2部マッチング理論の代数的一般化について

岩政　勇仁

最大 2 部マッチング問題とは，与えられた 2 部グラフの最大マッチングのサイズを求める問題であり，組合せ最適化分野で最も基本的な問題の一つである．この問題は，「変数を含んだ行列のランクを求める問題」として代数的に定式化できる．本稿では，上記の代数的定式化に端を発する二種類の問題（Edmonds 問題，非可換 Edmonds 問題）について，最近の進展を含めて概説する．その後，筆者らの成果である 2×2 型分割行列のランクを求める組合せ的多項式時間アルゴリズムについて，既存のアルゴリズムと比較しながら簡単に述べる．

キーワード：マッチング，Edmonds 問題，非可換 Edmonds 問題，最大最小定理，2×2 型分割行列

1. はじめに

最大 2 部マッチング問題とは，与えられた 2 部グラフの最大マッチングのサイズを求める問題であり，組合せ最適化分野で最も基本的な問題の一つである．ここで**マッチング**とは，端点を共有しない枝部分集合を指す．この問題は,「変数を含んだ行列のランクを求める問題」として代数的に定式化できる．実際に，2 部グラフ G の各枝 $e = (i, j)$ に対して，変数 x_e と，行列の (i, j) 成分を 1 それ以外を 0 とした行列 A_e を用意する．このとき，行列 A_G を

$$A_G := \sum_{e} A_e x_e \tag{1}$$

と定めると，A_G のランクと 2 部グラフの最大マッチングのサイズが一致する．

本稿では，上記の代数的定式化に端を発する二種類の問題（Edmonds 問題，非可換 Edmonds 問題）について説明する．前者は，一般グラフの最大マッチング問題の代数的一般化，後者は最大 2 部マッチング問題の代数的一般化ともいうべき問題である．これらの問題は近年盛んに研究されており，特に非可換 Edmonds 問題については顕著な進展が見られた．本稿ではそれについて概説する．その後，筆者らの成果である 2×2 型分割行列のランクを求める組合せ的多項式時間アルゴリズムについて, 既存のアルゴリズムと比較しながら簡単に述べる．上記の成果については詳しくは論文 [1] を参照されたい.

いわまさ　ゆに
京都大学大学院情報学研究科
〒 606–8501 京都市左京区吉田本町
iwamasa@i.kyoto-u.ac.jp

2. Edmonds 問題，非可換 Edmonds 問題

Edmonds 問題 [2] とは，体 $\mathbf{F}$ 上の $m \times n$ 行列 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ と変数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ を用いて

$$A = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_kx_k \tag{2}$$

と表される行列 A のランクを求める問題である．ここで，行列 A は有理関数体 $\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 上の行列とみなす．これは，さまざまなバリエーションをもつマッチング問題の統一的な代数的拡張といえる問題である．たとえば，1 節で述べた最大 2 部マッチング問題の代数的定式化は，Edmonds 問題の特別なインスタンスと見ることができる．また，最大 2 部マッチング問題の拡張である，一般グラフの最大マッチング問題，線形マトロイド交叉問題，線形マトロイドパリティ問題，といった組合せ最適化分野における代表的な問題も，同様に Edmonds 問題として定式化できる [3, 4].

上記で述べた Edmonds 問題の部分クラスに対応する組合せ最適化問題（最大 2 部マッチング問題，一般グラフの最大マッチング問題，線形マトロイド交叉問題，線形マトロイドパリティ問題）に対しては，それらが NP ∩ co-NP に入ることを示すような良い特徴づけ（最大最小定理）が知られており，さらに決定的に多項式時間で解ける．一方，Edmonds 問題に対しては，体 $\mathbf{F}$ のサイズが十分大きいときに適用できる確率的多項式時間アルゴリズムは知られているものの [5, 6]，決定的な多項式時間アルゴリズムはおろか, 良い特徴づけとなるような最大最小定理の存在も明らかになっていない．これらの存在性は, 組合せ最適化分野や理論計算機科学分野において重要な未解決問題となっている [7].

ではここで，最大 2 部マッチング問題の最大最小定理を代数的に定式化することを考えよう．2 部グラフでは，最大マッチングのサイズと最小頂点被覆のサイズ

が等しいことが知られている．これが，最大 2 部マッチング問題における最大最小定理（König–Egerváry の定理）である．

2 部グラフ $G = ([m],[n];E)$[1]に対する König–Egerváry の定理を以下のように書き下すことができる：

$$\begin{aligned}&\max\{|M| \mid M \text{ は } G \text{ のマッチング }\}\\ &= \min\{m+n-|S| \mid S \text{ は } G \text{ の独立集合 }\}. \qquad (3)\end{aligned}$$

式 (3) の左辺は，式 (1) で定義される行列 A_G のランクと等しいことはすでに見た．独立集合とは，任意の枝に対して，その両端を同時には含まないような頂点部分集合であることを考慮すると，式 (3) の右辺は，行列 A_e を用いて

$$\begin{aligned}\text{min.} \quad & m+n-(\dim X + \dim Y)\\ \text{s.t.} \quad & A_e(X,Y)=\{0\} \quad (e \in E),\\ & X : \mathbf{F}^m \text{ のベクトル部分空間},\\ & Y : \mathbf{F}^n \text{ のベクトル部分空間}, \qquad (4)\end{aligned}$$

と書き直すことができる．ここで，体 $\mathbf{F}$ 上の行列 B に対して，$B(X,Y) := \{x^\top By \mid x \in X,\ y \in Y\}$ としている．よって，$\operatorname{rank} A_G$ が問題 (4) の最適値と等しい，という最大最小定理が得られる．つまり，問題 (4) は，行列 A_G のランクを求める問題の双対問題とみなせる．

式 (2) で表される Edmonds 問題の一般のインスタンス A に対しても同様に “双対問題” を考えよう：

$$\begin{aligned}\text{min.} \quad & m+n-(\dim X + \dim Y)\\ \text{s.t.} \quad & A_i(X,Y)=\{0\} \quad (i \in [k]),\\ & X : \mathbf{F}^m \text{ のベクトル部分空間},\\ & Y : \mathbf{F}^n \text{ のベクトル部分空間}. \qquad (5)\end{aligned}$$

$A = A_G$ のときは，そのランクと問題 (5) の最適値は一致する．一方，一般の行列 A に対しては，そのランクは問題 (5) の最適値以下になるが，等号が成立しない場合がある．すなわち，Edmonds 問題と問題 (5) との間に弱双対性は成り立つが強双対性は成り立たない．

では “双対問題”(5) の最適値は，行列 A の何と対応しているのだろうか？ Fortin and Reutenaur [8] は，問題 (5) の最適値が A の**非可換ランク** $\text{nc-rank}\, A$ と一致することを示した．非可換ランクとは，式 (2) の行列 A に現れる変数が非可換 ($x_i x_j \neq x_j x_i$) であるときの A の「ランク」である．ここで，「ランク」は，$\mathbf{F}$ に変数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ を付加して得られる（非可換）多項式環 $\mathbf{F}\langle x \rangle$ における内的ランクとして定義される．つまり，A の非可換ランク $\text{nc-rank}\, A$ を

$$\min\{r \mid \exists B \in \mathbf{F}\langle x \rangle^{m \times r}, \exists C \in \mathbf{F}\langle x \rangle^{r \times n} : A = BC\}$$

と定義する．

先の議論から，2 部グラフ G から得られる A_G に対しては，そのランクと非可換ランクは一致する．また，線形マトロイド交叉問題に対応する行列においても同様の一致が見られる．一方，一般グラフの最大マッチング問題や線形マトロイドパリティ問題に対応する行列においては，ランクと非可換ランクが一致しない（ランクが非可換ランクより真に小さくなる）ことがある．

式 (2) で与えられる A の非可換ランク $\text{nc-rank}\, A$ を求める問題を**非可換 Edmonds 問題** [9] という．Fortin–Reutenaur の結果より，問題 (5) は非可換 Edmonds 問題の双対問題とみなすことができる．この（弱）双対性から，Edmonds 問題は一般グラフの最大マッチング問題の，非可換 Edmonds 問題は最大 2 部マッチング問題の代数的拡張であるといえよう．

近年，Garg et al. [10], Ivanyos et al. [11], Hamada and Hirai [12, 13] により独立に，非可換 Edmonds 問題が決定的に多項式時間で解けることが示された．彼らのアプローチは，それぞれ異なる．Garg et al. [10] は，$\mathbf{F}$ が有理数体 $\mathbf{Q}$ または複素数体 $\mathbf{C}$ のとき，Gurvitz [14] が提案した作用素 Sinkhorn アルゴリズムにより非可換 Edmonds 問題が解けることを示した．これは，解析的な $O(\min\{m,n\}^{\omega+4} \log(Mk \min\{m,n\}))$ 時間アルゴリズムとなっている．ここで，ω は行列積指数，M は A のビット長である．このアルゴリズムは，Sinkhorn アルゴリズム [15] を用いた完全 2 部マッチング存在判定アルゴリズム [16] の量子的拡張といえる．Ivanyos et al. [11] は，任意の体で動く，最大 2 部マッチング問題に対する古典的な増加道アルゴリズムのベクトル空間版とも呼ぶべき多項式時間アルゴリズムを提案した（計算時間は陽には解析されていない）．このアルゴリズムの詳細な説明は 3 節で行う．Hamada and Hirai [12, 13] は，任意の体 $\mathbf{F}$ に対して，双対問題 (5) を多項式回の $\mathbf{F}$ の四則演算で解く解析的なアルゴリズムを提案した．具体的には，問題 (5) をベクトル部分空間のなすモジュラ束上の劣モジュラ関数最小化問題として定式化し，それを連続緩和して得られた CAT(0) 空間（$\simeq$ 大域的に曲率が非正の空間）上の凸最適化問題が解けることと，得られた緩和解から元の問題の最適解が構成できることを示した．論文 [13] では，$\mathbf{F} = \mathbf{Q}$ のときにビット長を入力の多項式サイズに抑えて非可

[1] 正整数 k に対して，$[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$ とする．

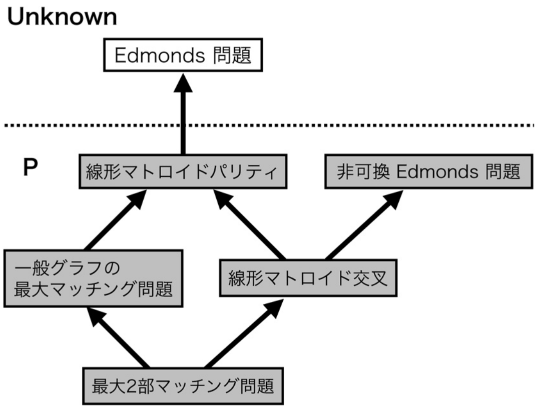

図 1 最大 2 部マッチング問題，一般グラフの最大マッチング問題，線形マトロイド交叉，線形マトロイドパリティ，Edmonds 問題，非可換 Edmonds 問題の関係．灰色で塗られている問題に対しては，良い特徴づけの存在と決定的多項式時間可解性が知られている．有向枝の終点に対応する問題は始点に対応する問題の拡張である．

換ランクを計算する手法を提案している．

非可換 Edmonds 問題が多項式時間可解であることから，ランクと非可換ランクが一致する行列に対しては，Edmonds 問題が多項式時間で解けることがわかる．本稿で現れた問題（最大 2 部マッチング問題，一般グラフの最大マッチング問題，線形マトロイド交叉，線形マトロイドパリティ，Edmonds 問題，非可換 Edmonds 問題）の関係を図 1 に示す．

3. Ivanyos–Qiao–Subrahmanyam のアルゴリズム

本節では，Ivanyos et al. [11] が提案したベクトル空間上の増加道アルゴリズム（Ivanyos–Qiao–Subrahmanyam のアルゴリズム；以下，IQS アルゴリズム）について概説する．これは，任意の体 $\mathbf{F}$ に対して式 (2) の形の行列 A の非可換ランクを多項式時間で求めることができる最初のアルゴリズムである．4 節で述べる筆者らが提案したアルゴリズムは，IQS アルゴリズムをもとに設計されている．

まず，ベクトル空間上の増加道ともいうべき概念である Wong 列 [17] を定義する．$\tilde{A}$ が A の各変数に $\mathbf{F}$ の元を代入して得られる $\mathbf{F}$ 上の $m \times n$ 行列のとき，$\tilde{A} \in A$ と書くことにする．$\ker_{\mathrm{L}}(\tilde{A})$, $\ker_{\mathrm{R}}(\tilde{A})$ を，それぞれ $\tilde{A}$ の左カーネル，右カーネルとする．すなわち，

$$\ker_{\mathrm{L}}(\tilde{A}) := \{x \in \mathbf{F}^m \mid x^\top \tilde{A} = 0\},$$
$$\ker_{\mathrm{R}}(\tilde{A}) := \{y \in \mathbf{F}^n \mid \tilde{A} y = 0\}$$

である．ベクトル部分空間 $X \subseteq \mathbf{F}^m$ の $\tilde{A}$ に関する直交補空間を $X^{\perp_{\tilde{A}}}$ と書く．つまり，

$$X^{\perp_{\tilde{A}}} := \{y \in \mathbf{F}^n \mid x^\top \tilde{A} y = 0 \ \ (x \in X)\}$$

とする．ベクトル部分空間 $Y \subseteq \mathbf{F}^n$ に関しても，同様に $Y^{\perp_{\tilde{A}}}$ を定義する．$(A, \tilde{A})$ に対する Wong 列とは，$X_0 = \mathbf{F}^m$, $Y_j := (X_{j-1})^{\perp_{\tilde{A}}}$, $X_j := \bigcap_{i=1}^{k} (Y_j)^{\perp_{A_i}}$ を満たすベクトル空間の列 $(X_0, Y_1, X_1, \dots)$ である．

上記の直交補空間の計算を $O(\min\{m,n\})$ 回行うことで Wong 列の極限 (X_∞, Y_∞) を求めることができる．Wong 列の極限 (X_∞, Y_∞) においては $X_\infty = \bigcap_{i=1}^{k} (Y_\infty)^{\perp_{A_i}}$ が成り立つことから，(X_∞, Y_∞) は非可換 Edmonds 問題の双対問題 (5) の制約条件を満たす．よって，A の非可換ランクは $m+n-(\dim X_\infty + \dim Y_\infty)$ 以下である．一方，$Y_\infty = (X_\infty)^{\perp_{\tilde{A}}}$ も成立するため，もし $X_\infty \supseteq \ker_{\mathrm{L}}(\tilde{A})$ ならば，$\tilde{A}$ のランクが $m+n-(\dim X_\infty + \dim Y_\infty)$ に等しいことが示せる．このとき，$m+n-(\dim X_\infty + \dim Y_\infty) = \operatorname{rank} \tilde{A} \leq \operatorname{rank} A \leq \operatorname{nc-rank} A \leq m+n-(\dim X_\infty + \dim Y_\infty)$ より，A の非可換ランクは $\tilde{A}$ のランクに等しくなる．以上の議論より，$(A, \tilde{A})$ に対する Wong 列の極限 (X_∞, Y_∞) を計算し，もし $X_\infty \supseteq \ker_{\mathrm{L}}(\tilde{A})$ となるなら A の非可換ランクとして $\operatorname{rank} \tilde{A}$ を出力する，という自然な手続きを設計できる．

この手続きで非可換ランクを計算するためには，Wong 列の極限において $X_\infty \not\supseteq \ker_{\mathrm{L}}(\tilde{A})$ となるとき，$\operatorname{rank} \tilde{A} < \operatorname{rank} \tilde{A}'$ となる $\tilde{A}' \in A$ を見つけなければならない．また，そもそも $\operatorname{nc-rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A}$ となる $\tilde{A}$ が存在しなければならない．しかし，一般的には $\operatorname{rank} \tilde{A}\ (\leq \operatorname{rank} A) < \operatorname{nc-rank} A$ となるため，そのような $\tilde{A}$ は存在しない．Ivanyos et al. [11] は，行列の拡大操作によりこれらの問題に対処できることを示した．正整数 d に対し，A の d 次拡大 $A^{(d)}$ を

$$A^{(d)} := A_1 \otimes X_1 + A_2 \otimes X_2 + \cdots + A_k \otimes X_k$$

と定める．ここで，X_i $(i \in [k])$ は $d \times d$ の変数行列，$\otimes$ はクロネッカー積を表す．$A^{(d)}$ も式 (2) の形の行列とみなせることに注意されたい．このとき，A の非可換ランクに関して以下の等式が成り立つ [9, 11]:

$$\begin{aligned} &\operatorname{nc-rank} A \\ &= \max\left\{ \frac{1}{d} \operatorname{rank} A^{(d)} \;\middle|\; d \leq \min\{m,n\}+1 \right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

また体 $\mathbf{F}$ のサイズ $|\mathbf{F}|$ が $d \min\{m,n\}+1$ 以上のとき，

$$\operatorname{rank} A^{(d)} = \max\{\operatorname{rank} \tilde{A} \mid \tilde{A} \in A^{(d)}\}$$

が成立する．

以上をふまえて，IQS アルゴリズムの概略を述べる：

Step 0: （必要ならば）体の拡大を行い，$|\mathbf{F}|$ を十分大きくする．

Step 1: $d := 1$ とし，$A^{(d)} = A$ の各変数に $\mathbf{F}$ の元を代入して得られる行列 $\tilde{A}$ を任意にとる．

Step 2: $(A^{(d)}, \tilde{A})$ の Wong 列の極限 (X_∞, Y_∞) を求める．

Step 3:

- $X_\infty \supseteq \ker_{\mathrm{L}}(\tilde{A})$ のとき，$\text{nc-rank}\, A = (\operatorname{rank} \tilde{A})/d$ と出力してアルゴリズムを終了する．
- $X_\infty \not\supseteq \ker_{\mathrm{L}}(\tilde{A})$ のとき，$(\operatorname{rank} \tilde{A}')/d' > (\operatorname{rank} \tilde{A})/d$ となるような $d' \leq \min\{m, n\} + 1$ と $\tilde{A}' \in A^{(d')}$ を見つけ，$d \leftarrow d'$, $\tilde{A} \leftarrow \tilde{A}'$ と更新し，Step 2 へ戻る．

IQS アルゴリズムにおいて，Step 3 の二つ目の行列の拡大に伴う操作が非常に難解なものとなっている．また，$\operatorname{rank} A = \text{nc-rank}\, A$ を満たす A に対しても行列の拡大を行わなくてはならない．もしそのような A に対して，行列を拡大せずに多項式時間で $\operatorname{rank} \tilde{A}' > \operatorname{rank} \tilde{A}$ なる $\tilde{A}' \in A$ を求められるとすると，ランクと非可換ランクの一致性判定を行うことが可能になる．非可換 Edmonds 問題の多項式時間可解性により，式 (2) の形の行列 A のランクと非可換ランクが一致するか否かを多項式時間で判定できれば，Edmonds 問題が多項式時間で解けることがわかる．つまり，$\operatorname{rank} A = \text{nc-rank}\, A$ を満たす A に対して「行列拡大なし IQS アルゴリズム」を構築することは，Edmonds 問題に対する決定的多項式時間アルゴリズム構築への新たなアプローチ方法といえる．

4. 2 × 2 型分割行列のランクを求める組合せ的多項式時間アルゴリズム

本節では，体 $\mathbf{F}$ 上の 2×2 行列 $A_{\alpha\beta}$ と変数 $x_{\alpha\beta}$ を用いて以下のように定義される **2×2 型分割行列** A をインスタンスとする Edmonds 問題，すなわち，A のランクを求める問題を考える：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}x_{11} & A_{12}x_{12} & \cdots & A_{1\nu}x_{1\nu} \\ A_{21}x_{21} & A_{22}x_{22} & \cdots & A_{2\nu}x_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mu 1}x_{\mu 1} & A_{\mu 2}x_{\mu 2} & \cdots & A_{\mu\nu}x_{\mu\nu} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

2×2 型分割行列は，一般の分割行列の研究 [18] の流れの中で Iwata and Murota [19] により詳細に研究されており，特に，そのランクは次の最適化問題の最適値に等しい，という最大最小定理が示されている：

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & 2\mu + 2\nu - \sum_{\alpha=1}^{\mu} \dim X_\alpha - \sum_{\beta=1}^{\nu} \dim Y_\beta \\ \text{s.t.} \quad & A_{\alpha\beta}(X_\alpha, Y_\beta) = \{0\} \ \ (\alpha \in [\mu], \beta \in [\nu]), \\ & X_\alpha, Y_\beta : \mathbf{F}^2 \text{ のベクトル部分空間.} \end{aligned} \tag{8}$$

Iwata–Murota の最大最小定理は，非可換 Edmonds 問題に対する Fortin–Reutenaur の最大最小定理を 2×2 型分割行列において精緻化したものとみなせ，2×2 型分割行列のランクと非可換ランクが一致することを示唆する．よって，非可換 Edmonds 問題の多項式時間可解性からただちに，2×2 型分割行列のランクを多項式時間で計算できることがわかる．しかし，既存のアルゴリズムは，体 $\mathbf{F}$ に条件があったり，解析的であったり，（陽に解析されていないこともあるが）計算時間が遅いものとなっている．また 3 節で見たように，非常に複雑な操作を必要とすることもある．

筆者らは論文 [1] で，2×2 型分割行列のランクを求める組合せ的かつ（比較的）シンプルなアルゴリズムを構築した．

定理 1. サイズが $2\mu \times 2\nu$ の 2×2 型分割行列 A のランクを求める組合せ的な $O((\mu\nu)^2 \min\{\mu, \nu\})$ 時間アルゴリズムが存在する．

提案アルゴリズムは 2×2 型分割行列に対する行列拡大なし IQS アルゴリズムとみなせる．われわれは，以下の観察に基づきアルゴリズムを設計した．

最大 2 部マッチング問題に対する増加道アルゴリズムは，式 (1) の形の行列 A_G に対する行列拡大なし IQS アルゴリズムとみなせる [20]．実際に，2 部グラフ $G = ([m], [n]; E)$ のマッチング $I \subseteq E$ に対して，$ij \in I$ に対応する変数 x_{ij} に 1 を，$ij \notin I$ に対応する変数 x_{ij} に 0 を代入して得られる行列を $\tilde{A}_I \in A_G$ とする．このとき，$(A_G, \tilde{A}_I)$ に対する Wong 列の計算は，I に対する増加道の（幅優先的な）探索に対応する．同様に，線形マトロイド交叉問題に対する増加道アルゴリズムも行列拡大なし IQS アルゴリズムとみなせる [20]．

一方，A_G に対して通常の（ 3 節で述べた）IQS アルゴリズムを適用し，$\tilde{A} \in A_G$ を任意にとってきて Wong 列を計算することを考える．$\tilde{A}$ に構造がないため，Wong 列の計算にも得られた極限 (X_∞, Y_∞) にも

組合せ的な意味づけを与えることが難しくなる．このとき，行列を拡大せずにランクが大きくなる $\tilde{A}' \in A_G$ を構成できるかはわかっていない．

これらをふまえて，われわれは新たに 2×2 型分割行列に対する「マッチング」を定義し，それに対して IQS アルゴリズムを動かすことで，2×2 型分割行列に対する行列拡大なし IQS アルゴリズムを設計した．

以下では，提案アルゴリズムの概略を述べる．

4.1 マッチング

2×2 型分割行列に対してマッチングという概念を導入し，その性質について述べる．なお，以下では，α, β, γ という文字をそれぞれ $[\mu]$, $[\nu]$, $[\mu] \sqcup [\nu]$ 上の要素とみなす．ここで，$\sqcup$ は直和を表す．また文脈から明らかなとき，“$\alpha \in [\mu]$” から “$\in [\mu]$” を省略する．

2 部グラフ $G := ([\mu], [\nu]; E)$ を $E := \{\alpha\beta \mid A_{\alpha\beta} \neq O\}$ と定義する．枝部分集合 $I \subseteq E$ に対して，I に含まれない枝 $\alpha\beta$ に対応する A の部分行列 $A_{\alpha\beta}$ を 2×2 零行列に変えて得られる行列を A_I と書く．

枝集合 $I \subseteq E$ が**マッチング**であるとは，任意の $\alpha\beta \in I$ に対して

$$\mathrm{rank}\, A_I > \mathrm{rank}\, A_{I \setminus \{\alpha\beta\}} \tag{9}$$

を満たすことと定義する．また，I が**最大マッチング**であるとは，任意のマッチング I' に対して，$\mathrm{rank}\, A_I \geq \mathrm{rank}\, A_{I'}$ となることをいう．これは，$\mathrm{rank}\, A_I = \mathrm{rank}\, A$ となることと等価である．一般の分割行列に対しても，同様にしてマッチングを定義できることに注意されたい．2 部グラフ G に対応する行列 A_G は 1×1 型分割行列（式 (7) 内の $A_{\alpha\beta}$ を 1×1 行列とした行列）とみなせる．このとき，上記のマッチングの定義は 2 部グラフにおける通常のマッチングの定義と一致する．

われわれは，2×2 型分割行列に対しては

- 与えられた枝集合がマッチングか否かの判定
- マッチング I に対する $\mathrm{rank}\, A_I$ の計算

を多項式時間で行えることを示した．よって，2×2 型分割行列 A のランクを求める問題は，最大マッチング I を求める問題に帰着できる．

4.1.1 節で，与えられた枝集合がマッチングか否かの判定が多項式時間でできること，4.1.2 節で，マッチング I に対して $\mathrm{rank}\, A_I$ の計算が多項式時間でできることを見る．

4.1.1 マッチングの特徴づけ

本節では，枝部分集合 $I \subseteq E$ がマッチングであることの特徴づけを与えることで，与えられた枝集合がマッチングか否かを多項式時間で判定できることを確認する．I に対して，G の部分グラフ $([\mu], [\nu]; I)$ を単に I と書く．グラフ I における頂点 γ の次数を $\deg_I(\gamma)$ と書く．

特徴づけは四つの条件 (Deg), (Path), (Cycle), (VL) からなる．

(Deg) 任意の頂点 γ に対して，$\deg_I(\gamma) \leq 2$ となる．

I が次数条件 (Deg) を満たすとき，I の各連結成分はパスもしくはサイクルとなる．よって，I は 2 彩色可能，すなわち，隣接する枝同士が異なるクラスに属するように枝を二つのクラス（$+$-枝と $-$-枝）に分けることができる．以下では，上記のように I 内の枝を $+$-枝と $-$-枝に分けたとする．

(Path), (Cycle) はそれぞれ I 内のパス，サイクルに関する条件である．$\mathrm{rank}\, A_{\alpha\beta} = k$ のとき，$\alpha\beta \in E$ を rank-k 枝とよぶ．

(Path) I における任意のパスにおいて，その両端は rank-1 枝である．

(Cycle) I における任意のサイクルは，rank-1 $+$-枝と rank-1 $-$-枝を含む．

(Deg), (Path), (Cycle) は I に関する組合せ的な条件であった．最後の (VL) は代数的な条件である．

(VL) 各頂点 α, β に対し，以下を満たすような異なる二つの 1 次元ベクトル部分空間 $U_\alpha^+, U_\alpha^- \subseteq \mathbf{F}^2$, $V_\beta^+, V_\beta^- \subseteq \mathbf{F}^2$ が存在する：任意の枝 $\alpha\beta \in I$ に対し，

$$(\ker_{\mathrm{L}}(A_{\alpha\beta}), \ker_{\mathrm{R}}(A_{\alpha\beta})) = \begin{cases} (U_\alpha^+, V_\beta^+) & \text{if } \alpha\beta \text{ は rank-1 } +\text{-枝}, \\ (U_\alpha^-, V_\beta^-) & \text{if } \alpha\beta \text{ は rank-1 } -\text{-枝}, \end{cases} \tag{10}$$

$$A_{\alpha\beta}(U_\alpha^+, V_\beta^-) = A_{\alpha\beta}(U_\alpha^-, V_\beta^+) = \{0\}, \tag{11}$$

が成り立つ．

式 (10) より，rank-1 $+$-枝 $\alpha\beta$ の両端点 α, β では U_α^+, V_β^+ が一意に定まる．さらに，α からのびる rank-2 パス $(\alpha = \alpha_0\beta_1, \beta_1\alpha_1, \ldots)$ に沿って式 (11) を満たすように $V_{\beta_1}^-, U_{\alpha_1}^+, \ldots$ が一意に定まる．同様の議論から，(Deg), (Path), (Cycle) を満たす I において，次数が 2 の頂点では式 (10), (11) が成立する U_α^+, U_α^-（もしくは V_β^+, V_β^-）は一意に定まる．(VL) とは，「そのように定まった 1 次元ベクトル部分空間 $U_\alpha^+, U_\alpha^-, V_\beta^+, V_\beta^-$ において，$U_\alpha^+ \neq U_\alpha^-$, $V_\beta^+ \neq V_\beta^-$ となる」ことを要請する条件である．

定理 2. 枝部分集合 I がマッチングである必要十分条件は，I が (Deg), (Path), (Cycle), (VL) を満たすことである．

条件 (Deg), (Path), (Cycle), (VL) が成り立つかの確認は多項式時間でできるため，枝部分集合 I がマッチングか否かの判定も多項式時間でできる．

4.1.2 行列 A_I のランクに関する組合せ的な式

マッチング I に対応する行列 A_I のランクに関する組合せ的な式を与える．枝 $\alpha\beta \in I$ が $\deg_I(\alpha) = \deg_I(\beta) = 1$ を満たすとき，**独立している**という．

$r(I) := |I| +$（I に含まれる独立した rank-2 枝の本数）

と定義すると以下が成立する．

定理 3. I がマッチングのとき，$\operatorname{rank} A_I = r(I)$ が成り立つ．

定理 3 より，マッチング I が与えられたとき，対応する行列のランク $\operatorname{rank} A_I$ は簡単に計算できる．

定理 3 と Iwata–Murota の最大最小定理から，組合せ的な量と代数的な量をつなげる最大最小定理がただちに得られる：

系 4.

$$\begin{aligned} &\max\{r(I) \mid I : \text{マッチング}\} = \\ &\min. \quad 2\mu + 2\nu - \sum_\alpha \dim X_\alpha - \sum_\beta \dim Y_\beta \\ &\quad \text{s.t.} \quad A_{\alpha\beta}(X_\alpha, Y_\beta) = \{0\} \quad (\alpha\beta \in E), \\ &\qquad\quad X_\alpha : \mathbf{F}^2 \text{ のベクトル部分空間}, \\ &\qquad\quad Y_\beta : \mathbf{F}^2 \text{ のベクトル部分空間}. \end{aligned}$$

定理 3 と系 4 より，マッチング I に対して，$A_{\alpha\beta}(X_\alpha, Y_\beta) = \{0\}$ と $r(I) = 2\mu + 2\nu - \sum_\alpha \dim X_\alpha - \sum_\beta \dim Y_\beta$ を満たす X_α, Y_β が存在するとき，I が最大マッチングであることが保証される．このような (X_α, Y_β) を I の**最適性証拠**と呼ぶ．

4.2 増加空間道アルゴリズム

本節では 2×2 型分割行列 A の最大マッチング I を求めるアルゴリズムの概略を述べる．詳しくは論文 [1] を参照されたい．

I をマッチングとする．提案アルゴリズムは，

- I の最適性証拠 (X_α, Y_β) か，I に対する**増加空間路** $\mathcal{P}$ のどちらか一方を見つける $O(\mu\nu)$ 時間アルゴリズム
- I とそれに対する増加空間路 $\mathcal{P}$ から，$r(I') > r(I)$ なるマッチング I' を得る $O((\mu\nu)^2)$ 時間アルゴリズム

の二つから構成されている．前者は，IQS アルゴリズムにおける Wong 列の計算に対応するが，以下の点で異なる．まず，Wong 列の計算が「幅優先的な（同期的な）増加道探索」であるのに対し，本アルゴリズムは「幅優先とは限らない（非同期的な）増加道探索」である．また，マッチング構造をうまく利用することで，2×2 行列 $A_{\alpha\beta}$ に対する直交操作と組合せ的な議論のみから増加道探索を行っている．**増加空間路**は，2 部グラフ G 上の路上の各頂点に $\mathbf{F}^2$ のベクトル部分空間が付随するものである．正式な定義は本稿では割愛する．後者は，IQS アルゴリズムにおける行列の更新に対応するが，A が 2×2 型分割行列であることと I がマッチングであることを利用し，行列拡大操作は行わず，組合せ的な操作のみで I の更新を行っている．

アルゴリズムの全体像は以下である．$I := \emptyset$ と初期化する．

Step 1: I の最適性証拠 (X_α, Y_β) を見つけたとき，$\operatorname{rank} A = r(I)$ と出力してアルゴリズムを終了する．そうでないとき，I に対する増加空間道 $\mathcal{P}$ を得る．

Step 2: $\mathcal{P}$ を用いて，$r(I') > r(I)$ となるマッチング I' を求める．$I \leftarrow I'$ と更新し，Step 1 に戻る．

Step 1 は $O(\mu\nu)$ 時間，Step 2 は $O((\mu\nu)^2)$ 時間かかるので，1 反復に $O((\mu\nu)^2)$ 時間かかる．反復回数は高々 $\operatorname{rank} A = O(\min\{\mu, \nu\})$ 回なので，アルゴリズム全体の計算時間は $O((\mu\nu)^2 \min\{\mu, \nu\})$ となる．

5. おわりに

本稿では，最大 2 部マッチング問題の代数的拡張として，Edmonds 問題と非可換 Edmonds 問題を紹介した．特に，非可換 Edmonds 問題の多項式時間可解性と IQS アルゴリズム，さらに，2×2 型分割行列のランクを求める組合せ的多項式時間アルゴリズムについて概略を述べた．

最後に，最大重み完全 2 部マッチング問題などの重み付き組合せ最適化問題の代数的拡張である**重み付き Edmonds 問題**や**重み付き非可換 Edmonds 問題** [21] を紹介して本稿を締める．重み付き Edmonds 問題では，変数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ に加え，重みを表現する変数 t が導入されており，体 $\mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)$ 上の行列

$A(t)$ の（t に関する）行列式次数を求める問題として定式化されている．また，重み付き非可換 Edmonds 問題は，上記の設定に加え，変数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ は非可換，t は $x_1, x_2, \ldots, x_k$ と可換な変数とした行列の行列式次数を求める問題である．近年，重み付き非可換 Edmonds 問題の擬多項式時間可解性が示され [21, 22]，さらに特殊な行列クラスに対する強多項式時間アルゴリズムも提案されている [23]．また，筆者は 4 節で述べたアルゴリズムを拡張することで，2×2 型分割多項式行列の行列式次数を求める組合せ的強多項式時間アルゴリズムを設計した [24]．

Edmonds 問題や重み付き（非可換）Edmonds 問題といった「代数的組合せ最適化問題」の計算複雑度の解明は，今後の重要な課題である．

謝辞　RAMP シンポジウムでの講演の機会をくださった福永拓郎氏，本稿執筆のお誘いをくださった高野祐一氏に感謝いたします．また，本稿で紹介した研究の共著者であり，原稿についてコメントをくださった平井広志氏に感謝いたします．

参考文献

[1] H. Hirai and Y. Iwamasa, "A combinatorial algorithm for computing the rank of a generic partitioned matrix with 2×2 submatrices," arXiv:2004.10443, 2020.
[2] J. Edmonds, "Systems of distinct representatives and linear algebra," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **71B**, pp. 241–245, 1967.
[3] L. Lovász, "Singular spaces of matrices and their application in combinatorics," *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, **20**, pp. 87–99, 1989.
[4] W. T. Tutte, "The factorization of linear graphs," *Journal of the London Mathematical Society*, **22**, pp. 107–111, 1947.
[5] L. Lovász, "On determinants, matchings, and random algorithms," In *International Symposium on Fundamentals of Computation Theory (FCT'79)*, 1979.
[6] J. T. Schwartz, "Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities," *Journal of the ACM*, **27**, pp. 701–717, 1980.
[7] V. Kabanets and R. Impagliazzo, "Derandomizing polynomial identity tests means proving circuit lower bounds," *Computational Complexity*, **13**, pp. 1–46, 2004.
[8] M. Fortin and C. Reutenauer, "Commutative/noncommutative rank of linear matrices and subspaces of matrices of low rank," *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **52**, B52f, 2004.
[9] G. Ivanyos, Y. Qiao and K. V. Subrahmanyam, "Non-commutative Edmonds' problem and matrix semi-invariants," *Computational Complexity*, **26**, pp. 717–763, 2017.
[10] A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira and A. Wigderson, "Operator scaling: Theory and applications," *Foundations of Computational Mathematics*, **20**, pp. 223–290, 2020.
[11] G. Ivanyos, Y. Qiao and K. V. Subrahmanyam, "Constructive non-commutative rank computation is in deterministic polynomial time," *Computational Complexity*, **27**, pp. 561–593, 2018.
[12] M. Hamada and H. Hirai, "Maximum vanishing subspace problem, CAT(0)-space relaxation, and block-triangularization of partitioned matrix," arXiv:1705.02060, 2017.
[13] M. Hamada and H. Hirai, "Computing the nc-rank via discrete convex optimization on CAT(0) spaces," arXiv:2012.13651v1, 2020.
[14] L. Gurvits, "Classical complexity and quantum entanglement," *Journal of Computer and System Sciences*, **69**, pp. 448–484, 2004.
[15] R. Sinkhorn, "A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices," *The Annals of Mathematical Statistics*, **35**, pp. 876–879, 1964.
[16] N. Linial, A. Samorodnitsky and A. Wigderson, "A deterministic strongly polynomial algorithm for matrix scaling and approximate permanents," *Combinatorica*, **20**, pp. 545–568, 2000.
[17] G. Ivanyos, M. Karpinski, Y. Qiao and M. Santha, "Generalized Wong sequences and their applications to Edmonds' problems," *Journal of Computer and System Sciences*, **81**, pp. 1373–1386, 2015.
[18] H. Ito, S. Iwata and K. Murota, "Block-triangularizations of partitioned matrices under similarity/equivalence transformations," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **15**, pp. 1226–1255, 1994.
[19] S. Iwata and K. Murota, "A minimax theorem and a Dulmage–Mendelsohn type decomposition for a class of generic partitioned matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **16**, pp. 719–734, 1995.
[20] 石川巧，"Wong Sequence による最大ランク行列補完，" 卒業論文，東京大学，2018.
[21] H. Hirai, "Computing the degree of determinants via discrete convex optimization on Euclidean buildings," *SIAM Journal on Applied Geometry and Algebra*, **3**, pp. 523–557, 2019.
[22] T. Oki, "On solving (non)commutative weighted Edmonds' problem," In *Proceedings of the 47th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'20)*, volume 168 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pp. 89:1–89:14, 2020.
[23] H. Hirai and M. Ikeda, "A cost-scaling algorithm for computing the degree of determinants," arXiv:2008.11388v2, 2020.
[24] Y. Iwamasa, "A combinatorial algorithm for computing the degree of the determinant of a generic partitioned polynomial matrix with 2×2 submatrices," In *Proceedings of the 22nd Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2021)*, to appear.

