

# 整凸多面体の組合せ的直径

鮎川 矩義

整凸多面体は、多面体論はもとより、最適化分野、特に、組合せ最適化や離散最適化の文脈で登場する凸多面体である。一方、組合せ的直径は、単体法の計算量の解析に起源をもつ凸多面体の特徴量であり、その挙動を理解するための研究が多角的に発展してきている。本稿では、組合せ的直径に関する研究の最近の展開を整凸多面体に関するものを中心に紹介する。

キーワード：整凸多面体、組合せ的直径、単体法の計算量、漸近的解析、ゾノトープ、ゼータ関数

## 1. はじめに

まず、本稿で焦点をあてる整凸多面体の導入として、つぎの問題を考える。

**問題 1.** 2次元平面  $\mathbb{R}^2$  の凸多角形で、頂点が整数点（座標が整数の点）となるものを整凸多角形と呼ぶ。正の整数  $k$  に対し、一辺の長さが  $k$  の正方領域

$$S_k = [0, k] \times [0, k]$$

を考え、 $S_k$  上に実現できる整凸多角形がもち得る頂点の最大数を  $f(k)$  と書く。  $f(k)$  の挙動を解明せよ。

小さな  $k$  に対し、 $f(k)$  の値を実際に求めてみよう。簡単のため、正方領域  $S_k$  上の整数点の集合を  $I_k$  と書く。まず、 $k=1$  のとき、集合  $I_1$  は、

$$I_1 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

である。条件を満たす整凸多角形は  $I_1$  の整数点を頂点にもつため、 $f(1) \leq |I_1| = 4$  である。一方、 $I_1$  の 4 個の整数点を頂点にもつ正方形 (図 1 左上) は条件を満たす整凸多角形である。よって、 $f(1) = 4$  である。では、 $k=2$  のときはどうか。集合  $I_2$  は、

$$I_2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 0), (0, 2), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$

であり、先ほどと同じ理由で、 $f(2) \leq |I_2| = 9$  である。しかし、 $I_2$  の 9 個の整数点を頂点にもつ整凸多角形は存在しないため、 $f(2) \leq 8$  である。もう少し考え

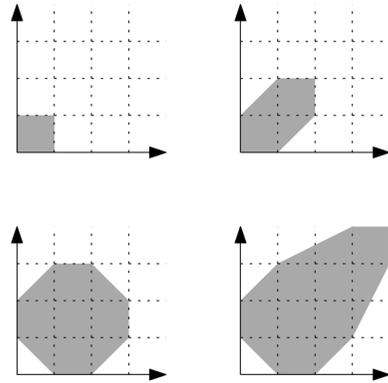


図 1  $f(k)$  を達成する整凸多角形の例 ( $k = 1, 2, 3, 4$ )

ると、 $f(2) \leq 6$  がわかる (同じ直線上からは高々二つの頂点しか取れないなどの多角形の「凸性」を考慮して考えるとわかる)。一方、 $f(2) \geq 6$  なので (図 1 右上)、 $f(2) = 6$  である。同様に考えると、 $f(3) = 8$  であることが確かめられる (図 1 左下)。

以上の観察から「 $f(k+1) - f(k) = 2$ 」と予想することもできるが、実は、 $f(4) = 9$  であり (図 1 右下)、すぐに正しくないことがわかる。では、 $f(k)$  はどのような挙動をするのか。実は、この問いに対し、「漸近的な ( $k \rightarrow \infty$  としたときの)」答えが知られている。

**定理 1** (Acketa and Žunić [1], Thiele [2]). 問題 1 にある  $f(k)$  に対し、 $k \rightarrow \infty$  において、

$$f(k) \sim \frac{12}{(2\pi)^{2/3}} k^{2/3}. \quad (1)$$

となる。ただし、 $f(k) \sim g(k)$  とは  $k \rightarrow \infty$  としたとき、 $f(k)/g(k)$  が 1 に収束することとする。

式 (1) の係数の値は約 3.52 である。注目すべきは、 $k$  の肩にある指数が  $2/3$  で 1 より小さいことである。

すけがわ のりよし

東京理科大学工学部情報工学科

〒 125-8585 東京都葛飾区新宿 6-3-1

sukegawa@rs.tus.ac.jp

このことから、増分  $f(k+1) - f(k)$  が  $k \rightarrow \infty$  で 0 に収束することがわかる。

問題 1 のような、凸多角形や凸多面体に関する問題は、多面体論はもとより、最適化分野にも登場する。本稿では、その一例として組合せ的直径に関する研究を取り上げ、特に整凸多面体に焦点をあてて、最近の展開を紹介する。本稿で扱う凸多面体に関する用語や定義、性質の詳細、および関連する話題については、文献 [3] を参照されたい。

## 2. 整凸多面体

整凸多面体は、頂点がすべて整数点となる凸多面体で、問題 1 で扱った整凸多角形の多次元版である。最適化分野において整凸多面体が現れる典型的な例は組合せ最適化である。組合せ最適化では、しばしば、各成分が  $\{0, 1\}$  に値をとる 0/1-ベクトルを用いて問題の解を表現する。このとき、解の集合の凸包として得られる整凸多面体 (0/1-多面体) の性質を調べることで、アルゴリズムの開発や問題構造の理解に役立つ知見が得られることが知られている [4]。

本稿では、頂点の座標の範囲に着目して、整凸多面体を以下のようなクラスに分類し、議論を進めていく。

**定義 1.**  $d$  次元空間  $\mathbb{R}^d$  の整凸多面体で、一辺の長さが  $k$  の立方体領域  $H_{d,k} = [0, k]^d$  上に実現できるもの、言いかえると、頂点集合が

$$\{0, 1, \dots, k\}^d$$

の部分集合となるものを、 $(d, k)$ -多面体と呼ぶ。

問題 1 の各  $k$  に対して扱う整凸多角形は、 $(2, k)$ -多面体である。組合せ最適化の文脈で特に重要な多面体のクラスは、 $k = 1, 2$  のときの  $(d, k)$ -多面体である。これらは、それぞれ、0/1-多面体、半整数多面体と呼ばれる。また、一般に、頂点の座標がすべて有理数の多面体は、分母をはらうことで、適当な  $d$  と  $k$  に対する  $(d, k)$ -多面体とみなせることに注意されたい。

## 3. 組合せ的直径

凸多面体の組合せ的直径は、凸多面体が定義する無向グラフの構造だけに依存して決まる、その意味で「組合せ的な」凸多面体の特徴量である。

凸多面体  $P$  に対し、その頂点 (0 次元面) と枝 (1 次元面) が定義する無向グラフ  $G(P)$  を凸多面体  $P$  のグラフと呼ぶ。図 2 に切頂六面体  $P$  (正六面体の各頂

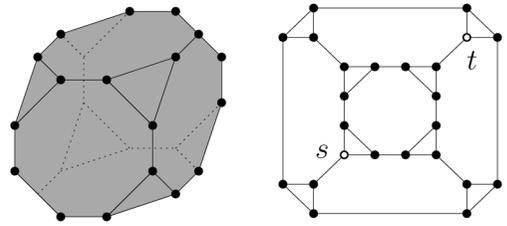


図 2 切頂六面体  $P$  (左) のそのグラフ  $G(P)$  (右)

点を切り落としたもの) とそのグラフ  $G(P)$  を示す。

実は、グラフ  $G(P)$  は連結で、任意の頂点对  $u, v$  に対し、それらを結ぶ道が存在する。そのような道のうちで最短のもの長さ (道が含む枝の本数) を頂点  $u, v$  の距離と呼び、 $d_P(u, v)$  と書く。たとえば、図 2 のグラフ  $G(P)$  に示した頂点对  $s, t$  に対しては  $d_P(s, t) = 6$  である。

**定義 2.** 凸多面体  $P$  に対し、そのグラフ  $G(P)$  において「どの 2 頂点間の距離も高々  $\delta$ 」となる  $\delta$  の最小値を、 $P$  の組合せ的直径と呼び、 $\delta(P)$  と書く。

言いかえると、凸多面体の組合せ的直径は、グラフにおける距離の最大値である。

たとえば、切頂六面体の組合せ的直径は 6 である。これは、図 2 のグラフ  $G(P)$  でどの頂点对の距離も高々 6 であり、また、先ほど確認したように、距離が実際に 6 となる頂点对が存在するためである。

## 4. Hirsch 予想を超えて

組合せ的直径に関する最も有名な予想は 1957 年に提示された Hirsch 予想である [5]。同予想は「 $n$  枚のファセットをもつ  $d$  次元有界凸多面体の組合せ的直径の最大値  $\Delta(d, n)$  は高々  $n - d$  か」を問うものである。ただし、ファセットとは多面体の次元から 1 だけ低い次元をもつ面のことである。

Hirsch 予想は約 50 年間未解決であったが、2010 年に Santos が反例を与え [6]、大きな注目を集めた。しかし、依然として、 $\Delta(d, n)$  の実際の挙動はよくわかっておらず、特に、上界と下界は長年大きく乖離したままである [7, 8]。この文脈では、「 $\Delta(d, n)$  が  $d$  と  $n$  の多項式か」を問う多項式 Hirsch 予想が重要な未解決問題となっている。同予想は、単体法の計算量の多項式性や、線形計画問題の強多項式時間可解性など、最適化の重要な未解決問題と密接に関係する。

このような背景から、「凸多面体の組合せ的直径の挙動を解明すること」は、現在、最適化や離散数学、計

表 1 現時点で既知の  $\delta(d, k)$  の値や漸近的挙動 (括弧 [~] 内の数字は文献の番号)

		$k$					
		1	2	3	4	...	$\infty$
$d$	1	1	1	1	1	...	1
	2	2	3	4	4	...	$\Theta(k^{2/3})$ [1, 2]
	3	3	4	6	7	...	$\Omega(k^{3/4})$ [20]
	4	4	6	8 [12]	? <sup>†</sup>	...	$\Omega(k^{4/5})$ [20]
	5	5	7	10 [13]	? <sup>†</sup>	...	$\Omega(k^{5/6})$ [20]
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$d$	$d$ [14]	$\lfloor 3d/2 \rfloor$ [15]	?*	?*	...	$\Omega(k^{d/(d+1)})$ [20]

?\* : 上限が知られているが、タイトであるかは不明 [12]

?<sup>†</sup> : 列挙アルゴリズムによる値の計算が試みられたが、厳密な値は不明 [13]

算幾何の分野での重要な課題の一つとされている [9]. 同課題の解決に向けては、さまざまなアプローチが試みられてきた. たとえば、(次節で議論する) 整凸多面体に着目する研究はその代表例である. このほかには、組合せ最適化の文脈で登場する 0/1-多面体に特化する研究 (たとえば, Borgwardt et al. [10]) や、線形不等式系による表現  $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$  に着目する研究 (Bonifas et al. [11]) などがある. これらのアプローチでの解析手法は大きく異なる: 前者では、頂点の隣接関係を組合せ的に特徴付けることができ、その強みを活かした解析が行われる. 一方、後者では、(完全単模性に関連する) 係数行列  $A$  の小行列式に着目し、等周定理などの凸幾何学の道具を用いた解析が行われる.

### 5. 整凸多面体の組合せ的直径の挙動

整凸多面体の組合せ的直径に関する研究では、2 節で定義した、 $(d, k)$ -多面体という分類に基づき、つぎの問題を考える.

**問題 2.** 正の整数  $d, k$  に対し、 $(d, k)$ -多面体を取り得る組合せ的直径の最大値を  $\delta(d, k)$  と書く.  $\delta(d, k)$  の挙動を解明せよ.

現時点で既知の  $\delta(d, k)$  の値やその漸近的挙動を表 1 に示す.  $d$  と  $k$  が小さい場合の  $\delta(d, k)$  の値は列挙アルゴリズムによって計算されたものである [13]. 列挙といっても、単純に求めるわけではない. たとえば  $\delta(3, 3)$  の値を求める場合、整数点の候補は  $(3+1)^3 = 64$  個と少ないが、素朴なしらみつぶし (整数点を選んでその凸包とグラフを求め、組合せ的直径を計算する、ということを繰り返す方法) では全く歯が立たない.

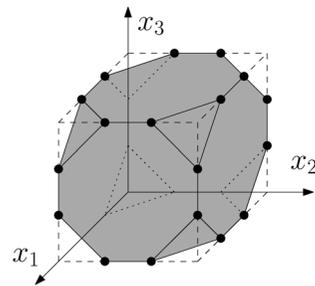


図 3 (3, 3)-多面体としての切頂六面体の表現

ちなみに、 $\delta(3, 3) = 6$  であり、組合せ的直径が実際に 6 となる (3, 3)-多面体の一つは、切頂六面体である. 切頂六面体が (3, 3)-多面体、つまり、 $\mathbb{R}^3$  の立方体領域  $[0, 3]^3$  上に実現できる整凸多面体であることは、図 3 からわかる. 破線は立方体領域  $[0, 3]^3$  を表す.

以降では、 $\delta(d, k)$  のより一般的な挙動の理解を目指す研究に焦点をあて、 $k$  を固定する場合と  $d$  を固定する場合とにわけ、主に解析手法を紹介する.

#### 5.1 $k$ を固定する場合

この文脈における最も基本的な結果は、Naddef によって 1989 年に示された以下の結果である.

**定理 2** (Naddef [14]).  $k = 1$  のとき、任意の正の整数  $d$  に対し、 $\delta(d, 1) \leq d$ . 特に、立方体  $[0, 1]^d$  は組合せ的直径が  $d$  となる  $(d, 1)$ -多面体であり、 $\delta(d, 1) = d$ .

この結果は表 1 の一番左の列 ( $k = 1$ ) の  $\delta(d, 1)$  の値を解明したことになる. Naddef の証明では以下の二つの事実が鍵となる.

- (F1)  $(d, 1)$ -多面体の面は再び  $(d, 1)$ -多面体となる.
- (F2)  $(d, 1)$ -多面体の同じ面に属さない任意の頂点对  $u, v$  に対し、 $u$  に隣接する頂点の少なくとも一つと  $v$

を含む面が存在する。

証明の方針は、(F1)に述べた再帰構造に基づく、次元に関する帰納法である。多面体の次元と空間の次元が混在して煩わしいが、実は、それらが一致する場合だけを考えれば十分である [3, 15]。 (F2) は、原論文 [14] とは異なるが、線形計画法と有界凸多面体に関する以下の命題（たとえば文献 [16]）から導ける [15, 17]。

**命題 1.** 有界凸多面体  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  の頂点对  $u, v$  に対し、ある  $d$  次行ベクトル  $c$  が存在して  $cv < cu$  なら、  $u$  に隣接する頂点  $u'$  で  $cu' < cu$  となるものがある。

この命題は、最適化の言葉を使えば、「ある頂点が最適解でないなら目的関数値が狭義に改善する頂点がある」と言っている。(F2)の頂点对  $u, v$  に対し、  $v_i \neq u_i$  なる  $i$  をとる。一般性を失わず、  $v_i = 0, u_i = 1$  とする。いま、第  $i$  成分が 1 の  $d$  次元単位行ベクトル  $e_i$  を  $c$  に代入した場合の命題 1 から、  $u$  に隣接する頂点  $u'$  で  $0 = u'_i = e_i u' < e_i u = u_i = 1$  となるものが存在する（頂点の「整数性」を利用）。いま、  $u'$  と  $v$  はともに  $P$  の面

$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x_i = 0\}$$

に属するため、(F2)が示された。(F2)から、  $d_P(u, v) \leq 1 + d_F(u', v)$  と距離を見積ることができる。よって、( $F$ の次元は  $P$ の次元より低いので)次元に関する帰納法がうまく機能する。

Kleinschmidt and Onn [17] は、任意の正の整数  $d, k$  に対し、  $\delta(d, k) \leq kd$  を示し、Naddef による上界を一般化した。証明は再び次元に関する帰納法であるが、(F3) ( $d, k$ )-多面体の同じ面に属さない任意の頂点对  $u, v$  に対し、  $u$  と  $v$  から合計で高々  $k$  本の枝を辿ってある共通の面に到達できる。

と、(F2)を修正する。実は、(F3)も命題 1 から導ける。ここではそのアイデアを図 3 を使って説明する。図 3 で、  $P$  がもつ (6 枚の) 8 角形の面のうち、  $x_3$  軸方向に見て下 ( $x_3 = 0$ ) と上 ( $x_3 = 3$ ) にある面

$$\begin{aligned} F_- &= P \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\} \\ F_+ &= P \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 3\} \end{aligned}$$

に注目する。同じ面に属さない任意の頂点对  $u, v$  に対し、合計で高々  $u_3 + v_3$  本の枝を辿れば  $u, v$  が  $F_-$  に到達でき、また、合計で  $(3 - u_3) + (3 - v_3)$  本の枝を辿れば  $F_+$  に到達できることがわかる。実際の証明では、  $c = \pm e_3$  とした場合の命題 1 を繰り返し適用すれ

ばよい（頂点の「整数性」を利用）。いま、

$$u_3 + v_3 \leq 3 \quad \text{または} \quad (3 - u_3) + (3 - v_3) \leq 3$$

であるため、図 3 の切頂六面体に対しては、(F3)が示された。(F3)から、  $u, v$  がそれぞれ  $F$  の頂点  $u', v'$  に到達するとすれば、  $d_P(u, v) \leq k + d_F(u', v')$  と距離を見積ることができる。この場合も、次元に関する帰納法がうまく機能する。

しかし、  $\delta(d, k)$  に対するこの  $kd$  なる上界は、  $k = 2$  の場合ですら、緩い。以下、これを確認する。まず、平面では、一般の凸多角形に対し、

$$\text{組合せの直径} = \lfloor \text{枝数} / 2 \rfloor = \lfloor \text{頂点数} / 2 \rfloor \quad (2)$$

なる関係式が成り立つ。実際、たとえば、8 角形と 9 角形の組合せの直径はともに 4 である。

ここで、1 節の問題 1 を思い出してほしい。そこにある  $f(k)$  は、  $(2, k)$ -多面体（整凸多角形）の頂点の最大数であるため、関係式 (2) から、  $\delta(2, k) = \lfloor f(k)/2 \rfloor$  となる。特に  $f(2) = 6$  から、  $\delta(2, 2) = 3$  である。一方、上界  $kd$  からは、  $\delta(2, 2) \leq 4$  しか導けず、実際の値と乖離することがわかる。

最近、  $k = 2$  の場合についてのこの乖離を埋める、新しい上界が報告された。

**定理 3** (Del Pia and Michini [15]). 任意の正の整数  $d$  と任意の正の整数  $k \geq 2$  に対し、

$$\delta(d, k) \leq \left\lfloor \left( k - \frac{1}{2} \right) d \right\rfloor.$$

特に、  $k = 2$  のとき、  $\delta(d, 2) = \lfloor 3d/2 \rfloor$ 。

証明は、これまで同様、次元に関する帰納法であるが、細やかな場合分けをし、解析を精緻化している。特に、命題 1 を適用する際の  $c$  として  $\pm e_i$  以外の方向も用いており、（頂点の整数性だけでなく）多面体の「凸性」を活かした解析となっている。

Del Pia and Michini [15] の上界は  $\delta(2, 2) \leq 3$  を意味するため、少なくとも  $(d, k) = (2, 2)$  の場合には緩くない「タイト」な上界である。実は、このタイト性は、多面体の直積を使うことで ( $k$  は 2 のままにして) 一般の  $d \geq 3$  に拡張できる。多面体  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  と  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$  の直積とは  $\{(p, q) : p \in P, q \in Q\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  なる多面体で、直積のグラフは  $P$  と  $Q$  のグラフから構築でき、特に、直積の組合せの直径は  $P$  と  $Q$  の組合せ的直径の和になることが示される。

定理 3 の主張の後半部は、表 1 の左から 2 番目の列 ( $k = 2$ ) の  $\delta(d, 2)$  の値を解明したことになる。では、左から 3 番目の列 ( $k = 3$ ) に対してはどうか。実は、この問いに対してはまだ答えはない。凸性をより活かして Del Pia and Michini [15] の解析を強化する後続研究については文献 [12] を参照されたい。

## 5.2 $d$ を固定する解析

まず、 $d = 2$  のとき、前述の関係式 (2) から、定理 1 の系として以下がただちに得られる。

系 1.  $d = 2$  のとき、 $k \rightarrow \infty$  としたとき、

$$\delta(2, k) \sim \frac{6}{(2\pi)^{2/3}} k^{\frac{2}{3}}. \quad (3)$$

では、 $d \geq 3$  のときはどうか。上と同様の方針をとるとすれば、問題 1 の高次元への拡張を考えることになるが、実はこれに対しても、以下のように、答えが知られている。

正の整数  $d, k$  に対し、 $d$  次元空間  $\mathbb{R}^d$  において、一辺の長さが  $k$  の立方体領域  $[0, k]^d$  上に実現できる整凸多面体がもち得る頂点の最大数を  $f(d, k)$  と書く。

定理 4 (Andrews [18], Bárány and Larman [19]). ある関数  $s(d)$  が存在し、任意の正の整数  $d$  に対し、 $k \rightarrow \infty$  としたとき、

$$f(d, k) \sim s(d) k^{\frac{d(d-1)}{(d+1)}}.$$

しかし、定理 1 から系 1 を導いたような方法で、定理 4 を組合せ的直径の解析に役立てることは難しい。これは、前述の  $d = 2$  での関係式 (2) のような、頂点数と組合せ的直径を結びつける関係式が  $d \geq 3$  の場合には知られていないためである。

Del Pia and Michini [15] は、多面体の直積を用いれば、式 (3) の結果を高次元での下界として一般化でき、 $k \rightarrow \infty$  としたとき、

$$\delta(d, k) \in \Omega(dk^{\frac{2}{3}}) \quad (4)$$

であることに言及し、同下界よりも優れた  $\delta(d, k)$  に対する下界の存在を未解決問題とした。最近、著者らは、同問題を肯定的に解決し、以下の下界を示した。

定理 5 (Deza, Pournin and Sukegawa [20]). 任意の正の整数  $d \geq 2$  に対し、 $k \rightarrow \infty$  としたとき、

$$\delta(d, k) \in \Omega(c(d)k^{\frac{d}{d+1}}).$$

ここで、関数  $c(d)$  は、 $\zeta(d)$  を (リーマンの) ゼータ関数 [21] としたとき、

$$c(d) = \left( \frac{2^d (d+1)^d}{2d! \zeta(d)} \right)^{\frac{1}{d+1}}.$$

以降、定理 5 の結果を既存の結果や観察と比較する。まず、簡単な計算から、定理 5 にある係数  $c(d)$  は

$$\lim_{d \rightarrow \infty} c(d) = 2e$$

と定数に収束することがわかる。この  $2e$  は約 5.44 である。また、任意の正の整数  $d \geq 3$  に対し、 $d$  を固定して  $k$  を十分大きくすると、必ず、

$$dk^{\frac{2}{3}} < c(d)k^{\frac{d}{d+1}}$$

となるため、定理 5 にある下界は式 (4) にある下界よりも優れているといえる。

興味深いのは、係数  $c(d)$  の  $d = 2$  のときの値  $c(2)$  である。このときのゼータ関数の値  $\zeta(2)$  は、パーゼル問題として知られているように、 $\pi^2/6$  である。この値を  $c(2)$  の式に代入して整理すると、 $c(2)$  が式 (3) の係数と一致することがわかる。言いかえると、定理 5 の下界は、 $d = 2$  のときは、 $\delta(d, k)$  の固定次元での漸近的挙動と一致するのである。このことから、任意の固定次元で、定理 5 の見積もりが、下界ではなく、真の漸近的挙動と一致する可能性もあると期待できる。しかし、現時点では、証明はできていない。

## 6. 定理 5 の証明のアイデア

最後に、定理 5 の証明のアイデアを紹介する。ここで実際に解析の対象となるのは  $(d, k)$ -多面体のうちでゾノトープ [3] となるものである。これが定理 5 の結果が  $\delta(d, k)$  の下界となる理由である。

定義 3.  $d$  次元空間  $\mathbb{R}^d$  の点集合  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_\ell\}$  に対し、

$$Z(G) = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} x_i g_i : x_i \in [0, 1] (i = 1, 2, \dots, \ell) \right\}$$

なる有界凸多面体  $Z(G) \subseteq \mathbb{R}^d$  を、 $G$  が生成するゾノ

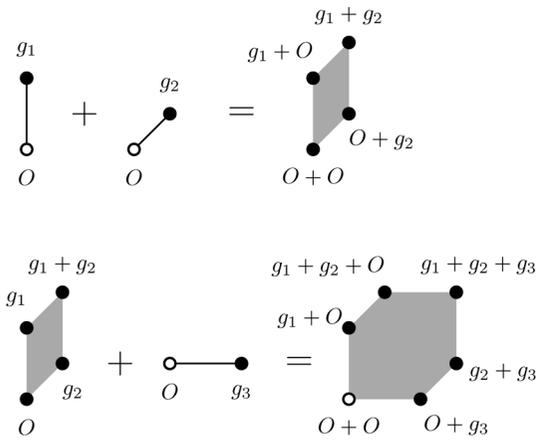


図4  $g_1 = (0, 2), g_2 = (1, 1), g_3 = (2, 0)$  が生成するゾノトープを計算する様子

トープ<sup>1</sup>と呼び、 $G$  を  $Z(G)$  の生成元と呼ぶ。

ゾノトープの計算を 2 次元の場合を例に説明する。まず、最初の 2 点  $g_1, g_2$  に着目する。点  $x_1g_1+x_2g_2$  は、 $x_1, x_2 \in [0, 1]$  を動くので、 $\{O, g_1, g_2, g_1+g_2\}$  の 4 点を頂点にもつ平行四辺形領域を表す。この領域を  $S$  と書く。つぎに、点  $g_3$  を追加する。点  $x_1g_1+x_2g_2+x_3g_3$  は、 $S$  の各点に  $x_3g_3$  を加えたものであり、 $x_3 \in [0, 1]$  を動くので、平行四辺形領域  $S$  を  $g_3$  だけ平行移動したときの軌跡を表す。言いかえると、 $S$  の各点に原点  $O$  と  $g_3$  を結ぶ線分を付け加えてでき上がる領域である。この操作を繰り返せば、ゾノトープを計算できる。図 4 に  $g_1 = (0, 2), g_2 = (1, 1), g_3 = (2, 0)$  が生成するゾノトープを計算する様子を示す。

- 命題 2.** ゾノトープ  $Z(G)$  はつぎの性質をもつ。
- (P1) 生成元  $G$  の点がかつて整数点なら、ゾノトープ  $Z(G)$  の各頂点も整数点で、整凸多面体となる。
  - (P2) ゾノトープ  $Z(G)$  の組合せ的直径は、生成元  $G$  の点か互いに平行でないなら、生成元  $G$  の要素数、つまり、 $|G| = \ell$  に一致する。

命題 2 の正当性は、直感的には、図 4 からわかる。これらの性質から、多面体の凸性や組合せ的直径に関する議論を、整数点の集合に関する議論に帰着できる。この「議論のすり替え」が解析の肝である。

<sup>1</sup> これは線分のミンコフスキー和としての一般的な定義であるが、 $(g_1, g_2, \dots, g_\ell) \in \mathbb{R}^{d \times \ell}$  が定める線形写像  $\pi: \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^d$  による立方体  $[0, 1]^\ell$  の像とみなすこともでき、文献 [3] の定義にも符合することを注意しておく。

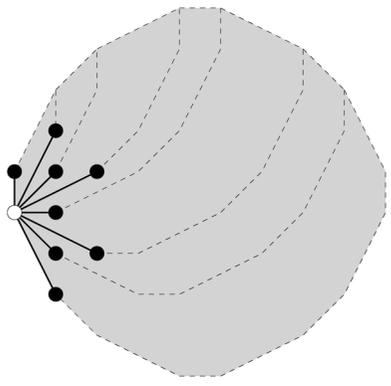


図 5 整数生成元  $G_1^2(3)$  が生成する整凸ゾノトープ

以降、整数点だけで構成される生成元を整数生成元、対応するゾノトープを整凸ゾノトープとそれぞれ呼ぶ。いま、 $\delta(d, k)$  に対するなるべく良い下界を与えるという目的からは、整数生成元  $G$  で、

1. 整凸ゾノトープ  $Z(G)$  の組合せ的直径は大きく、つまり、 $G$  が多くの整数点を含み、
2. 整凸ゾノトープ  $Z(G)$  の「サイズ」は小さい、つまり、 $Z(G) \subseteq [0, k]^d$  となる最小の  $k$  は小さい、ものを構築することが解析の目標となる。このことを意識して図 4 を改めて見ると、成分が大きい（線分として見たときに長い）点  $g_i$  が生成元  $G$  に含まれると、サイズが大きくなってしまふことがわかる。この例では、 $g_1 \rightarrow (0, 1), g_3 \rightarrow (1, 0)$  と変更すれば、（組合せ的直径を小さくせずに）サイズを小さくできる。

そこで、 $p, q$  をパラメータにもつ、以下の特殊な整数生成元を導入する：

$$G_p^d(q) = \{x \in \mathbb{Z}^d : x \succ 0, \gcd(x) = 1, \|x\|_p \leq q\}.$$

ただし、 $x \succ 0$  は最初の実成分が正であるという条件、 $\gcd(x) = 1$  は  $x$  の全成分の最大公約数が 1 となる条件である。すると、 $G_p^d(q)$  が (P2) の条件を満たすことが確かめられる。整数生成元  $G_p^d(q)$  の背景にある心は「 $L_p$  ノルムの意味で成分が小さい整数点で互いに平行でないものをできるだけ多く集めよ」である。図 5 に  $G_1^2(3)$  が生成する整凸ゾノトープを示す。

あとは、固定した  $p$  に対し、 $q$  の増加に伴い、 $G_p^d(q)$  が生成する整凸ゾノトープの組合せ的直径とサイズがどのように変化するかを解析すればよい。実は、 $p = 1$  の場合（尺度に  $L_1$  ノルムを使う場合）に最良の漸近的挙動を示すことが証明できる。もっと言うと、この漸近的挙動は、 $(G_p^d(q)$  からは生成できないようなものも含めた）一般の整凸ゾノトープの中で最良なものの一つとなることも証明できる。

すなわち,  $\delta(d, k)$  の定義における整凸多面体を整凸ゾノトープに変更したものを  $\delta_Z(d, k)$  と書けば, 以下が示される.

**定理 6** (Deza, Pournin and Sukegawa [20]). 任意の正の整数  $d \geq 2$  に対し,  $k \rightarrow \infty$  としたとき,

$$\delta_Z(d, k) \sim c(d)k^{\frac{d}{d+1}}.$$

ただし,  $c(d)$  は定理 5 のものと同じである.

話の流れを考慮して定理 5 を先に登場させたが, 実は, 定理 5 は定理 6 の系である.

## 7. おわりに

4 節で紹介した多項式 Hirsch 予想は, 「polymath project」(数学分野の重要な未解決問題の多角的解決を図るプロジェクト)の問題にも挙げられ, 広く注目を集めつつある. 今回焦点をあてた整凸多面体に関する研究は, 同予想にどのように関連していくかはまだわからないが, 組合せの直径に対するわれわれの理解を深めることに大きく貢献している.

6 節で紹介した文献 [20] の解析で使われた「議論のすり替え」は, 実は, 純粹数学寄りの分野における解析道具の応用を可能にしている. 生成元  $G_p^d(q)$  が含む整数点は, primitive point と呼ばれ, 任意の凸体に対するその密度の漸近的挙動がゼータ関数を用いて表現できることが知られている. このことが, 定理 5 の係数  $c(d)$  の定義にゼータ関数が登場する理由である.

最後に, 4 節で述べた事実からは, 種々のピボット規則に対し, 単体法の計算量そのものを解析することも重要であり, これについては文献 [22] やその後続研究を参照されたい.

**謝辞** RAMP シンポジウムでの講演の機会をくださった福永拓郎氏, 本稿執筆のお誘いをくださった高野祐一氏に感謝いたします. また, 原稿についてコメントをくださった, 池辺淑子氏, 北原知就氏, 藤本健太氏に感謝いたします.

## 参考文献

- [1] D. M. Acketa and J. D. Žunić, “On the maximal number of edges of convex digital polygons included into an  $m \times m$ -grid,” *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **69**, pp. 358–368, 1995.
- [2] T. Thiele, *Extremalprobleme für Punktmengen*, Diplomarbeit, Freie Universität Berlin, 1991.
- [3] G. M. ツィーグラール (八森正泰, 岡本吉央訳), 『凸多面体の数学』, Springer, 2003.
- [4] A. R. Mahjoub, “Polyhedral approaches,” *Concepts of Combinatorial Optimization*, V. T. Paschos (ed.), John Wiley, pp. 261–320, 2010.
- [5] G. M. Ziegler, “Who solved the Hirsch conjecture?” *Documenta Mathematica Extra Volume: Optimization Stories*, pp. 75–85, 2012.
- [6] F. Santos, “A counterexample to the Hirsch conjecture,” *Annals of Mathematics*, **176**, pp. 383–412, 2012.
- [7] F. Eisenbrand, N. Hähnle, A. Razborov and T. Rothvoss, “Diameter of polyhedra: Limits of abstraction,” *Mathematics of Operations Research*, **35**, pp. 786–794, 2010.
- [8] N. Sukegawa, “An asymptotically improved upper bound on the diameter of polyhedra,” *Discrete & Computational Geometry*, **62**, pp. 690–699, 2019.
- [9] C. D. Toth, J. O’Rourke and J. E. Goodman, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, 2017.
- [10] S. Borgwardt, J. A. De Loera and E. Finhold, “The diameters of network-flow polytopes satisfy the Hirsch conjecture,” *Mathematical Programming*, **171**, pp. 283–309, 2018.
- [11] N. Bonifas, M. D. Summa, F. Eisenbrand, N. Hähnle and M. Niemeier, “On sub-determinants and the diameter of polyhedra,” *Discrete & Computational Geometry*, **52**, pp. 102–115, 2014.
- [12] A. Deza and L. Pournin, “Improved bounds on the diameter of lattice polytopes,” *Acta Mathematica Hungarica*, **154**, pp. 457–469, 2018.
- [13] A. Deza, A. Deza, Z. Guan and L. Pournin, “Distance between vertices of lattice polytopes,” *Optimization Letters*, **14**, pp. 309–326, 2020.
- [14] D. Naddef, “The Hirsch conjecture is true for  $(0,1)$ -polytopes,” *Mathematical Programming*, **45**, pp. 109–110, 1989.
- [15] A. Del Pia and C. Michini, “On the diameter of lattice polytopes,” *Discrete & Computational Geometry*, **55**, pp. 681–687, 2016.
- [16] A. Brønsted, *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer, Berlin, 1983.
- [17] P. Kleinschmidt and S. Onn, “On the diameter of convex polytopes,” *Discrete Mathematics*, **102**, pp. 75–77, 1992.
- [18] G. E. Andrews, “A lower bound for the volume of strictly convex bodies with many boundary lattice points,” *Transactions of the American Mathematical Society*, **106**, pp. 270–279, 1963.
- [19] I. Bárány and D. G. Larman, “The convex hull of the integer points in a large ball,” *Mathematische Annalen*, **312**, pp. 167–181, 1998.
- [20] A. Deza, L. Pournin and N. Sukegawa, “The diameter of lattice zonotopes,” In *Proceedings of the American Mathematical Society*, **148**, pp. 3507–3516, 2020.
- [21] J. E. Nymann, “On the probability that  $k$  positive integers are relatively prime,” *Journal of Number Theory*, **4**, pp. 469–473, 1972.
- [22] T. Kitahara and S. Mizuno, “A bound for the number of different basic solutions generated by the simplex method,” *Mathematical Programming*, **137**, pp. 579–586, 2013.