管理工学科でのOR研究
―ロバストサプライチェインネットワーク均衡モデルと二次錐相補性問題―

成島　康史

本稿では，筆者の行った研究のうちの二つを取り上げて解説する．一つ目はサプライチェインネットワーク上で生じる競合を扱う数理モデルであり，二つ目は二次錐相補性問題に対する数値解法アルゴリズムである．異なる方向性の研究のように見えるが，実際には一連の流れの研究となっている．本稿では，そのつながりを含め解説を行う．

キーワード：管理工学の新展開，サプライチェインネットワーク均衡モデル，二次錐相補性問題

1. はじめに

筆者は慶應義塾大学理工学部管理工学科のオペレーションズ・リサーチ分野に属し，数理最適化に関する研究を行っている．もともと筆者は大規模な連続最適化問題や，相補性問題・変分不等式問題といった均衡問題に対する数値解法アルゴリズムの研究を行ってきており（たとえば，文献 [1–4] など），最近はそれに加え，数理最適化や均衡問題の数理モデルの研究にも積極的に取り組んでいる [5, 6]．本稿では，筆者の研究のうち二つの研究の概略を紹介したいと思う．

まず，2 節ではロバストサプライチェインネットワーク均衡モデル [5] を紹介する．企業経営におけるサプライチェインマネジメントの重要性は，近年では誰もが認識する事項であり，サプライチェインネットワークにおける物の流れや在庫などの数理モデルは古くから盛んに研究されてきた．サプライチェインマネジメントは全体最適を最終的な目的としているが，規模の大きなサプライチェインネットワークでは，その中心的な主体であってもネットワーク全体を把握しているとは限らず，競合が生じることも多い．そのような競合状態における均衡分析も盛んであり，ゲーム理論などの均衡モデルを用いて，さまざまな研究が行われてきた．サプライチェインネットワーク均衡 (Supply Chain Network Equilibrium, SCNE) モデルは Nagurney et al. [7] の研究に端を発する研究であり，その後，多くの発展的な研究がなされている（たとえば，文献 [5, 6, 8, 9] など）．本稿で紹介するロバスト SCNE モデル [5] もその流れの研究の一つであり，各主体間の不確実性に着目し，自分以外の主体の行動を正確には知ることができないという仮定の下で，最悪の状況を想定して意思決定を行うようなモデルとなっている．

一方，3 節では二次錐相補性問題 (Second-Order Cone Complementarity Problem, SOCCP) に対する数値解法アルゴリズム [3] を取り上げる．SOCCP はその名のとおり，二次錐上の相補性問題である．二次錐は非負領域を一般化した概念であるが，半正定値錐，さらには対称錐のサブクラスともなっている．半正定値錐上，もしくは対称錐上の相補性問題も研究されており，それらを用いて統一的に SOCCP を扱うことも可能だが，具体的なアルゴリズムに関しては二次錐の性質を使用することで，より効率的な（計算量の少ない）アルゴリズムの構築が可能である．よって，SOCCP に対する多くの数値計算アルゴリズムが提案されており，それらに基づくソフトウェアも開発されている [10–14].

上記二つの内容は，一見方向性の異なる内容に見えるかもしれないが，実際にはロバスト SCNE モデルの均衡解を求めるためには SOCCP を解く必要があり，そのような意味で連続した研究となっている．その部分についても 2 節以降で説明する．なお，本稿での説明は，紙面の関係もあり，概略のみにとどめ，細かな式の導出や数理的な定理などは割愛することとする．また，数学的な厳密さよりも研究の大枠の説明に注力しており，一部，引用した論文の内容を簡略化した部分もある．詳細に関しては，それぞれの論文を引用して

なるしま　やすし
慶應義塾大学理工学部
〒 223–8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3–14–1
narushima@ae.keio.ac.jp

ほしい．

以降では，表記を簡単にするために，ベクトル $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ に対して $(x^\top, y^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n+m}$ を $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ で表すことがある．

2. ロバストサプライチェイン均衡モデル

今，サプライチェインの上流から順に，m 個の製造業者，n 個の小売業者，o 個の市場が存在するネットワークを想定しよう（図 1）．製造業者 i は小売業者 j $(j = 1, \ldots, n)$ への供給量 q_{ij} を決定し，小売業者 j は製造業者 i $(i = 1, \ldots, m)$ への発注量 q_{ij} と市場 k $(k = 1, \ldots, o)$ への供給量 w_{jk} を決定することで，各々の利益を最大化する．市場 k では，後述する均衡条件を満たすように，小売業者からの購入量 w_{jk} $(j = 1, \ldots, n)$ と市場価格 p_j が決定される．このモデルでは，製造業者 i の決定変数 q_{ij} が小売業者 j の決定変数にもなっている．これは，均衡点においては両者の決定変数が一致することを暗に仮定しているが，一致しない場合には均衡点にはなり得ないということからこのような設定を行っている．また，w_{jk} についても同様である．

定式化に必要な記号を以下のように定義しておく：

$$
\begin{aligned}
q_{i\cdot} &:= (q_{i1}, \cdots, q_{in})^\top, \\
q_{\cdot j} &:= (q_{1j}, \cdots, q_{mj})^\top, \\
q_{-i\cdot} &:= (q_{1\cdot}, \cdots, q_{i-1\cdot}, q_{i+1\cdot}, \cdots, q_{m\cdot}), \\
q_{\cdot -j} &:= (q_{\cdot 1}, \cdots, q_{\cdot j-1}, q_{\cdot j+1}, \cdots, q_{\cdot n}), \\
w_{j\cdot} &:= (w_{j1}, \cdots, w_{jo})^\top, \\
w_{\cdot k} &:= (w_{1k}, \cdots, w_{nk})^\top, \\
w_{-j\cdot} &:= (w_{1\cdot}, \cdots, w_{j-1\cdot}, w_{j+1\cdot}, \cdots, w_{n\cdot}), \\
w_{\cdot -k} &:= (w_{\cdot 1}, \cdots, w_{\cdot k-1}, w_{\cdot k+1}, \cdots, w_{\cdot o}), \\
p &:= (p_1, \cdots, p_o)^\top.
\end{aligned}
$$

ここで，$q_{i\cdot}$ は製造業者 i の決定変数，$q_{\cdot j}$ は小売業者 j の決定変数である．また，$q_{-i\cdot}$ は製造業者 i における製造業者 i 以外の製造業者の決定変数をまとめたベクトルを意味し，$q_{\cdot -j}$ は小売業者 j における小売業者 j 以外の小売業者の決定変数をまとめたベクトルを表す．w_{jk} に関しても同様の表現を用いている．次に，ネットワークの各階層において各意思決定主体の解く問題を考えよう．

2.1 製造業者について

製造業者は製品を製造して小売業者へと納品するため，小売業者への販売利益からコストを引いたものが利益となる．よって，製造業者 i $(i = 1, \cdots, m)$ は以下の問題を解き，製品の供給量 $q_{i\cdot}$ を決定する：

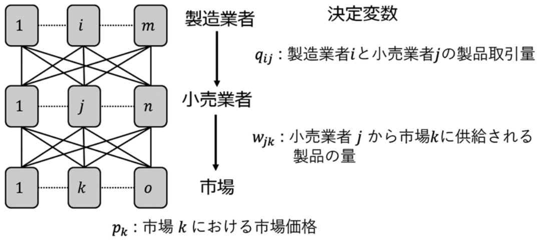

図 1　サプライチェインネットワークのイメージ

$$\max_{q_{i\cdot} \geq 0} \quad \rho_{i\cdot}^\top q_{i\cdot} - f_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}). \tag{1}$$

ここで，$\rho_{i\cdot} = (\rho_{i1}, \ldots, \rho_{in})^\top$ とし，ρ_{ij} は製造業者 i から小売業者 j への販売単価である．したがって，(1) の第一項目は販売利益を表す．一方，f_i は製造費用（コスト）関数を表しており，以下で定義されると仮定する：

$$f_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}) = \widehat{f}_i(q_{i\cdot}) + q_{i\cdot}^\top B_{ii} q_{i\cdot} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} q_{i\cdot}^\top B_{il} q_{l\cdot}. \tag{2}$$

ただし，$\widehat{f}_i$ は他の製造業者の変数に依存しない製造費用を表す関数であり，$B_{il} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(l = 1, \ldots, m)$ はすべての要素が非負の行列である．したがって，製造業者 i 以外の生産量 q_{il} $(l \neq i)$ が増加した場合，式 (2) の右辺の第三項目も増加する．これは，製造業者間に競合（たとえば，原料の調達の競合など）が生じていることを表現している．ロバスト SCNE モデルでは，製造業者 i は自分以外の製造業者の真の戦略（意思決定変数）q_{il} $(l \neq i)$ を正確には知ることができず，以下のような領域（不確実性集合）において最悪のケースが生じたときの利益を最大にするような意思決定を行う：

$$\tilde{q}_{l\cdot} \in U_{il} := \{\tilde{q}_{l\cdot} = q_{l\cdot} + M_{il}\Delta u_l \mid \|\Delta u_l\| \leq 1\}.$$

ただし，$M_{il} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を正定値対称行列であるとする．ここで，不確実性集合 U_{il} は $q_{l\cdot}$ を中心とする楕円領域であり，M_{il} が不確実性集合の形状や大きさを特徴づけていることを注意しておく．このとき，問題 (1) は以下のように置き換えられる[1]：

$$\min_{q_{i\cdot} \geq 0} \quad \max_{\tilde{q}_{l\cdot} \in U_{il}} -\rho_{i\cdot}^\top q_{i\cdot} + f_i(q_{i\cdot}, \tilde{q}_{-i\cdot}). \tag{3}$$

上記のような問題はロバスト最適化問題（たとえば，文献 [15] などを参照）と呼ばれ，標準的な手法を用いる

[1] この先の説明の便宜上，全体をマイナス倍して最小化問題にしている．

ことで以下のような問題に帰着できる：

$$\begin{aligned}\min_{q_{i\cdot},s_i} \quad & -\rho_{i\cdot}^\top q_{i\cdot} + f_i(q_{i\cdot}, q_{-i\cdot}) + \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{m} s_{il} \\ \text{s.t.} \quad & q_{i\cdot} \geq 0, \ \ \|M_{il}B_{il}^\top q_{i\cdot}\| \leq s_{il} \ \ (l \neq i).\end{aligned} \quad (4)$$

ここで $s_i := (s_{i1},\cdots,s_{ii-1},s_{ii+1},\cdots,s_{im})^\top$ である．問題 (4) の実行可能領域を T_i とおくと，$(q_{i\cdot}^*, s_i^*)$ が (4) の最適解であるための最適性条件は以下で与えられる（たとえば，文献 [16] 参照）：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial f_i(q_{i\cdot}^*, q_{-i\cdot})}{\partial q_{ij}} - \rho_{ij}\right)(q_{ij} - q_{ij}^*)\right\} \\ &\quad + \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{m}(s_{il} - s_{il}^*) \geq 0, \quad {}^\forall(q_{i\cdot}, s_i) \in T_i.\end{aligned} \quad (5)$$

2.2 小売業者の問題

小売業者は製造業者から製品を仕入れてそれを市場で販売することで利益を得る．したがって，小売業者 j $(j = 1,\ldots,n)$ は以下の問題を解いて，製造業者からの仕入れ量 $q_{\cdot j}$ と市場への供給量 $w_{j\cdot}$ を決定する：

$$\begin{aligned}\max_{q_{\cdot j},w_{j\cdot}} \quad & \pi_j\sum_{k=1}^{o} w_{jk} - \rho_{\cdot j}^\top q_{\cdot j} - h_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}), \\ \text{s.t.} \quad & q_{\cdot j} \geq 0, \ w_{j\cdot} \geq 0, \ \sum_{k=1}^{o} w_{jk} \leq \sum_{i=1}^{m} q_{ij}.\end{aligned} \quad (6)$$

ここで，π_j は小売業者の市場への売値である．したがって，目的関数の第一項目は市場への販売量の総和と販売単価の積，つまり小売業者 j の販売利益を表している．なお，後述するが，π_j は均衡解において内生的に決定される変数として扱う．一方，第二項目は製造業者からの仕入れコストである．また，h_j は小売業者 j の製品取扱費用を表しており，製造業者のときと同様に以下で定義する：

$$h_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}) = \widehat{h}_j(q_{\cdot j}) + q_{\cdot j}^\top \Gamma_{jj} q_{\cdot j} + \sum_{\substack{r=1\\r\neq j}}^{n} q_{\cdot j}^\top \Gamma_{jr} q_{\cdot r}\ .$$

ただし，$\widehat{h}_j$ は他の製造業者の変数に依存しない製品取引費用を表す関数であり，$\Gamma_{jr} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $(r = 1,\ldots,n)$ はすべての要素が非負の行列である．一方，三つ目の制約条件は製造業者からの仕入れ量の総和が市場への供給量の総和を下回らない，つまり，品切れを許さないための制約である．製造業者のときと同様に小売業者も最悪の状況を想定して意思決定を行うと仮定すると，小売業者 j は以下の問題を解き，意思決定を行うことになる（導出は割愛する）：

$$\begin{aligned}\min_{q_{\cdot j},w_{j\cdot},t_j} \quad & -\pi_j\sum_{k=1}^{o} w_{jk} + \rho_{\cdot j}^\top q_{\cdot j} \\ & + h_j(q_{\cdot j}, q_{\cdot -j}) + \sum_{\substack{r=1\\r\neq j}}^{n} t_{jr} \\ \text{s.t.} \quad & q_{\cdot j} \geq 0, \ w_{j\cdot} \geq 0, \ \sum_{k=1}^{o} w_{jk} \leq \sum_{i=1}^{m} q_{ij}, \\ & \|N_{jr}\Gamma_{jr}^\top q_{\cdot j}\| \leq t_{jr} \ \ (r \neq j).\end{aligned} \quad (7)$$

ただし，$t_j := (t_{j1},\cdots,t_{jj-1},t_{jj+1},\cdots,t_{jn})^\top$ とし，$N_{jr} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ は製造業者の問題における M_{il} に相当する正定値対称行列であり，小売業者 j の不確実性集合を特徴づけている．問題 (7) の実行可能領域を S_j とし，$\xi_j \in \mathbb{R}$ を (7) の三つ目の制約条件（品切れ制約）に対するラグランジュ乗数とすると，その最適性条件は

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\rho_{ij}^* + \frac{\partial h_j(q_{\cdot j}^*, q_{\cdot -j})}{\partial q_{ij}} - \xi_j^*\right)(q_{ij} - q_{ij}^*)\right\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{o}\left\{(\xi_j^* - \pi_j^*)(w_{jk} - w_{jk}^*)\right\} \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{m} q_{ij}^* - \sum_{k=1}^{o} w_{jk}^*\right)(\xi_j - \xi_j^*) \\ &\quad + \sum_{\substack{r=1\\r\neq j}}^{n}(t_{jr} - t_{jr}^*) \geq 0, \\ &\qquad \text{for } {}^\forall(q_{\cdot j}, w_{j\cdot}, t_j) \in S_j, \ \ {}^\forall\xi_j \geq 0\end{aligned} \quad (8)$$

で与えられる（詳しくは文献 [17] などを参照）．ただし，$(q_{\cdot j}^*, w_{j\cdot}^*, t_j^*)$ は (7) の最適解であり，ξ_j^* は最適解におけるラグランジュ乗数である．

2.3 市場の均衡条件

最後に，市場 k $(k = 1,\ldots,o)$ が満たすべき条件を考えよう．以下の二つは市場における均衡条件として一般的な条件である．

$$\begin{cases}\pi_j + g_{jk}(w_{\cdot k}, w_{\cdot -k}) = p_k & \text{if} \quad w_{jk} > 0, \\ \pi_j + g_{jk}(w_{\cdot k}, w_{\cdot -k}) \geq p_k & \text{if} \quad w_{jk} = 0,\end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases}d_k(p) = \sum_{j=1}^{n} w_{jk} & \text{if} \quad p_k > 0, \\ d_k(p) \leq \sum_{j=1}^{n} w_{jk} & \text{if} \quad p_k = 0.\end{cases} \quad (10)$$

ただし，$d_k(p)$ は市場 k の需要を表す関数であり，$g_{jk}(w_{\cdot k}, w_{\cdot -k})$ は市場 k の小売業者 j に対する（製品一単位当たりの）取引費用を表す関数である．条件 (9) において，$\pi_j + g_{jk}(w_{\cdot k}, w_{\cdot -k})$ は（製品一単位当たりの）仕入れ価格と費用の和であり，p_k は市場価格である．したがって，(9) は市場 k における価格と費用の釣り合いの関係を表している．同様に，条件 (10) は市場 k における需要と供給の関係を表している．条

件 (9), (10) を満たす点を $(w_{\cdot k}^*, p_k^*, \pi_j^*)$ で表すと，(9), (10) は以下の同値な条件に書き直すことができる：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left\{(\pi_j^* + g_{jk}(w_{\cdot k}^*, w_{\cdot -k}) - p_k^*)(w_{jk} - w_{jk}^*)\right\}\\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^{n} w_{jk}^* - d_k(p_k^*, p_{-k})\right)(p_k - p_k^*) \ge 0,\\ &\qquad \text{for } {}^\forall w_{\cdot k} \ge 0,\ p_k \ge 0.\end{aligned} \tag{11}$$

2.4 変分不等式問題としての定式化

製造業者の最適性条件 (5)，小売業者の最適性条件 (8)，市場の均衡条件 (11) をすべて足し合わせることで，ロバスト SCNE モデルの均衡解を求める問題は以下のように与えられる：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i(q_{i\cdot}^*, q_{-i\cdot}^*)}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial h_j(q_{\cdot j}^*, q_{\cdot -j}^*)}{\partial q_{ij}} - \xi_j^*\right)\\ &\qquad\qquad \times (q_{ij} - q_{ij}^*)\\ &+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{o}\left(g_{jk}(w_{\cdot k}^*, w_{\cdot -k}^*) - p_k^* + \xi_j^*\right)(w_{jk} - w_{jk}^*)\\ &+ \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} q_{ij}^* - \sum_{k=1}^{o} w_{jk}^*\right)(\xi_j - \xi_j^*)\\ &+ \sum_{k=1}^{o}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{jk}^* - d_k(p_k^*, p_{-k}^*)\right)(p_k - p_k^*)\\ &+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{m}(s_{il} - s_{il}^*) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n}(t_{jr} - t_{jr}^*) \ge 0,\\ &\qquad\qquad {}^\forall (q, w, \xi, p, s, t) \in V.\end{aligned} \tag{12}$$

ただし，

$$\begin{aligned}V := \{(q, w, \xi, p, s, t) |\ & q \ge 0,\ w \ge 0,\ \xi \ge 0\ , p \ge 0,\\ & \|M_{il} B_{il}^\top q_{i\cdot}\| \le s_{il} \quad (l \neq i, i = 1, \cdots, m),\\ & \|N_{jr} \Gamma_{jr}^\top q_{\cdot j}\| \le t_{jr} \quad (r \neq j, j = 1, \cdots, n)\}\end{aligned} \tag{13}$$

とし，q, w, ξ, s, t は，それぞれ，$q_{ij}, w_{jk}, \xi_j, s_{il}, t_{jr}$ を要素にもつベクトルであるとする．ここで，（条件を足し合わせることで）小売業者の市場への販売単価 π_j が消えて，(12) には表れないことに注意しよう．一方，(9) より，均衡解が求まれば，$w_{jk}^* > 0$ ならば $\pi_j^* = p_k^* - g_{jk}(w_{\cdot k}^*, w_{\cdot -k})$ であるので，π_k^* は内生的に決定される．問題 (12) は非常に複雑な式となっているが，$\eta = (q, w, \xi, p, s, t)$ とし，関数 F を適切に設定すれば，(12) は

$$\begin{aligned}\text{Find}\quad & \eta^* \in V,\\ \text{s.t.}\quad & F(\eta^*)^\top(\eta - \eta^*) \ge 0,\ {}^\forall \eta \in V\end{aligned} \tag{14}$$

と書き直すことができる．このような問題は一般的に変分不等式問題と呼ばれる（たとえば，文献 [16] などを参照）．変分不等式問題 (12) は，その中で現れる関数 f_i, h_j, g_{jk}, d_k への適当な仮定の下，その解の存在性や唯一性が示されている．詳細は文献 [5] を参照されたい．

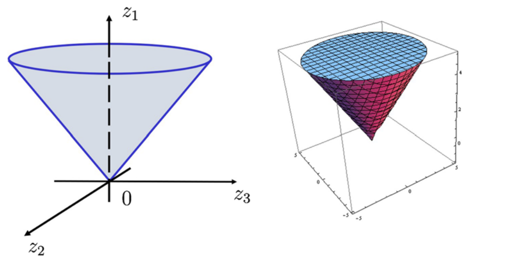

図 2　$\mathcal{K}^3 = \{(z_1, z_2, z_3)^\top | z_1 \ge \sqrt{z_2^2 + z_3^2}\}$ のイメージ図

2.5 二次錐相補性問題への帰着

変分不等式問題 (14) を特徴づける集合 V には，たとえば，$\|M_{il} B_{il}^\top q_{i\cdot}\| \le s_{il}$ といったような条件が含まれている．ノルムは微分不可能な関数であるため，この問題をそのまま扱うのは一般的には難しい．そこで，この条件を以下のように書き換える．

$$\begin{pmatrix} s_{il} \\ M_{il} B_{il}^\top q_{i\cdot} \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^{1+n}.$$

ただし，$n = 0$ のときは $\mathcal{K}^1 = \mathbb{R}_+ := \{z | z \ge 0\}$ とし，$n \ge 1$ のときは

$$\mathcal{K}^{1+n} = \left\{ z = (z_1,\ \bar{z}) \in \mathbb{R}^{1+n} \,\middle|\, x_1 \ge \|\bar{x}\| \right\}$$

により定義する．集合 $\mathcal{K}^{1+n}$ は二次錐と呼ばれ，非負領域 $\mathbb{R}_+$ の一般化となっている．図 2 は $n = 2$（3 次元）のときのイメージである．

詳細は割愛するが，適切に関数 G を定義して，二次錐の直積 $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_\ell}$ を用いれば，集合 V を $V = \{\eta \mid G(\eta) \in \mathcal{K}\}$ で表すことができ，変分不等式問題の KKT 条件（解の条件）は

$$\begin{aligned}\text{Find}\quad & (x, \eta)\\ \text{s.t.}\quad & F(\eta) - \nabla G(\eta) x = 0,\\ & x \in \mathcal{K},\ G(\eta) \in \mathcal{K}, x^\top G(\eta) = 0\end{aligned} \tag{15}$$

となるここで，x はラグランジュ乗数である．このような問題は二次錐相補性問題と呼ばれ，多くの数値解法アルゴリズムが提案されている．二次錐相補性問題に関しては，３節で取り上げる．

2.6 数値例

ここでは，図 3 のようなネットワークを想定して数値例を紹介する．ロバスト SCNE モデルでは，すべての製造業者と小売業者に不確実性を仮定していたが，

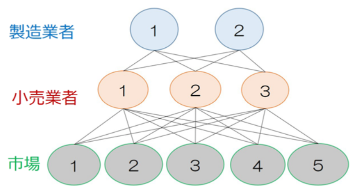

図 3　サプライチェインネットワークのイメージ

考察しやすくするため，製造業者 1 と小売業者 1 のみの不確実性を考慮し，製造業者 2 と小売業者 2, 3 は正確に情報を把握できるものとする．さらに，製造業者 1 と小売業者 1 の不確実性集合を特徴づける行列をそれぞれ

$$M_{12} = \alpha \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad N_{12} = \alpha \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

とした．α は正のパラメータで，α が大きくなれば大きくなるほど，不確実性が大きくなることを意味する．そのほかの使用したパラメータの値などは割愛する．

図 4 では，不確実性の大きさ α を増大させていったときの，製造業者–小売業者間の取引量（つまり，q_{ij}）の変化を表している．製造業者 1（特に製造業者 1→小売業者 1）は不確実性が増すにつれて，取引量を大きく減らしていることがわかる．一方，製造業者 2 はそれを補うように小売業者 1 との取引量を増やしている．これは，不確実な情報しかもたない業者が不利になる一方，正確な情報をもつ業者が相対的に有利になっていることを意味している．一方，サプライチェインネットワークを流れる製品の総量に注目してみよう．先に述べたように，不確実性が大きくなるにつれて，製造業者 1→ 小売業者 1 が減るのに対して，製造業者 2→小売業者 1 は増えている．しかしながら，その減り方と増え方を見ると，単に製造業者 1 が損した分だけ製造業者 2 が得をするわけではなく，全体としての製品の総量は減っていることがわかる．つまりこれは，不確実性の増大に伴って，サプライチェイン全体としてのパフォーマンスが悪化することを意味している．

3.　二次錐相補性問題に対する数値解法

以降では以下の二次錐相補性問題 (SOCCP)を考える:

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & (x, y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell \\ \text{s.t.} \quad & H(x, y, \eta) = 0 \\ & x \in \mathcal{K},\ y \in \mathcal{K}, x^\top y = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

ここで，$H : \mathbb{R}^{2n+\ell} \to \mathbb{R}^{n+\ell}$ は微分可能な関数である

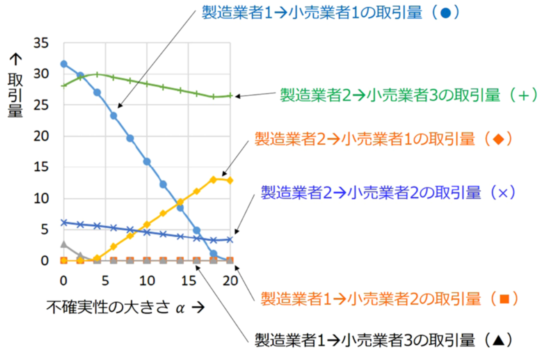

図 4　製造業者–小売業者間の取引量の変化

とする．たとえば，

$$H(x, y, \eta) := \begin{pmatrix} F(\eta) - \nabla G(\eta) x \\ y - G(\eta) \end{pmatrix}$$

とおいた場合は (15) に帰着する．集合 $\mathcal{K}$ は二次錐の直積であるが，以降では表記を簡単にするために，一つだけの二次錐，つまり，$\mathcal{K} = \mathcal{K}^n$ であるとして説明を行うこととする．なお，一般の直積の場合にも簡単に拡張可能であることを注意しておく．

3.1　SOCCP の再定式化

まず，準備のために二次錐に関連するユークリッド的ジョルダン代数を簡単に紹介しておこう．二次錐に関連するユークリッド的ジョルダン代数では二つのベクトル $x = (x_1, \bar{x}), y = (y_1, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{1+n}$ のジョルダン積を

$$x \cdot y = (x^\top y,\ y_1 \bar{x} + x_1 \bar{y}) \in \mathbb{R}^{1+n}$$

によって定義する．$n = 0$ のときは，$\bar{x}, \bar{y}$ は存在しないため，通常のスカラー積に自然に帰着される．また，以降では $x^2 = x \cdot x$ と表すこととする．二次錐に関連するユークリッド的ジョルダン代数では以下のような分解（スペクトル分解と呼ばれる）を考えることが多い：

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \quad \lambda_i = x_1 + (-1)^i \|x_2\|,$$

$$v_i = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1, (-1)^i \dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right) & \text{if } \bar{x} \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(1, (-1)^i \hat{x}\right) & \text{if } \bar{x} = 0. \end{cases}$$

ここで，$i = 1, 2$ であり，$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ は $\|\hat{x}\| = 1$ を満たす任意のベクトルである．簡単にわかる事項として，$\lambda_1 \leq \lambda_2$ であり，$\lambda_1 \geq 0 \iff x \in \mathcal{K}^{1+n}$ が成り立つ．さらに，$x^2 = \lambda_1^2 v_1 + \lambda_2^2 v_2$ と表すことが可能であったり，$^\forall x \in \mathcal{K}^{1+n}$ に対して，

$$x^{1/2} = \lambda_1^{1/2} v_1 + \lambda_2^{1/2} v_2$$

を定義すると，$x = x^{1/2} \cdot x^{1/2}$ などの性質を得ることができる．

SOCCP では，$x \in \mathcal{K}^n$, $y \in \mathcal{K}^n, x^\top y = 0$ の部分をどのように扱うかがキーポイントとなるが，通常は以下のような性質をもつ関数 $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を利用する：

$$\phi(x,y) = 0 \iff x \in \mathcal{K}^n,\ y \in \mathcal{K}^n,\ x^\top y = 0. \tag{17}$$

このような関数が存在するならば，(16) を解くためには非線形方程式系

$$\begin{pmatrix} \phi(x,y) \\ H(x,y,\eta) \end{pmatrix} = 0 \tag{18}$$

を解けばよいことになる．(17) を満たす関数 ϕ として Fischer–Burmeister (FB) 関数や自然残差 (NR, Natural Residual) 関数などがよく知られており，それぞれ，

$$\phi^{FB}(x,y) := x + y - (x^2 + y^2)^{1/2},$$
$$\phi^{NR}(x,y) := x - [x-y]_+$$

で与えられる．ただし，$[x]_+$ は x の二次錐への射影であり，先ほどの分解を用いると $[x]_+ = \max\{\lambda_1, 0\} v_1 + \max\{\lambda_2, 0\} v_2$ で与えられる．FB 関数，NR 関数ともに，$n = 0$ のときは，(17) を満たすことは簡単に確認できる．$n \geq 1$ のときは自明ではないため，たとえば文献 [11] を参照されたい．

これらの関数を用いれば，SOCCP は非線形方程式系 (18) を解けばよいことになるが，FB 関数や NR 関数は平方根や max 関数などを含むため，微分不可能であり[2]，ニュートン法などのよく知られた方法をそのまま適用することはできない．この問題を克服するために，いくつかの方法が考えられるが，ここでは平滑化法を紹介する．一般に，fを微分不可能な関数としたときに

- 任意の x に対して，$\lim_{t \to 0} f_t(x) = f(x)$
- $t > 0$ のとき，f_t は微分可能

を満たす関数 f_t を f の平滑化関数と呼ぶ．FB 関数と NR 関数の平滑化関数は

$$\psi^{FB}(t,x,y) = x + y - (x^2 + y^2 + 2t^2 e)^{1/2}$$
$$\psi^{NR}(t,x,y) = \frac{1}{2}\left\{x + y - \left((x-y)^2 + 2t^2 e\right)^{1/2}\right\}$$

で与えられる．ただし，$e = (1, 0, \ldots, 0)^\top$ である．平滑化法では，t をパラメータとして 0 に近づけながら方程式を解く方法と，t を変数とみなして方程式を解く方法の二通りが考えられる．Narushima et al. [3] は，後者のアルゴリズムの一つとして FB 関数を用いた平滑化ニュートン法を提案している．あらためて，解くべき関数を定義すると，

$$\Psi(s) := \begin{pmatrix} t \\ \psi^{FB}(t,x,y) \\ H(x,y,\eta) \end{pmatrix} = 0 \tag{19}$$

となる．ただし，$s = (t, x, y, \eta)$ とする．いま，$s^* = (t^*, x^*, y^*, \eta^*)$ を (19) の解とすると，$t^* = 0$ となるので，(x^*, y^*, η^*) は (18) の解，つまり，元の問題 (16) の解となる．

ここで，問題 (19) に対するニュートン法を考えるわけだが，(19) に直接ニュートン法を適用すると t だけが先に 0 に収束したり，t が負になってしまう可能性がある．よって，$\Psi(s) = 0$ の代わりに，

$$\Psi(s) = \beta(s)\bar{s} \tag{20}$$

を解くことを考える．ここで，任意の正の定数 $\bar{t} > 0$ に対し，$\bar{s} = (\bar{t}, 0, 0, 0)$ であり，

$$\beta(s) = \gamma \min\{1, \theta(s)\}$$

とする．さらに，$\gamma \in (0,1)$ は $\gamma\bar{t} < 1$ を満たすパラメータで，$\theta(s)$ は $\Psi(s)$ のメリット関数，つまり，

$$\theta(x) = \|\Psi(x)\|^2$$

である．このとき，(19) と (20) が同値となることを注意しておく．以上のことから，(20) を解くためのニュートン法として以下ようなアルゴリズムを考えることができる．

アルゴリズム 1.

Step 0. 定数 $\bar{t} > 0$, $\rho \in (0,1)$, $\sigma \in (0, 1/2)$ を選び，初期点 $s_0 := (\bar{t}, x_0, y_0, \eta_0)$ を与える．$k := 0$ として Step 1 へ．

Step 1. 終了判定条件を満たしていれば s_k を解としてアルゴリズムを停止する．

Step 2. 次の方程式系を d_k について解く：

$$\Psi(s_k) + \nabla\Psi(s_k)^\top d_k = \beta(s_k)\bar{s}.$$

Step 3. 次の不等式を満たす最小の非負整数 i を求め，$\alpha_k = \rho^i$ とする：

[2] 一般的に (17) を満たす関数は微分不可能となることが知られている．

$$\theta(s_k + \rho^i d_k) \leq \left(1 - 2\sigma(1-\gamma\bar{t})\rho^i\right)\theta(s_k).$$

Step 4. $s_{k+1} := s_k + \alpha_k d_k$ により点列を更新し，$k := k+1$ として Step 1 へ戻る．

Step 3 の直線探索ではメリット関数 θ の値が単調に減少するような条件を課している．一方，k 回目の反復におけるパラメータ t の値を t_k と表記すると，

$$t_k \geq \bar{t}\beta(s_k)$$

が保証される．よって，$t_k = 0$ となるのは $\beta(s_k) = 0$，つまり，s_k が (19) の解であるときのみで，それ以外の場合は，$t_k > 0$ が保証される．そのほか，上記のアルゴリズムは適当な仮定の下，収束性が証明されているが，詳細は文献 [3] を参照されたい．

4. おわりに

1 節でも述べたが，2 節の内容と 3 節の内容は数理モデルとその解法という関係でつながっている．ロバスト SCNE モデルで各意思決定主体が考える元々の（不確実性を考慮する前の）問題自体はシンプルで，不確実性の扱い方もロバスト最適化の中でもベーシックな手法である．そのような中で，筆者の考えるロバスト SCNE モデルの意義の一つは実際に（数値的にではあるが）解くことが可能なモデルであるということである．一方，SOCCP に対する数値解法アルゴリズムは 2000 年ごろから研究が盛んになり，一般に公開されたソフトウェアが登場するのは（筆者の知る限り）2013 年である [12]．もし，SOCCP の研究の発展がなければ，ロバスト SCNE モデルの価値は半減するだろう．逆もしかりで，数理モデルの発展により解くための需要が生まれる．このように，数理モデルとアルゴリズムの発展は表裏一体であり，その両方を研究する身としては，相互発展的に双方に貢献していきたいと考えている．最後に，拙稿に最後までお付き合いいただいた読者に感謝して結びとさせていただきたい．

謝辞　本稿執筆の機会をいただいた，オーガナイザーの枇々木先生と機関誌編集委員会の皆様に感謝いたします．また，本稿で紹介した研究の一部は科研費基盤研究 (C)18K11179 の援助を受けて行われている．

参考文献

[1] Y. Narushima, H. Yabe and J. A. Ford, “A three-term conjugate gradient method with sufficient descent property for unconstrained optimization,” *SIAM Journal on Optimization*, **21**, pp. 212–230, 2011.

[2] Y. Narushima, H. Ogasawara and S. Hayashi, “A smoothing method with appropriate parameter control based on Fischer-Burmeister function for second-order cone complementarity problems,” *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID 830698, 2013.

[3] Y. Narushima, N. Sagara and H. Ogasawara, “A smoothing Newton method with Fischer-Burmeister function for second-order cone complementarity problems,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, **149**, pp. 79–101, 2011.

[4] S. Nakayama, Y. Narushima and H. Yabe, “Inexact proximal memoryless quasi-Newton methods based on the Broyden family for minimizing composite functions,” *Computational Optimization and Applications*, to appear.

[5] T. Hirano and Y. Narushima, “Robust supply chain network equilibrium model,” *Transportation Science*, **53**, pp. 1196–1212, 2019.

[6] Y. Narushima and T. Hirano, “Some robust supply chain network equilibrium models,” In *Proceedings of International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis–International Conference on Optimization: Techniques and Applications (NACA-ICOTA2019)*, to appear.

[7] A. Nagurney, J. Dong and D. Zhang, “A supply chain network equilibrium model,” *Transportation Research Part E*, **38**, pp. 281–303, 2002.

[8] J. Dong, D. Zhang and A. Nagurney, “A supply chain network equilibrium model with random demands,” *European Journal of Operational Research*, **156**, pp. 194–212, 2004.

[9] 山田忠史，今井康治，谷口栄一，“物流業者の行動を考慮したサプライチェーンネットワーク均衡分析，” 土木学会論文集 D, **65**, pp. 163–174, 2009.

[10] J-. S. Chen and S. Pan, “A survey on SOC complementarity functions and solution methods for SOCPS and SOCCPS,” *Pacific Journal of Optimization*, **8**, pp. 33–74, 2012.

[11] M. Fukushima, Z. Q. Luo and P. Tseng, “Smoothing functions for second-order-cone complementarity problems,” *SIAM Journal on Optimization*, **12**, pp. 436–460, 2001.

[12] S. Hayashi, “Manual of ReSNA,” Technical report in Website of ReSNA, 2013. http://optima.ws.hosei.ac.jp/hayashi/ReSNA/（2020 年 10 月 29 日閲覧）

[13] 林俊介，“ReSNA の手引き，” オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**59**, pp. 716–724, 2014.

[14] S. Hayashi, N. Yamashita and M. Fukushima, “A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems,” *SIAM Journal on Optimization*, **15**, pp. 593–615, 2005.

[15] A. Ben-Tal, L. E. Ghaoui and A. Nemirovski, *Robust Optimization*, Princeton University Press, UK, 2009.

[16] 福島雅夫，『非線形最適化の基礎』，朝倉書店，2001.

[17] A. Nagurney, *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Publishers, London, 1993.

