．

関数 f が凸関数，X が凹関数，g がアフィン関数の場合には，この問題は凸計画問題になる．また，f が線形関数，g がアフィン関数であり，行列関数 $X(x)$ が $X(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i - B$ ($A_i \in \mathbf{S}^p, i = 1, \ldots, n,\ B \in \mathbf{S}^p$) で定義されているとき，問題 (1) は線形 SDP 問題になる．線形 SDP 問題は線形計画問題，凸 2 次計画問題，2 次錐計画問題などを特別な場合として含む応用範囲の広い問題のクラスであり，内点法に基づいた多項式時間アルゴリズムが多数提案されている [1–3]．

一方，非線形 SDP 問題 (1) はより広範囲な応用問題を扱うことができるという意味で重要な最適化問題である．制御問題（LMI 制約付き問題や BMI 制約付き問題など），構造最適化問題，金融関係などいろいろな応用分野がある．線形 SDP 問題の数値解法は多項式時間アルゴリズムを実現する観点から内点法が主流であるが，非線形 SDP 問題ではいくつかの種類の解法が研究されている．典型的なカテゴリーとして以下の三つがあげられる．

(i) 拡張ラグランジュ法に基づいた解法

通常の非線形計画問題を解くための拡張ラグランジュ法の考え方が非線形 SDP 問題に適用されており，2 次ペナルティを用いた解法や修正バリア関数を利用した解法などいろいろと考案されている．たとえば，Kočvara and Stingl [4, 5] は各種のペナルティ関数・バリア関数に基づいた拡張ラグランジュ法について研究しており，ソフトウェアパッケージ PENNON を開発した．

(ii) 逐次 2 次計画法に基づいた解法

通常の非線形計画問題に対する逐次 2 次計画法の考え方と同様に，非線形 SDP 問題 (1) の目的関数を 2 次近似し半正定値制約条件を含めた制約条件を 1 次近似した問題を逐次解いていくものである．これらの部分問題の解法には内点法を利用するのが通例である．大域的収束性については，直線探索法を利用した解法 [6] やフィルター法を利用した解法 [7] などが提案されている．

(iii) 内点法に基づいた解法

主内点法を非線形 SDP 問題に適用することは 2000 年頃からいくつか試みられているが，主双対内点法については，山下らによる一連の研究が存在する．Yamashita, Yabe and Harada [8] は直線探索法を用いた主双対内点法を提案しその大域的収束性を証明するとともに数値実験を通じて主双対内点法の有効性を検証した．それに加えて Yamashita and Yabe [9] は主双対内点法の局所的解析を行い超 1 次収束性を示した．さらに微分可能なメリット関数を活用した主双対内点法が Kato, Yabe and Yamashita [10] によって提

やべ　ひろし
東京理科大学データサイエンスセンター
〒 162–8601 東京都新宿区神楽坂 1-3
yabe@rs.tus.ac.jp
やました　ひろし，はらだ　こうへい
株式会社 NTT データ数理システム
〒 160–0016 東京都新宿区信濃町 35
hy@msi.co.jp
harada@msi.co.jp

案されている．最近では，信頼領域法を用いた主双対内点法が Yamashita, Yabe and Harada [11] によって提案され，その大域的収束性が示されている．

以上，おおまかに非線形 SDP 問題 (1) を解くための数値解法を分類してきた．非線形 SDP 問題を解くための数値解法全般については，Yamashita and Yabe [12] のサーベイ論文を参照されたい．以下では，山下・矢部・原田による主双対内点法に焦点をあてて紹介する [8, 9, 11]．

2. 非線形半正定値計画問題の最適性条件

本節では，最適性の条件を述べるとともに記号の説明をする．$\mathbf{S}^p$ の行列 X と Z の内積 $\langle X, Z\rangle$ を $\langle X, Z\rangle = \mathrm{tr}(XZ)$ で定義する．ただし，$\mathrm{tr}(M)$ は行列 M のトレースである．問題 (1) のラグランジュ関数を

$$L(w) = f(x) - y^\top g(x) - \langle X(x), Z\rangle$$

で定義する．ただし，$w = (x, y, Z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{S}^p$ であり，$y \in \mathbf{R}^m$ と $Z \in \mathbf{S}^p$ はそれぞれ等式制約，半正定値制約に対するラグランジュ乗数，$\top$ は転置を表す．このとき，ラグランジュ関数の勾配ベクトルは

$$\nabla_x L(w) = \nabla f(x) - \nabla g(x) y - \mathcal{A}^*(x) Z$$

で与えられる．ただし，$\nabla g(x) = (\nabla g_1(x), \ldots, \nabla g_m(x)) \in \mathbf{R}^{n\times m}$ であり，$\mathcal{A}^*(x)$ は $\mathcal{A}(x) : \mathcal{A}(x)v = \sum_{i=1}^n v_i A_i(x)$ $(v \in \mathbf{R}^n)$ の随伴作用素で $\mathcal{A}^*(x)Z = (\langle A_1(x), Z\rangle, \ldots, \langle A_n(x), Z\rangle)^\top$ で定義される．また，$A_i(x) = \frac{\partial X(x)}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ である．このとき，問題 (1) の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件は

$$r_0(w) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ X(x)Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ O \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$X(x) \succeq O, \qquad Z \succeq O \tag{3}$$

で与えられ，この条件を満たす点 w^* を KKT 点とよぶ．

行列の積 $X(x)Z$ に対応して，以下の数値解法の便宜のために次の対称化された積を定義する．

$$X(x) \circ Z = \frac{X(x)Z + ZX(x)}{2}.$$

$X(x) \succeq O, Z \succeq O$ に対して，$X(x) \circ Z = O$, $X(x)Z = O$, $\langle X(x), Z\rangle = 0$ がすべて同値であることが知られている．以下では，$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ はそれぞれベクトルの l_1 ノルム，l_2 ノルム，l_∞ ノルムを表す．また，$\|\cdot\|_F$ は行列のフロベニウスノルムを表す．

3. 主双対内点法の外部反復

$X(x) \succ O$, $Z \succ O$ を満たす点 $w = (x, y, Z)$ を内点とよぶ．主双対内点法では，バリアパラメータ $\mu > 0$ を導入して，相補性条件 $X(x)Z = O$ を $X(x)Z = \mu I$ で置き換えて，次のバリア KKT (BKKT) 条件

$$r(w, \mu) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ X(x)Z - \mu I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ O \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$X(x) \succ O, \qquad Z \succ O$$

を扱う．以下ではノルム $\|r(w, \mu)\|$ を

$$\sqrt{\left\| \begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \end{pmatrix} \right\|_2^2 + \|X(x)Z - \mu I\|_F^2}$$

で定義する．$\|r_0(w)\|$ についても同様である．

与えられたバリアパラメータ $\mu > 0$ に対して近似的にバリア KKT 条件を満たす点を求めるという手続きを $\mu > 0$ を減少させつつ繰り返すのが主双対内点法の外部反復となる．

<u>**Algorithm SDPIP**</u>

Step 0. $\varepsilon > 0$, $M_c > 0$ を設定し，$k = 0$ とおく．$\mu_k \downarrow 0$ を満たす正の数列 $\{\mu_k\}$ を設定する（μ_k は反復の進行にともなって逐次決めてもよい）．

Step 1. 近似 BKKT 条件 $\|r(w_{k+1}, \mu_k)\| \leq M_c \mu_k$ を満たす内点 w_{k+1} を求める（これを近似 BKKT 点とよぶ）．

Step 2. $\|r_0(w_{k+1})\| \leq \varepsilon$ ならば反復を終了する．

Step 3. $k := k + 1$ と更新して，Step 1 へ戻る．

関数 f, g, X は連続微分可能とし，$\{w_k\}$ は Algorithm SDPIP によって生成される無限点列とする．このとき，もし点列 $\{x_k\}$ が有界で，任意の集積点で Mangasarian-Fromovitz 制約想定条件が成り立つ（すなわち，行列 $\nabla g(x)$ がフルランクで $\nabla g(x)^\top v = 0, X(x) + \sum_{i=1}^n v_i A_i(x) \succ O$ を満たすベクトル $v \in \mathbf{R}^n$ が存在する）ならば，ラグランジュ乗数の点列 $\{y_k\}$, $\{Z_k\}$ は有界となり，点列 $\{w_k\}$ の任意の集積点は問題 (1) の KKT 条件 (2), (3) を満たす．

アルゴリズムの要となるのは，Algorithm SDPIP の Step 1 で近似 BKKT 点 w_{k+1} をいかにして求めるかという部分である．以下では，近似 BKKT 点 w_{k+1} を求めるための方法として，直線探索法を用いる主双対

内点法 [8] と信頼領域法を用いる主双対内点法 [11] のそれぞれを紹介する．

4. 探索方向とメリット関数

本節では，与えられたバリアパラメータ $\mu > 0$ に対して近似 BKKT 点を求めることを考える．以下では混乱が生じない場合には $X(x)$ を単に X と書くことにする．また，常に $X \succ O$, $Z \succ O$ が成り立っているものと仮定する．

主双対内点法では, 速い収束を実現するために BKKT 条件の方程式 (4) にニュートン法が適用される．しかしながら，一般にはニュートン法の探索方向を陽に求めることは難しい．ニュートン法の探索方向 Δx から $\Delta X = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x)_i A_i(x) \in \mathbf{S}^p$ となり ΔX は自動的に対称行列となる．しかし，Z に関する方向 ΔZ を対称にするために，相補性条件の式を対称化すると，相補性条件から陽に ΔZ を求めることは難しい．そこで，線形 SDP 問題の場合と同様に行列 X, Z に対する以下のようなスケーリングを導入する．

$$\widetilde{X} = TXT^\top, \quad \widetilde{Z} = T^{-\top} Z T^{-1}.$$

ただし，$T \in \mathbf{R}^{p \times p}$ は正則なスケーリング行列である．ここで，$XZ = \mu I$ を対称化した式 $\widetilde{X} \circ \widetilde{Z} = \mu I$ で置き換えれば，式 (4) の代わりに

$$\tilde{r}_S(w, \mu) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ \widetilde{X} \circ \widetilde{Z} - \mu I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ O \end{pmatrix} \tag{5}$$

を得る．また，$\widetilde{X}$ と $\widetilde{Z}$ が可換 ($\widetilde{X}\widetilde{Z} = \widetilde{Z}\widetilde{X}$) となるようにするのもスケーリング行列の大事な役割である．これは，非線形 SDP 問題のアルゴリズムにおいては，大域的収束を保証するための重要な要素となる．

4.1 ニュートン方向と最急降下方向

方程式 (5) にニュートン法を適用することを考える．ニュートン法は方程式を 1 次近似して，線形方程式を解くことによって探索方向（ニュートン方向という）$\Delta w_N = (\Delta x_N, \Delta y_N, \Delta Z_N) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{S}^p$ を求める方法である．具体的には，$\nabla_x L(w + \Delta w_N)$ と $g(x + \Delta x_N)$ の 1 次近似から

$$G\Delta x_N - \nabla g(x) \Delta y_N - \mathcal{A}^*(x) \Delta Z_N = -\nabla_x L(w), \tag{6}$$

$$\nabla g(x)^\top \Delta x_N = -g(x) \tag{7}$$

を得る．ただし，G はラグランジュ関数 $L(w)$ のヘッセ行列 $\nabla_x^2 L(w)$ もしくはその近似行列である．一方，相補性条件については対応する式

$$(\widetilde{X} + \Delta\widetilde{X}_N) \circ (\widetilde{Z} + \Delta\widetilde{Z}_N) = \mu I$$

の 1 次近似から

$$\begin{aligned} &\Delta\widetilde{X}_N \widetilde{Z} + \widetilde{Z} \Delta\widetilde{X}_N + \widetilde{X} \Delta\widetilde{Z}_N + \Delta\widetilde{Z}_N \widetilde{X} \\ &\quad = 2\mu I - \widetilde{X}\widetilde{Z} - \widetilde{Z}\widetilde{X} \end{aligned} \tag{8}$$

が導かれる．ここで，$\Delta X_N = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_N)_i A_i(x) \in \mathbf{S}^p$, $\Delta\widetilde{X} = T \Delta X T^\top$ である．このときスケーリング行列 T を適切に選んでニュートン方向を求めるわけである．

たとえば，$T = X^{-1/2}$ をスケーリング行列に選んだ場合 $\widetilde{X} = I$, $\widetilde{Z} = X^{1/2} Z X^{1/2}$ となるので，式 (8) より ΔZ_N は

$$\Delta Z_N = \mu X^{-1} - Z - \frac{1}{2}(X^{-1} \Delta X_N Z + Z \Delta X_N X^{-1}) \tag{9}$$

と解けて対称となる．この式を式 (6) に代入すれば $\Delta x_N, \Delta y_N$ についての連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} G + H & -\nabla g(x) \\ -\nabla g(x)^\top & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(x) + \nabla g(x) y + \mu \mathcal{A}^*(x) X^{-1} \\ g(x) \end{pmatrix} \tag{10}$$

が得られる．また，$\widetilde{A}_i(x) = T A_i(x) T^\top$ とおくと，行列 $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$ の (i, j) 成分は

$$H_{ij} = \mathrm{tr}\left(A_i(x) X^{-1} A_j(x) Z\right)$$

で与えられる．したがって，式 (10) から $\Delta x_N, \Delta y_N$ を求めて式 (9) に代入すれば ΔZ_N が得られる．これで定まるニュートン方向を HRVW/KSH/M 方向といい，実用的によく使われている．別の代表的なものとして NT 方向が知られている [2]．これは，$W = X^{1/2}(X^{1/2} Z X^{1/2})^{-1/2} X^{1/2}$ に対して $T = W^{-1/2}$ をスケーリング行列に選ぶものである．このとき $\widetilde{X} = W^{-1/2} X W^{-1/2} = W^{1/2} Z W^{1/2} = \widetilde{Z}$ が成り立つので，行列 H と探索方向 ΔZ_N はそれぞれ

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \mathrm{tr}(A_i(x) W^{-1} A_j(x) W^{-1}), \\ \Delta Z_N &= \mu X^{-1} - Z - W^{-1} \Delta X_N W^{-1} \end{aligned}$$

で与えられる．

他方, 式 (6) において行列 G の代わりに正定値対称行列 D（通常は対角行列，たとえば単位行列が選ばれる）で置き換えることによって得られる探索方向を最急降

下方向といい，$\Delta w_{SD} = (\Delta x_{SD}, \Delta y_{SD}, \Delta Z_{SD})^\top \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{S}^p$ で表す．この方向は後述する信頼領域法で使われる．もし $G+H$ あるいは $D+H$ が正定値対称で行列 $\nabla g(x)$ がフルランクならば，ニュートン方向 Δw_N あるいは最急降下方向 Δw_{SD} は一意に定まる．

4.2 主双対メリット関数

本節では，直線探索法（5 節）および信頼領域法（6 節）で使われるメリット関数を紹介する．いずれの方法においても，メリット関数を減少させることによって大域的収束性を実現する．以後，スケーリング行列 T は $\widetilde{X}\widetilde{Z} = \widetilde{Z}\widetilde{X}$ が成り立つように選ばれるものとし，簡単のために次の記号を導入する．

$$u = (x, Z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^p, \quad \Delta u = (\Delta x, \Delta Z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^p.$$

ただし，Δu は $\Delta u_N = (\Delta x_N, \Delta Z_N)$ または $\Delta u_{SD} = (\Delta x_{SD}, \Delta Z_{SD})$ を意味し，そのノルムは $\|\Delta u\| = \sqrt{\|\Delta x\|_2^2 + \|\Delta Z\|_F^2}$ で定義される．

アルゴリズムの大域的収束性を実現するために，具体的に次の主双対メリット関数を用いる（ν は正の実数）．

$$F(u) = F_{BP}(x) + \nu F_{PD}(u). \tag{11}$$

ただし，$F_{BP}(x)$ は主バリアペナルティ関数

$$F_{BP}(x) = f(x) - \mu \log(\det X(x)) + \rho \|g(x)\|_1$$

であり（ρ はペナルティパラメータ），$F_{PD}(u)$ は主双対バリア関数

$$F_{PD}(u) = \langle X(x), Z\rangle - \mu \log(\det X(x) \det Z)$$

である．

探索方向がメリット関数を減少させる方向（降下方向という）であるかどうかを議論するためにメリット関数の 1 次近似

$$F_l(u; \Delta u) = F(u) + \Delta F_l(u; \Delta u)$$

について考える．ただし，

$$\Delta F_l(u; \Delta u) = \Delta F_{BPl}(x; \Delta x) + \nu \Delta F_{PDl}(u; \Delta u),$$

$$\begin{aligned}\Delta F_{BPl}(x; \Delta x) &= \nabla f(x)^\top \Delta x - \mu \mathrm{tr}(X^{-1}\Delta X) \\ &\quad + \rho \left(\|g(x) + \nabla g(x)^\top \Delta x\|_1 - \|g(x)\|_1 \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta F_{PDl}(u; \Delta u) = \mathrm{tr}(&\Delta X Z + X \Delta Z - \mu X^{-1} \Delta X \\ &- \mu Z^{-1} \Delta Z)\end{aligned}$$

である．ニュートン方向または最急降下方向を単に Δw で表せば，もし行列 $G+H$ および $D+H$ が正定値対称で $\rho > \|y + \Delta y\|_\infty$ が成り立つと仮定すると，$\Delta x \neq 0$ ならば $\Delta F_{BPl}(x; \Delta x) < 0$ および $\Delta F_l(u; \Delta u) < 0$ が成り立つ．すなわち，Δx と Δu は主バリアペナルティ関数および主双対メリット関数に対して降下方向になる．

次に，6 節で述べる信頼領域法の準備としてメリット関数 (11) の 2 次近似（以下，モデル 2 次関数とよぶ）

$$F_q(u; \Delta u) = F(u) + \Delta F_l(u; \Delta u) + \frac{1}{2} Q(u; \Delta u)$$

について考える．ここで，$Q(u; \Delta u)$ は任意の実数 α に対して $Q(u; \alpha \Delta u) = \alpha^2 Q(u; \Delta u)$ が成り立つように選ばれた 2 次関数である．また，モデル 2 次関数とメリット関数の Δu 方向の減少量をそれぞれ

$$\begin{aligned}\Delta F_q(u; \Delta u) &\equiv \Delta F_l(u; \Delta u) + \frac{1}{2} Q(u; \Delta u), \\ \Delta F(u; \Delta u) &\equiv F(u + \Delta u) - F(u)\end{aligned}$$

で定義する．

5. 直線探索法を用いる主双対内点法

本節では，Algorithm SDPIP の Step 1 で BKKT 点を求めるための直線探索法を用いる主双対内点法 [8] を紹介する（これを内部反復とよぶ．一方，Algorithm SDPIP を外部反復という）．以下では，バリアパラメータ $\mu > 0$ は固定されていると仮定する．

ニュートン方向が与えられたとき，直線探索法では適当なステップ幅 α_k を求めて，

$$\begin{aligned}&x_{k+1} = x_k + \alpha_k \Delta x_{Nk}, \quad Z_{k+1} = Z_k + \alpha_k \Delta Z_{Nk}, \\ &y_{k+1} = y_k + \Delta y_{Nk} \quad \text{（ステップ幅は 1 とする）}\end{aligned}$$

の反復によって点列を生成する．ステップ幅 α_k は，メリット関数を減少させると同時に $X_k \succ O$, $Z_k \succ O$ を保つように調整される（すなわち内点を生成する）．また，k は内部反復の反復回数を表すとし，簡単のために $X(x_k)$ を X_k と表すことにする．ステップ幅の計算ではバックトラッキング法という手順を用いて，関数の減少条件（Armijo 条件に対応する）

$$\begin{aligned}&F(x_k + \alpha_k \Delta x_{Nk}, Z_k + \alpha_k \Delta Z_{Nk}) \\ &\quad \leq F(x_k, Z_k) + \varepsilon_0 \alpha_k \Delta F_l(x_k, Z_k; \Delta x_{Nk}, \Delta Z_{Nk})\end{aligned} \tag{12}$$

と正定値性の条件

$$X(x_k + \alpha_k \Delta x_{Nk}) \succ O \tag{13}$$

を満たすステップ幅 α_k を求める．ただし，ε_0 は $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ となる定数である．

以上の準備の下に，直線探索を用いる主双対内点法のアルゴリズムは次のように記述される．ここで，収束判定で用いられる ε' は Algorithm SDPIP（外部反復）における Step 1（内部反復）の $M_c\mu$ に対応する．

Algorithm SDPLS

Step 0. 初期内点 $w_0 = (x_0, y_0, Z_0)$ $(X_0 \succ O, Z_0 \succ O)$ とパラメータ $\mu > 0$, $\rho > 0$, $\nu > 0$, $\varepsilon' > 0$, $\gamma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$ を与え，$k=0$ とおく．

Step 1. もし $\|r(w_k, \mu)\| \le \varepsilon'$ ならば終了する．

Step 2. 行列 G_k とスケーリング行列 T_k を与えて，方程式 (6)–(8) を解いてニュートン方向 Δw_{Nk} を求める．もし $\Delta x_{Nk} = 0$ ならば，$w_{k+1} = (x_k, y_k + \Delta y_{Nk}, Z_k + \Delta Z_{Nk})$ を解として終了する．

Step 3. 直線探索条件 (12), (13) を満たすステップ幅 α_k を求める．

Step 4. $x_{k+1} = x_k + \alpha_k \Delta x_{Nk}$，$Z_{k+1} = Z_k + \alpha_k \Delta Z_{Nk}$，$y_{k+1} = y_k + \Delta y_{Nk}$ とおく．

Step 5. $k := k+1$ として Step 1 へ戻る．

実際の数値計算では，行列 G_k は正定値性を保存するようにヘッセ行列 $\nabla_x^2 L(w_k)$ の準ニュートン近似が選ばれることが多い．あるいはヘッセ行列 $\nabla_x^2 L(w_k)$ そのものを用いる場合には，$\nabla_x^2 L(w_k) + \sigma I$ が正定値行列になるような $\sigma \ge 0$ を選んで Levenberg-Marquardt 型の補正 [13] を行うことも考えられる．

Algorithm SDPLS で生成される点列の大域的収束性については，適当な仮定のもとで少なくとも一つ集積点が存在し，かつ，任意の集積点が BKKT 点になることが示されている．

6. 信頼領域法を用いる主双対内点法

本節では，Algorithm SDPIP（外部反復）の Step 1（内部反復）で BKKT 点を求めるための信頼領域法を用いる主双対内点法 [11] を紹介する．信頼領域法のオリジナルの形は与えられた信頼領域内で一般には非凸なモデル 2 次関数の最小点を探すという手続きが存在するが，半正定値計画問題では探索方向の計算に大きな手間がかかることが普通なので，なるべく簡便な手続きが望ましい．そこで，ニュートン方向と最急降下方向の二つの方向のみの計算で行おうというのが以下のアルゴリズムの骨子である．以下では，バリアパラメータ $\mu > 0$ は固定されていると仮定する．

信頼領域内にとどまるとともに内点を保つ範囲で Δu に沿ってモデル 2 次関数 $F_q(u; \alpha\Delta u)$（4.2 節参照）を最小にするステップ幅を $\alpha_\delta^*(u, \Delta u)$ とする．特に $\Delta u = \Delta u_{SD}$ に対して $u + \alpha_\delta^*(u, \Delta u_{SD})\Delta u_{SD}$ はコーシー点と呼ばれている．このとき，信頼領域法を用いて BKKT 点を求める主双対内点法は次のようなアルゴリズムで与えられる．

Algorithm SDPTR

Step 0. 初期内点 $w_0 = (x_0, y_0, Z_0)$ $(X_0 \succ O, Z_0 \succ O)$ と初期信頼領域半径 $\delta_0 > 0$ を与える．パラメータ $\mu > 0$, $\rho > 0$, $M > 1$, $\varepsilon' > 0$, $\gamma \in (0,1)$ を与え，$k=0$ とおく．

Step 1. もし $\|r(w_k, \mu)\| \le \varepsilon'$ ならば終了する．

Step 2. 行列 G_k, D_k とスケーリング行列 T_k を与えて，ニュートン方向 Δw_{Nk} と最急降下方向 Δw_{SDk} を求める．もし $\|\Delta u_{Nk}\| \le M\|\Delta u_{SDk}\|$ が成り立たないならば，行列 G_k を調整してこの不等式が成り立つようにする（行列 G_k は不定値であってもかまわないことに注意）．

Step 3. 探索方向 $\Delta u_{Nk}, \Delta u_{SDk}$ を用いて，$\overline{s}_k = (1-\theta)\Delta u_{Nk} + \theta \Delta u_{SDk}$ とおく．ここで，パラメータ $\theta \in [0,1]$ は，$s_k = \alpha_{\delta_k}^*(u_k, \overline{s}_k)\overline{s}_k$ が

$$\Delta F_q(u_k; s_k) \le \frac{1}{2}\Delta F_q(u_k; \alpha_{\delta_k}^*(u_k, \Delta u_{SDk})\Delta u_{SDk})$$

を満たすように選ばれる．

Step 4. メリット関数とモデル 2 次関数の減少量を比較して，新しい信頼領域半径 δ_{k+1} を求める．具体的には，$\Delta F(u_k; s_k) > \frac{1}{4}\Delta F_q(u_k; s_k)$ ならば $\delta_{k+1} = \frac{1}{2}\delta_k$（半径を小さくする）；$\Delta F(u_k; s_k) \le \frac{3}{4}\Delta F_q(u_k; s_k)$ ならば $\delta_{k+1} = 2\delta_k$（半径を大きくする）；どちらでもないとき $\delta_{k+1} = \delta_k$ とおく．

Step 5. もし $\Delta F(u_k; s_k) \le 0$ ならば，$u_{k+1} = u_k + s_k$ および $y_{k+1} = y_k + \Delta y_{Nk}$ とおく．さもなければ，$w_{k+1} = w_k$ とする．

Step 6. $k := k+1$ として Step 1 へ戻る．

Algorithm SDPTR で生成される点列の大域的収束性については，適当な仮定のもとで無限点列 $\{w_k\}$ に BKKT 条件を満たす集積点が存在することが示されている．

7. 局所的超 1 次収束性

本節では主双対内点法の局所的収束性について簡単に説明する [9]．ここでは外部反復と内部反復を分けずに各反復でバリアパラメータ μ_k に対してニュートン

方向を求める方程式を 1 回，もしくは 2 回ずつ解いて点列を更新していくことを考える．

スケーリング行列を $T = I$ とおいた場合はスケーリングなしのニュートン法になり，これは線形 SDP 問題における AHO 方向に対応する [2]．各反復で μ_k を $\|r_0(w_k)\|^{1+\tau}$ のオーダーで選んでニュートン方向 Δw_k を求めて $w_{k+1} = w_k + \Delta w_k$ によって点列を生成する．ただし，τ は $0 < \tau < 1$ となるパラメータである．このとき問題 (1) の KKT 点 w^* の十分近くに初期点を選べば，生成される点列 $\{w_k\}$ は w^* に局所的超 1 次収束する．

次にスケーリング付きニュートン法（HRVW/KSH/M 方向もしくは NT 方向を用いた主双対内点法）の収束率について説明する．各反復で μ_k を $\|r_0(w_k)\|^{1+\tau}$ のオーダーで選んで，方程式を 2 回ずつ解いてニュートン方向を求めて点列を生成する．このとき問題 (1) の KKT 点 w^* の十分近くに初期点を選べば，生成される点列 $\{w_k\}$ は w^* に 2 ステップ超 1 次収束する．

8. おわりに

非線形 SDP 問題の解法として主双対内点法を中心に紹介した．近似バリア KKT 点を求めるための探索方向の作り方，メリット関数の選び方，アルゴリズムの大域的収束性を実現するための手法について述べ，直線探索法を用いる主双対内点法と信頼領域法を用いる主双対内点法について解説した．ニュートン方向を求める際に，直線探索法ではラグランジュ関数のヘッセ行列に相当する行列 G の正定値性を保つ必要があるが信頼領域法ではその必要がない．通常の非線形最適化問題では前者に比べて後者の方が頑健であることが知られている．実際，筆者らが実施した数値実験では凸な非線形 SDP 問題に対しては直線探索法を用いる主双対内点法が有効であったが，非凸な非線形 SDP 問題に対しては信頼領域法を用いる主双対内点法の方が有効であった．一方，非線形 SDP 問題の場合にはモデル 2 次関数の設定によっては計算量が大幅に増加してしまうという問題点があげられるので，信頼領域法の頑健性を引き出すためにはまだまだ改良の余地がある．本稿の最後に局所的超 1 次収束性について触れたが，これを達成するためには制約想定，狭義相補性条件，非退化の条件などの仮定が必要である．こうした仮定を緩めた場合の解析については今後の課題である．

参考文献

[1] M. F. Anjos and J. B. Lasserre (eds.), *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*, Springer, 2012.

[2] 小島政和，土谷隆，水野眞治，矢部博，『内点法』，朝倉書店，2001.

[3] H. Wolkowicz, R. Saigal and L. Vandenberghe (eds.), *Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms, and Applications*, Kluwer, 2000.

[4] M. Kočvara and M. Stingl, "PENNON—A code for convex nonlinear and semidefinite programming," *Optimization Methods and Software*, **18**, pp. 317–333, 2003.

[5] M. Kočvara and M. Stingl, "On the solution of large-scale SDP problems by the modified barrier method using iterative solvers," *Mathematical Programming*, **109**, pp. 413–444, 2007.

[6] R. Correa and H. Ramírez, "A global algorithm for nonlinear semidefinite programming," *SIAM Journal on Optimization*, **15**, pp. 303–318, 2004.

[7] W. Gómez and H. Ramírez, "A filter algorithm for nonlinear semidefinite programming," *Computational and Applied Mathematics*, **29**, pp. 297–328, 2010.

[8] H. Yamashita, H. Yabe and K. Harada, "A primal-dual interior point method for nonlinear semidefinite programming," *Mathematical Programming*, **135**, pp. 89–121, 2012.

[9] H. Yamashita and H. Yabe, "Local and superlinear convergence of a primal-dual interior point method for nonlinear semidefinite programming," *Mathematical Programming*, **132**, pp. 1–30, 2012.

[10] A. Kato, H. Yabe and H. Yamashita, "An interior point method with a primal-dual quadratic barrier penalty function for nonlinear semidefinite programming," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **275**, pp. 148–161, 2015.

[11] H. Yamashita, H. Yabe and K. Harada, "A primal-dual interior point trust-region method for nonlinear semidefinite programming," *Optimization Methods and Software*, **36**, pp. 569–601, 2021.

[12] H. Yamashita and H. Yabe, "A survey of numerical methods for nonlinear semidefinite programming," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **58**, pp. 24–60, 2015.

[13] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization (Second Edition)*, Springer, 2006.

