オプション価格式を用いたコーポレートファイナンス理論モデル

芝田　隆志

コーポレートファイナンスにおける中心的な研究課題の一つは，企業の投資行動と資金調達との間の相互作用である．本稿では，金融工学のオプション価格式を用いて，その相互作用に関する理論モデルを紹介する．

キーワード：オプション理論，資本構成，負債構成，流動化，投資行動と資金調達

1. はじめに

コーポレートファイナンスにおける中心的な研究課題の一つは，企業の投資行動と資金調達との間の相互作用である．本稿では，金融工学のオプション価格式を用いて，その相互作用に関する理論モデル[1]を紹介する．

ある財・サービス市場において，ある企業がその財・サービスの供給を考えていると仮定しよう．このとき，財・サービスの供給から得られるキャッシュフローが不確実に変化する場合，企業は，その供給をどのタイミングで開始するか，その供給のための投資（資本設備）額をいくらにするか，その資金を金融資本市場からどのように調達するか，その供給を開始した後にどのタイミングでその供給を停止するか，などの企業の経営活動に関する最適戦略を導出する．特に，このような企業の経営活動に関する理論モデル分析を通じて，企業の投資行動と資金調達との間の相互作用について考察する．

2. モデル

2.1 モデル設定

ある財・サービス市場において，ある企業は，その財・サービスの供給を開始する投資（操業）オプションをもつと仮定しよう．その企業はリスク中立的であり，リスク中立な割引率を $r>0$ と仮定する．

投資（操業）を実行する時刻 T^{i} において[2]，企業は，投資（資本設備）額 $I(q)>0$ を投下すると，投資した後の任意の時刻 $t \geq T^{\mathrm{i}}$ において，企業は（税引き前）キャッシュ・インフロー $qX(t)$ を（時間に関して連続的に）獲得する．ここで，$q>0$ は投資量を表し，$X(t)$ は価格を表し，確率微分方程式

$$\mathrm{d}X(t) = \mu X(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}z(t)$$

に従うと仮定する．ただし，$\mu>0$ と $\sigma>0$ は定数，$z(t)$ を標準ブラウン運動とする．また，$r>\mu$ とし[3]，現時刻 $t=0$ での価格 $X(0)=x>0$ は，十分に小さいと仮定する．

企業の投資額 $I(q)$ は，投資量 q に関して増加関数と仮定する．この条件は，投資量 q の増加が，投資時刻における投資額 $I(q)$ の増加をもたらすことを意味する．他方，投資量 q の増加は，投資後のキャッシュ・インフロー $qX(t)$ を増加させる．すなわち，投資量 q の増加は，費用と収入の両方を増加させるトレード・オフ関係となっている．さらに本モデルでは，最適な投資量 q^* を内生的に一意に導出[4]するため，投資額 $I(q)$ は，

$$I(0)>0, I'(q)>0, I''(q)>0, \left(\frac{qI'(q)}{I(q)}\right)'>0$$

の四つの条件を満たすと仮定する．

また，投資時刻 T^{i} において，投資額 $I(q)>0$ を賄うために，企業は負債を発行できると仮定する．もし企業は負債を発行するならば，負債発行後，企業はクーポン $c \geq 0$ を負債債権者に（時間に関して連続的に）支払うことになり，投資（操業）後における企業のキャッシュ・アウトフローは $c \geq 0$ となる．本モデ

しばた　たかし
東京都立大学大学院経営学研究科
〒 192–0397 東京都八王子南大沢 1–1
tshibata@tmu.ac.jp

[1] オプション価格式を適用した先駆的な研究としては，Merton [1] と Black and Cox [2] があげられる．

[2] 数学的には，投資時刻は $T^{\mathrm{i}} := \inf\{t \geq 0, x^{\mathrm{i}} \geq X(t)\}$ と定義される．ただし，$x^{\mathrm{i}}>0$ は投資臨界値を表し，上添え字 “i” は投資 (investment) 戦略を表す．

[3] 条件 $r>\mu$ については，Dixit and Pindyck [3] を参照されたい．

[4] 本稿では，最適解には上添え字 “$*$” をつけて表記する．

ルでは，議論を単純化するために，負債の満期は無限（コンソル債）と仮定する．この条件の下では，負債の額面は $c/r \geq 0$ となる．

本モデルでは，投資後，企業は流動化（操業停止）オプションをもつと仮定する．また，もし企業が流動化されるとき，企業は投資額のある割合 $kI(q)$ $(k \in [0,1])$ を獲得できるが，そのうちの $\alpha kI(q) \geq 0$ $(\alpha \in (0,1))$ を流動化費用として支払わなければならないと仮定する．すなわち，企業の残余価値は，その費用を控除し，$(1-\alpha)kI(q) \geq 0$ となる．

負債の額面を c/r，残余価値を $(1-\alpha)kI(q)$ と定義したので，不等式

$$\frac{c}{r} \leq (1-\alpha)kI(q) \tag{1}$$

を定義する．もし不等式 (1) が成立するならば，負債にはリスクがなく，そうでなければ，負債はリスクを伴う（負債減免が生じうる）ことになる．

本モデルでは，投資後における負債と株式の価値関数を，$D(X(t),c,q)$ と $E(X(t),c,q)$ とそれぞれ表記する．ただし，関数 $g \in \{D,E\}$ は，

$$g(x,c,q) := \begin{cases} g_0(x,c,q), & c \in [0,\theta_0(q)] \\ g_1(x,c,q), & c \in (\theta_0(q),+\infty) \end{cases} \tag{2}$$

$$\theta_0(q) := r(1-\alpha)kI(q) \geq 0 \tag{3}$$

と定義される．式 (2) は，負債がリスクを伴うか否かにより，価値関数がそれぞれ異なることを意味する．なぜならば，負債がリスクを伴うか否かにより，企業の最適な流動化戦略が異なるからである．下添え字 “0” はリスクのない負債，下添え字 “1” はリスクのある負債を発行する場合を表す．式 (3) は，負債がリスクを伴うか否かを判別する閾値を表す．さらに，企業の流動化価値は，

$$\begin{cases} (1-\alpha)kI(q) - \dfrac{c}{r}, & c \in [0,\theta_0(q)] \\ (1-\alpha)kI(q), & c \in (\theta_0(q),+\infty) \end{cases} \tag{4}$$

となる．

2.2 無リスクの負債を発行する場合

本節では，負債にはリスクがない，数学的には $c \in [0,\theta_0(q)]$ を仮定する．このとき，不等式 (1) が成立するため，企業には倒産（負債減免）が生じないことに注意されたい．

図 1 では，横軸に時刻 $t \geq 0$，縦軸に価格 $X(t)$ の実現値をとり，企業がリスクのない負債を発行した場合の経営活動に関するシナリオを描写する．現時刻 $t=0$ かつ価格 $X(0)=x>0$ の下では，$x<x^{\mathrm{i}}$ となるため，

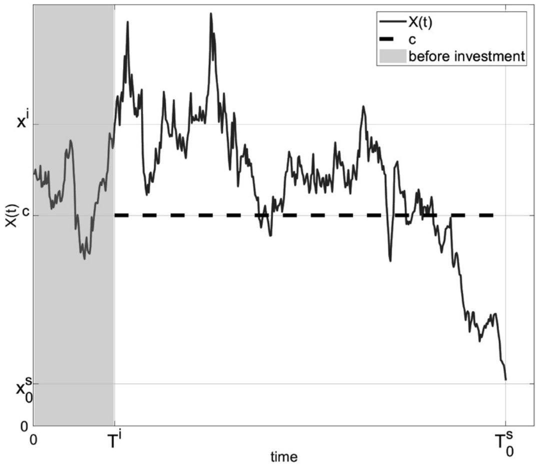


図 1　リスクのない負債発行した場合のシナリオ

企業は投資を実行していない．もし価格 $X(t)$ が $x>0$ から上昇して投資臨界値 x^{i} に達するならば，企業は額面 c/r の負債を発行し，資本設備として投資額 $I(q)$ を投下し，投資を実行（操業を開始）する．投資をした後の任意の時刻 $t \geq T^{\mathrm{i}}$ における（税引き後）キャッシュフローは，$(1-\tau)(qX(t)-c)$ となる．ただし，$\tau \in (0,1)$ は法人税率を表す．投資後，もし価格 $X(t)$ が高い水準を保つならば，企業は操業し続けることになる．しかしながら，もし価格 $X(t)$ が下落して流動化臨界値 x_0^{s} に達する[5]ならば，企業は流動化され（操業を停止し），流動化価値 $(1-\alpha)kI(q)-c/r \geq 0$ を獲得する．

図 1 にて描写されたシナリオについての価値関数を導出する．負債価値と株式価値は，任意の時刻 $t \geq T^{\mathrm{i}}$ において，

$$D_0(X(t),c,q) = \frac{c}{r} \tag{5}$$

$$E_0(X(t),c,q) = vqX(t) - (1-\tau)\frac{c}{r} + \left((1-\alpha)kI - vqx_0^{\mathrm{s}}(c,q) - \tau\frac{c}{r}\right)\left(\frac{X(t)}{x_0^{\mathrm{s}}(c,q)}\right)^{\gamma} \tag{6}$$

となり，最適な流動化臨界値は，

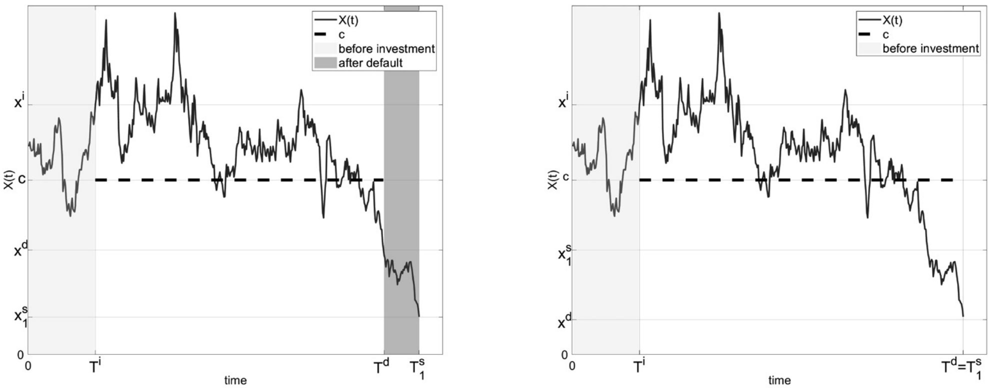
$$x_0^{\mathrm{s}}(c,q) = \varepsilon\left((1-\alpha)kI(q) - \frac{\tau}{r}c\right)q^{-1} \geq 0 \tag{7}$$

となる．ただし，式 (5)–(7) でのパラメータは，

$$v := \frac{1-\tau}{r-\mu} > 0 \tag{8}$$

$$\gamma := \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} - \left(\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}\right)^{1/2} < 0 \tag{9}$$

[5] 数学的には，$T_0^{\mathrm{s}} := \inf\{t \geq 0, x_0^{\mathrm{s}} \leq X(t)\}$ と定義される．ただし上添え字 “s” は，停止 (shutdown) 戦略を表す．



(a) 倒産と流動化が逐次となるケース　　(b) 倒産と流動化が同時となるケース

図 2　リスクのある負債を発行した場合の二つのシナリオ

$$\varepsilon := \frac{\gamma}{(\gamma-1)v} \geq 0 \tag{10}$$

である．

極端な場合として，クーポン水準を $c=0$ と仮定しよう．このとき，式 (5) で定義された負債価値は

$$D_0(X(t),0,q)=0$$

となり，企業は，負債をもたない企業[6]となり，投資額 $I(q)$ をすべて株式で調達することになる．

2.3　リスクのある負債を発行する場合

本節では，負債がリスクを伴う，数学的には $c \in (\theta_0(q),+\infty)$ を仮定する．このとき，不等式 (1) が成立しないため，企業には倒産（負債減免）の可能性が生じる．また，企業がリスクを伴う負債を発行した場合，二つのシナリオが考えられる．図 2(a) では $x^{\mathrm{d}} > x_1^{\mathrm{s}}$ のシナリオ，図 2(b) では $x^{\mathrm{d}} \leq x_1^{\mathrm{s}}$ のシナリオをそれぞれ描写する．ただし，x^{d} と x_1^{s} は，それぞれ倒産と流動化の臨界値[7]を表す．

図 2(a) では，図 1 と同様に，価格 $X(t)$ が $x>0$ から上昇して投資臨界値 x^{i} に達するときに投資が実行される．投資後，もし価格 $X(t)$ が下落するならば，企業はキャッシュ・インフロー $qX(t)$ からキャッシュ・アウトフロー c を支払うことが難しくなる．そこで，もし価格 $X(t)$ が下落して倒産臨界値 x^{d} に達するとき，企業（株主）は倒産オプションを行使することになる．このとき，株式価値がゼロとなり（株主は企業から退き），経営（所有）権が負債債権者に移転される．ここでは，$x^{\mathrm{d}} > x_1^{\mathrm{s}}$ を仮定しているため，倒産（経営権の移転）後，経営権を獲得した負債債権者は，新たな株主として，操業を継続する．倒産後，もし価格 $X(t)$ が流動化臨界値 x_1^{s} まで下落しなければ，企業は操業を継続することになる．しかしながら，もし価格 $X(t)$ が流動化臨界値 x_1^{s} まで下落するならば，企業は流動化される（操業を停止する）ことになる．図 2(a) における時刻 $t \in [T^{\mathrm{d}}, T_1^{\mathrm{s}}]$ では，倒産後の株主（倒産前の負債債権者）による経営活動となることを表している．

図 2(b) では，投資後，価格 $X(t)$ が流動化臨界値 x_1^{s} まで下落しても，流動化オプションは行使されない．なぜならば，倒産オプションが行使されて（価格 $X(t)$ が x^{d} まで下落して）いないため，負債債権者が経営権を保有していないからである．そして，もし価格 $X(t)$ がさらに下落して倒産臨界値 x^{d} まで下落するならば，株主は倒産オプションを行使し，経営権が負債債権者に移転されると同時に，負債債権者は流動化オプションを行使する．すなわち，図 2(b) においては，投資後，価格 $X(t)$ が下落して倒産臨界値 x^{d} に達するとき，倒産と流動化の二つのオプションが，同時に行使される．

図 2 にて描写されたシナリオについての価値関数を導出する．株式価値は，任意の時刻 $t \geq T^{\mathrm{i}}$ に対して，

$$E_1(X(t),c,q) = vqX(t) - (1-\tau)\frac{c}{r} + \Big((1-\tau)\frac{c}{r} - vqx^{\mathrm{d}}(c,q)\Big)\Big(\frac{X(t)}{x^{\mathrm{d}}(c,q)}\Big)^{\gamma} \tag{11}$$

となり，最適な倒産臨界値は，

$$x^{\mathrm{d}}(c,q) = \varepsilon\frac{1-\tau}{r}q^{-1}c \geq 0 \tag{12}$$

となる．式 (12) は，Black and Cox [2] によって導出

[6] 株式価値と流動化臨界値は，それぞれ $E_0(X(t),0,q)$ と $x_0^{\mathrm{s}}(0,q)$ となる．

[7] 数学的には，$T^{\mathrm{d}} := \inf\{t \geq T^{\mathrm{i}}, x^{\mathrm{d}} \leq X(t)\}$，$T_1^{\mathrm{s}} := \inf\{t \geq T^{\mathrm{d}}, \min\{x^{\mathrm{d}}, x_1^{\mathrm{s}}\} \leq X(t)\}$ と定義され，上添え字 “d” は，倒産 (default) 戦略を表す．

表 1　倒産・流動化戦略とクーポン水準との関係

<table>
<tr><td>資金調達</td><td>株式のみによる調達</td><td colspan="3">株式と負債による調達</td></tr>
<tr><td>負債</td><td>ゼロ</td><td>リスクなし</td><td colspan="2">リスクあり</td></tr>
<tr><td>クーポン</td><td>$c = 0$</td><td>$c \in (0, \theta_0(q)]$</td><td>$c \in (\theta_0(q), \theta_1(q)]$
$\iff x^{\mathrm{d}}(c, q) \leq x_1^{\mathrm{s}}(q)$</td><td>$c \in (\theta_1(q), +\infty)$
$\iff x^{\mathrm{d}}(c, q) > x_1^{\mathrm{s}}(q)$</td></tr>
<tr><td>倒産臨界値</td><td colspan="2">–</td><td rowspan="2">$x^{\mathrm{d}}(c, q)$</td><td>$x^{\mathrm{d}}(c, q)$</td></tr>
<tr><td>流動化臨界値</td><td>$x_0^{\mathrm{s}}(0, q)$</td><td>$x_0^{\mathrm{s}}(c, q)$</td><td>$x_1^{\mathrm{s}}(q)$</td></tr>
<tr><td>戦略</td><td colspan="2">流動化のみを実行</td><td>倒産と流動化を同時実行</td><td>倒産と流動化を逐次実行</td></tr>
</table>

されたものであり，その重要な性質とは，倒産臨界値がクーポン c に関して線型関数となることである．負債価値は，任意の時刻 $t \geq T^{\mathrm{i}}$ において，

$$D_1(X(t), c) \\ := \frac{c}{r} - \Big(\frac{c}{r} - W(x^{\mathrm{d}}(c, q))\Big)\Big(\frac{X(t)}{x^{\mathrm{d}}(c, q)}\Big)^{\gamma} \tag{13}$$

となる．ここで，$W(X(t))$ は倒産後の株式価値であり，$W(X(t))$ は，任意の時刻 $t \in [T^{\mathrm{d}}, T_1^{\mathrm{s}}]$ に対して，

$$W(X(t))/(1-\alpha) \\ := \begin{cases} kI(q), & c \in (\theta_0(q), \theta_1(q)] \\ vqX(t) + \big(kI(q) - vqx_1^{\mathrm{s}}(q)\big)\Big(\dfrac{X(t)}{x_1^{\mathrm{s}}(q)}\Big)^{\gamma}, & \\ & c \in (\theta_1(q), +\infty) \end{cases} \tag{14}$$

$$x_1^{\mathrm{s}}(q) = \varepsilon k \frac{I(q)}{q} \geq 0 \tag{15}$$

$$\theta_1(q) := \frac{r}{1-\tau} kI(q) \geq 0 \tag{16}$$

となる．ここで，式 (16) は，企業の倒産・流動化戦略が，逐次か同時かのいずれかになるかを判別する閾値を表す．たとえば，もし $c > \theta_1(q)$ ならば，企業の倒産・流動化戦略は，逐次的に実行されることになる．また，$1-\alpha < 1 < 1/(1-\tau)$ が成立するため，$\theta_1(q) > \theta_0(q)$ となる事に注意されたい．

2.4　クーポン水準と価値関数との関係

本節では，2.2 節と 2.3 節にて導出された企業の倒産・流動化戦略と，クーポン水準との関係について整理する．

表 1 は，投資後の倒産・流動化戦略とクーポン水準との関係を纏めたものである．一方，$c \in [0, \theta_0(q)]$ の場合には，不等式 (1) が成立するため，企業は倒産戦略を考える必要がない．すなわち，企業は流動化の一つの戦略を考えればよい．

他方，$c \in (\theta_0(q), +\infty)$ の場合には，企業は倒産と流動化の二つの戦略を考えなければならない．さらに，$c \in (\theta_0(q), \theta_1(q)]$ の場合には，企業は二つの戦略を同時に実行し，$c \in (\theta_1(q), +\infty)$ の場合には，企業は二つの戦略をそれぞれ逐次的に実行することになる．

3.　モデルにおける最適戦略

本節では，投資前の価値関数を定義し，企業の最適な投資臨界値[8] $x^{\mathrm{i}*}$，負債クーポン水準[9] c^*，投資量 q^* の導出とその特徴について考察する．

数値計算では，投資額 $I(q)$ は，

$$I(q) = F + q^2 \tag{17}$$

とし，パラメータは

$$\begin{aligned} r &= 7\%, \quad \sigma = 15\%, \quad \mu = 1\%, \\ \tau &= 15\%, \quad \alpha = 40\%, \quad F = 10 \end{aligned} \tag{18}$$

と仮定する．

3.1　問題の定式化

本節では，投資前の価値関数を導出し，企業の最適化問題を定式化する．

投資前の価値関数は，

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rT^{\mathrm{i}}}\{V(x^{\mathrm{i}}, c, q) - I(q)\}] \\ = \Big(\frac{x}{x^{\mathrm{i}}}\Big)^{\beta}\{V(x^{\mathrm{i}}, c, q) - I(q)\} \tag{19}$$

となる．ただし，

$$\beta := \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \bigg(\Big(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}\bigg)^{1/2} > 1 \tag{20}$$

$$V(x^{\mathrm{i}}, c, q) := D(x^{\mathrm{i}}, c, q) + E(x^{\mathrm{i}}, c, q) \tag{21}$$

である．

式 (19) から，企業の投資行動と資金調達に関する意思決定問題は，

[8] 本モデルでは，投資臨界値の水準についての決定は，企業がどのタイミングで投資を実行するのかという意思決定に対応する．この内容に関する先駆的論文は，McDonald and Siegel [4] である．

[9] 本モデルでは，負債クーポン水準の決定は，企業が負債をいくら発行するかという意思決定に対応する．この内容に関する先駆的論文は，Leland [5] である．

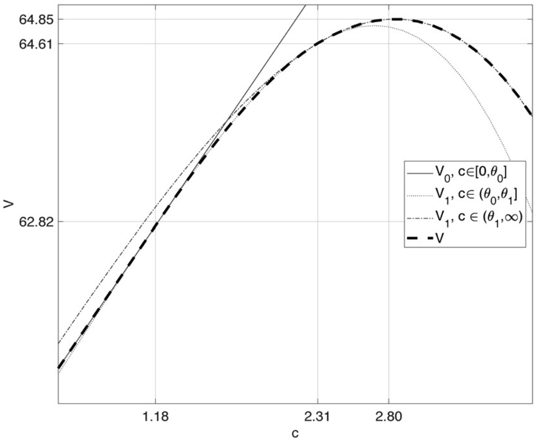


図 3　企業の負債構成と資本構成

$$\max_{x^{\mathrm{i}},c,q} x^{\mathrm{i}-\beta}\{V(x^{\mathrm{i}},c,q)-I(q)\} \tag{22}$$

と定式化される．

3.2　最適解の特徴

本節では，最適解に関する二つの重要な特徴について考察する．

第 1 に，x^{i} と q を固定して，最適なクーポン水準 c^* に関する特徴について考える．式 (22) において，関数 $V(x,c,q)$ のみが c に依存することを確認されたい．数値例として，式 (18) の六つのパラメータ，$k=0.8$, $x^{\mathrm{i}}=0.85$, $q=5$ を仮定する．これらのパラメータの下では，$\theta_0(q)=1.18$ と $\theta_1(q)=2.31$ が得られるため，価値 V は，

$$V(x,c,q)=\begin{cases} V_0(x,c,q), & c\in[0,1.18] \\ V_1(x,c,q), & c>0.18 \end{cases} \tag{23}$$

となる．図 3 は V と c の関係を描写する．このとき，図 3 から得られる重要な性質とは，

$$\begin{cases} V_0(x,c,q)\ \text{は}\ c\ \text{に関して線形関数} \\ V_1(x,c,q)\ \text{は}\ c\ \text{に関して凹関数} \end{cases} \tag{24}$$

となり，

$$V_0(x,\theta_0(q),q)=\lim_{c\downarrow\theta_0(q)} V_1(x,c,q)>0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial V_0(x,\theta_0(q),q)}{\partial c}=\lim_{c\downarrow\theta_0(q)}\frac{\partial V_1(x,c,q)}{\partial c}>0 \tag{26}$$

が成立することである．ここで，式 (23)–(26) の性質より，不等式 $c^*>\theta_0(q)$ が成立する．図 3 では，$c^*=2.80>\theta_0(q)=1.18$ が得られる．この不等式は，企業は最適戦略として，リスクを伴う負債を発行することを示唆する．換言すると，企業は最適戦略として，リスクのない負債を発行しないことを意味している．

表 2　最適戦略

投資臨界値 $x^{\mathrm{i}*}$	0.8922
倒産臨界値 $x^{\mathrm{d}*}$	0.3614
流動化臨界値 $x_1^{\mathrm{s}*}$	0.2486
投資額 $I(q^*)$	56.2063
負債額面 c^*/r	58.0540
負債の市場価値 D^*	54.0621
レバレッジ D^*/V^* (%)	58.5486
スプレッド cs^* (bp)	51.6883

第 2 に，最適な投資量 q^* の特徴について考える．式 (22) を，x^{i}, c, q に関してそれぞれ偏微分して，導出される最大化の一階条件となる三つの式を整理すると

$$\frac{qI'(q)}{I(q)}=\frac{\beta}{\beta-1} \tag{27}$$

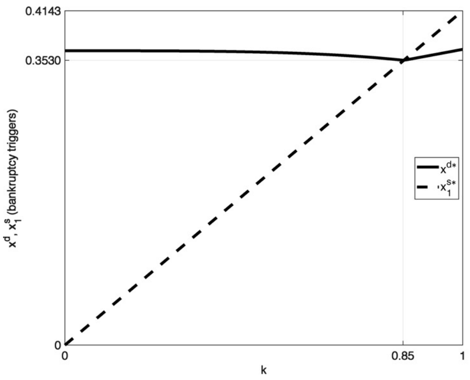
が得られる[10]．すなわち，最適な投資量 q^* は，式 (27) を満たすように決定される．式 (27) は，パラメータ k には依存しないため，最適な投資量 q^* および投資額 $I(q^*)$ は，パラメータ k には依存しないことを意味する．

3.3　最適解

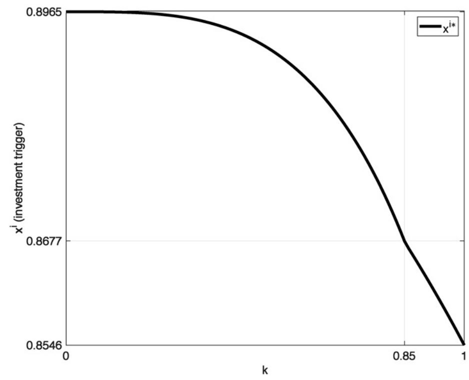
本節では，数値計算を用いて，最適解 $x^{\mathrm{i}*}$, c^*, q^* を導出し，本モデルが提示する最適な経営活動のシナリオについて考察する．数値計算では，式 (18) の六つのパラメータ，$k=0.5$, $x=0.2$ を仮定する．

表 2 は，本モデルにおける最適解を表す．このとき，$x^{\mathrm{d}*}:=x^{\mathrm{d}}(c^*,q^*)>x_1^{\mathrm{s}*}:=x_1^{\mathrm{s}}(q^*)$ が成立するため，企業の経営活動は，図 2(a) にて描写されるシナリオとなる[11]．もし価格 $X(t)$ が $x=0.2$ から上昇して $x^{\mathrm{i}*}=0.8922$ に達するならば，企業は投資オプションを行使する．投資時刻 T^{i} では，企業は，額面 $c^*/r=58.0540$ かつ市場価格 $D^*:=D(x^{\mathrm{i}*},c^*,q^*)=54.0621$ となる負債を発行し，投資額 $I(q^*)=56.2063$ を投下する．また，投資時刻 T^{i} では，企業のレバレッジ D^*/V^* は[12]58%, 負債のクレジットスプレッド $cs^*:=c^*/D^*-r$ は 51bp (basis point) となる．投資後，もし価格 $X(t)$ が $x^{\mathrm{d}*}=0.3614$ まで下落しなければ，企業（株主）は倒産オプションを行使せず，株主は経営活動を継続し続けることとなる．しかしながら，もし価格 $X(t)$ が $x^{\mathrm{d}*}=0.3614$ まで下落するならば，株主は倒産オプションを行使し，このとき経営権が負債債権者に移行

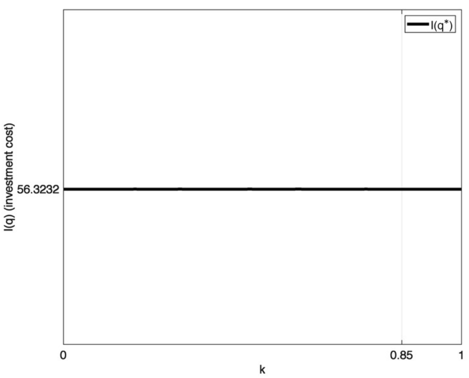
[10]詳細は，Shibata and Nishihara [6] を参照されたい．
[11]数値計算では，$c^*=4.06>\theta_0=1.18$ となる．
[12]同様に，$V^*:=V(x^{\mathrm{i}*},c^*,q^*)$ と表記する．



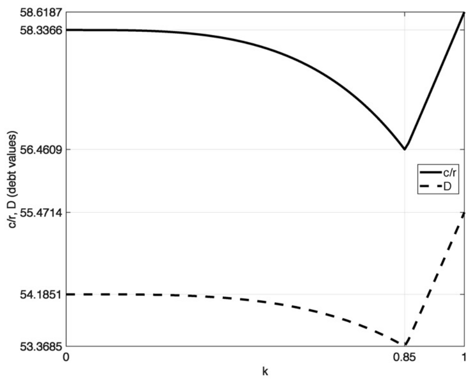
(a) 倒産臨界値と流動化臨界値



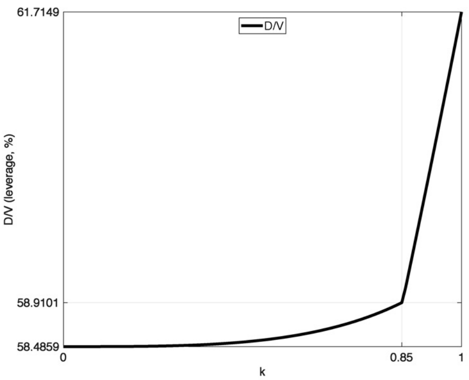
(b) 投資臨界値



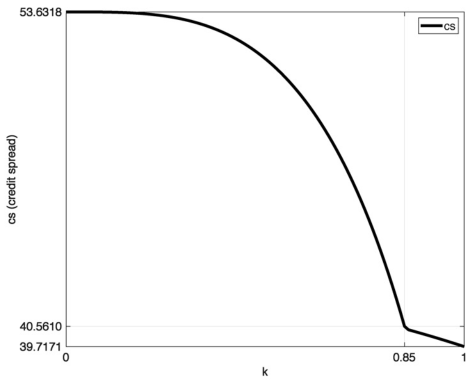
(c) 投資額



(d) 負債の額面と市場価値



(e) レバレッジ



(f) クレジットスプレッド

図 4　担保価値に関する比較静学

される．倒産後，負債債権者は新たな株主となり，負債をもたない企業として，経営活動を継続する．もし価格 $X(t)$ がさらに下落して流動化臨界値 $x_1^{s*}=0.2486$ まで下落するならば，企業は流動化されることになる．

3.4　比較静学

本節では，企業の最適な経営戦略が，担保価値（パラメータ $k\in[0,1]$）に対して，どのように変化するかについて考察する．もし $k>0$ ならば，流動化価値は正の値 $(1-\alpha)kI(q)>0$ となり，k が大きくなるにつれて流動化価値も増加する[13]．それゆえ，パラメータ k は，企業が負債債権者に差し出す担保額の大きさを表す．

図 4 は，企業の担保価値の変化に対する最適戦略へ

[13] ただし，$k=0$ ならば，流動化価値がゼロとなり，企業は流動化オプションをもたない．

の影響を表す．図 4(a) では，倒産臨界値 $x^{\mathrm{d}*}$ と流動化臨界値 $x_1^{\mathrm{s}*}$ を描写する．もし $k \in [0, 0.85)$ ならば，$x^{\mathrm{d}*} > x_1^{\mathrm{s}*}$ となり，企業は倒産と流動化の二つのオプションをそれぞれ逐次的に行使する．そうでないならば ($k \in [0.85, 1]$), $x^{\mathrm{d}*} \leq x_1^{\mathrm{s}*}$ となり，企業は倒産と流動化の二つのオプションを同時に行使する．また，$k \in [0, 0.85)$ のとき，担保価値が増加するにつれ，企業は倒産のタイミングを遅める（臨界値は減少する）．他方，$k \in [0.85, 1]$ のとき，担保価値が増加するにつれ，企業は倒産のタイミングを早める（臨界値は増加する）．なお，図 4(c) を除く五つの図では，それぞれの曲線が $k = 0.85$ にて屈折する．その理由は，倒産・流動化戦略が，$k < 0.85$ では逐次戦略となり，$k \geq 0.85$ では同時戦略となるからである．すなわち，企業の倒産・流動化戦略は，投資臨界値や負債発行額に影響を及ぼすことを意味している．

図 4(b) は，投資臨界値 $x^{\mathrm{i}*}$ を描写する．担保価値が増加するにつれ，企業は投資のタイミングを早める（投資臨界値は減少する）．図 4(c) では，投資額 $I(q^*)$ が担保価値の増加に対して不変となることを表している（3.2 節における最適解の第 2 の性質）．

図 4(d) では，負債の額面 c^*/r と市場価値 D^* を描写する．ここで，二つの重要な特徴について考察する．第 1 に，額面 c^*/r は市場価値 D^* を常に上回る．なぜならば，企業はリスクのある負債を常に発行するからである（3.2 節における最適解の第 1 の性質）．第 2 に，$k \in [0, 0.85)$ のとき，負債の額面と市場価値は，いずれも担保価値に関して減少する．そうでないとき ($k \in [0.85, 1]$)，負債の額面と市場価値は，いずれも担保価値に関して増加する．なお，$k \in [0, 0.85)$ ($k \in [0.85, 1]$) のとき，負債が k に対して減少（増加）関数となる性質は，倒産臨界値（図 4(a)）が k に対して減少（増加）関数となる性質と同一である．

投資行動と資金調達との間の相互作用について考察するため，図 4(b) と図 4(d) の二つの図を考えよう．もし $k \in [0, 0.85)$ ならば，担保価値が大きくなると，投資タイミングは早まり，負債発行額も小さくなる．そうでないならば ($k \in [0.85, 1]$)，担保価値が大きくなると，投資タイミングは早まり，負債発行額は大きくなる．このように，企業の投資行動と資金調達との間の相互依存関係は，担保価値の大きさに応じて，異なることを示唆している．

図 4(e) では，担保価値の増加に対して，企業のレバレッジ D^*/V^* は増加することを表している．図 4(f) では，担保価値が増加するにつれ，クレジットスプレッド cs^* は下落することを意味する．

4. おわりに

Modigliani and Miller [7] は，完全競争市場の仮定の下では，企業の投資行動と資金調達とは，無関係となることを証明した．この命題は，MM の定理と呼ばれ，企業の投資行動と資金調達との間の相互作用に関する研究の出発点となっている．しかしながら，実務では，完全競争市場の条件は成立しない．そのため，MM の研究から始まった相互作用についての研究は，さまざまなアプローチで行われている．

本稿では，金融工学のオプション理論を用いて，企業の投資行動と資金調達との間の相互作用に関する理論モデルについて紹介した．

謝辞 本研究は，JSPS 科研費 JP16KK0083, JP17H02547，石井記念証券振興財団，東京都立大学金融工学研究センターからの助成を受けている．

参考文献

[1] R. C. Merton, “On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates,” *Journal of Finance*, **29**, pp. 449–470, 1974.

[2] F. Black and J. C. Cox, “Valuing corporate securities: Some effects of bond indentre provisions,” *Journal of Finance*, **31**, pp. 351–367, 1976.

[3] A. K. Dixit and R. S. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.

[4] R. McDonald and D. R. Siegel, “The value of waiting to invest,” *Quarterly Journal of Economics* **101**, pp. 707–727, 1986.

[5] H. E. Leland, “Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure,” *Journal of Finance*, **49**, pp. 1213–1252, 1994.

[6] T. Shibata and M. Nishihara, “Investment timing, reversibility, and financing constraints,” *Journal of Corporate Finance*, **48**, pp. 771–796, 2018.

[7] F. Modigliani and M. H. Miller, “The cost of capital, corporate finance and the theory of investment,” *American Economic Review*, **48**, pp. 261–297.