

接合関数を用いた誤方向リスクのモデリング

安達 哲也, 末重 拓己, 吉羽 要直

金融デリバティブ取引での取引相手に対する信用評価調整では、取引価値と取引相手の信用リスクが同時に高まることにより時価損失が顕現化する誤方向リスクが知られており、その把握が規制上求められている。本稿では、こうした誤方向リスクを捉える際、接合関数を用いたモデリングが有効であることを事例に基づいて解説する。また、誤方向リスクのモデリングの過程で、特性関数の扱いやフーリエ変換の利用など、広く金融工学に応用可能な技法が利用されることを示す。

キーワード：接合関数, 誤方向リスク, 信用評価調整, デフォルト強度, 特性関数, フーリエ変換

1. はじめに

2007～08年の世界的な金融危機では、サブプライム・ローン問題などにより金融機関を含む市場参加者の信用が悪化していく中で、モノラインや大手保険会社などの信用保証商品の売り手が信用不安に陥った。一方、これら商品の買い手である金融機関にとっては、取引相手(売手)の信用リスクと取引価値が同時にしかも急激に高まることにより、信用損失を保証されないリスクが時価会計で顕現化し、市場全体で巨額の時価損失を計上した。このように、市場ストレス・イベントなどの発生時に取引相手の信用力と取引価値の相互依存関係が平時に比べて大きくしかも急激に変わることによって甚大な時価損失を被るリスクは、誤方向リスク(wrong-way risk)と呼ばれている。また、取引の時価会計で、取引相手の信用力を調整して時価に反映することは、信用評価調整(Credit Valuation Adjustment: CVA)と呼ばれている。

2007～08年の金融危機では、デリバティブ取引における信用評価調整により各金融機関に巨大な評価損失が生じ、そのことがさらに深刻な金融危機につながったとされている。こうしたことを受けて、バーゼル銀行監督委員会 [1] は、デリバティブ取引における信用評価調整の規制上のモデリングにおいて、誤方向リスク

を考慮することを求めているほか、取引相手の信用リスクに関連する内部モデルに基づくエクスポージャー計算でも、誤方向リスクの考慮を求めている。バーゼル銀行監督委員会 [1] のこうした要請は、CVA やエクスポージャーの実務上のモデリングにおいて内部リスク管理上の要請とも一致している。すなわち、誤方向リスクに対する適切なヘッジ、あるいは、必要な資本として適切な額を算出しないと、認識されないリスクを抱えるほか、ビジネス上の収益性の判断も誤ってしまう。

金融工学の研究面からは、こうした実務上の要請に応えるように、誤方向リスクを捉えた CVA 評価手法としてさまざまな手法が提案されてきた。安達・末重・吉羽 [2] は、そうした誤方向リスクを捉えたモデル化手法を概観した。また、安達・末重・吉羽 [3] では、そのうち、構造モデルとデフォルト強度モデル、さらに接合関数アプローチを組み合わせた3手法の実装方法を詳述し、モデル化手法の差異を考察した。さらに、Adachi, Sueshige and Yoshida [4] では、安達・末重・吉羽 [3] で示した手法のうち、デフォルト強度モデルと接合関数を組み合わせるクレジット・デフォルト・スワップ(Credit Default Swap: CDS)のCVAを評価する手法を検証した。本稿では、Adachi, Sueshige and Yoshida [4] で検討したCDSのCVA評価手法を中心に、金融工学の広がりの一つとして、接合関数を用いた誤方向リスクのモデリングについて、その概要を解説する。

2. デフォルト強度を用いたCDSのCVA評価

2.1 企業のデフォルトに対するCDS

CDSは、ある企業の金融債権や社債を保有している債権者などが当該企業のデフォルトによって金融債権や社債が償還されないリスクをヘッジするための手段

あだち てつや
PwC コンサルティング合同会社
〒100-6921 東京都千代田区丸の内 2-6-1
tetsuya.adachi@pwc.com
すえしげ たくみ
KPMG Ignition Tokyo
〒100-0004 東京都千代田区大手町 1-6-1
takumi.sueshige@jp.kpmg.com
よしば としなお
東京都立大学大学院経営学研究所
〒100-0005 東京都千代田区丸の内 1-4-1
tyoshiba@tmu.ac.jp

である。社債の補償を受けたい者がプロテクションの買い手となり、取引相手がプロテクションの売り手となる。プロテクションの買い手は、当該社債がデフォルトした際にその社債価値の毀損分の補償を受ける代わりに、四半期ごとあるいは半期ごとといった定期にプロテクションの売り手に一定の保証料を支払う。この保証料は CDS プレミアムと呼ばれ、CDS の価格評価は CDS プレミアムの評価と同義になる。

参照体企業 R (以下、参照体 R) に対する CDS の CVA は、取引相手企業 C (以下、取引相手 C) がデフォルトしない条件での CDS の将来時点 t での価値 $V^{\text{No CVA}}(t)$ のうち正になっている部分 (自分が受け取るべき価値) がどの程度減価するかを評価するものである。満期を t_m とし、想定元本を 100 百万ドルとし、百万ドル単位で、 t_j ($j = 1, \dots, m$) の離散グリッド $\Delta = t_j - t_{j-1}$ に分けて $V^{\text{No CVA}}(t_j)$ を評価すると、

$$V^{\text{No CVA}}(t_j) = 100 \sum_{l=j+1}^m \{LGD_R PD_{R,j}(t_{l-1}, t_l) - sp_R \Delta (1 - PD_{R,j}(t_j, t_{l-1}))\} \quad (1)$$

と評価される。 $PD_{R,j}(t_{l-1}, t_l)$ は、時点 t_j で評価した参照体 R の期間 $(t_{l-1}, t_l]$ でのデフォルト確率である。ただし、現実に観測されるデフォルトの確率ではなく、価格評価用のリスク中立の確率測度 \mathbb{Q} のもとでのデフォルト確率であり、求め方は後述する。 sp_R は取引対象の CDS プレミアムであり、商品によって固定されている。 LGD_R は CDS が対象としている債券のデフォルト時損失率であり、デフォルト後に決まるものだが、市場慣行では 0.6 と固定して評価されることが多い。

CDS の CVA を評価するに際しては、参照体 R のデフォルト時刻 τ_R と取引相手 C のデフォルト時刻 τ_C を勘案して価格評価を行う必要がある。上記のように離散グリッドの時点に分けて、 N 本のパスでのシミュレーションにより、CDS の CVA を評価する。パス i でのデフォルト時刻を $\tau_R^{(i)}, \tau_C^{(i)}$ と表現すると、時点 t_0 で CDS の CVA は、

$$CVA(t_0) = \frac{LGD_C}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m DF(t_0, t_j) \times V^{\text{No CVA}}(t_j)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_C^{(i)} \in (t_{j-1}, t_j], \tau_R^{(i)} > \tau_C^{(i)}\}} \quad (2)$$

と表現できる。ただし、 $x^+ \equiv \max(x, 0)$ である。ここで、 LGD_C は取引相手 C がデフォルトしたときのプロテクションの損失率で、前述のとおり市場慣行では 0.6 と

固定して評価されることが多い。割引率 $DF(t_0, t_j)$ は、OIS (Overnight Index Swap) のカーブから導くのが実務上一般的になっている¹。

2.2 デフォルト強度のモデル化

上述のとおり、CDS の CVA を評価するに際しては、参照体 R と取引相手 C のデフォルト時刻 τ_R, τ_C の関係を考察することが中心となる。一般に、デフォルト事象の代表的な分析アプローチとしては、(a) 対象企業の資産状態について確率変動を考え、債務超過に陥った場合にデフォルトとする構造型モデルと、(b) 対象企業のデフォルト事象について、一定期間でのデフォルト確率ないし連続的なデフォルト強度をモデル化するアプローチがある。本稿では後者 (b) のアプローチを採用する。取引相手 C 、参照体 R のいずれのデフォルト時刻 τ_C, τ_R もともに連続的に生じるとし、各デフォルト強度の確率過程をモデル化する。企業 $k = C, R$ が時刻 t まで生存しているとの条件のもとで、時刻 t でのデフォルト強度は、

$$\lambda_k(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{Q}(\tau_k < t + \Delta t | \tau_k > t)}{\Delta t}$$

で定義される。すなわち、 $\lambda_k(t)\Delta t$ が企業 k の瞬間的なデフォルト確率を示すものであり、 $\lambda_k(t)$ は非負の値で定義される。非負の値を担保できる確率過程として金融工学でよく用いられるものは、平方根過程と呼ばれるもので、拡散項の局所的なボラティリティが平方根に比例するもの、すなわち、拡散項が $\sigma_k \sqrt{\lambda_k(t)} dW_t$ と表される確率過程である²。一方、平方根過程によるデフォルト強度の変化は滑らかで、何らかの事象が生じた際にデフォルト強度が急上昇する点は捉えられない。その点を踏まえ、金融工学の分野では、デフォルト強度の確率過程として平方根過程に正のジャンプ $dJ(t)$ を加えた確率過程が採用されることも多い。

こうした点を踏まえ、本稿では、企業 $k = C, R$ のデフォルト強度として、リスク中立の確率測度 \mathbb{Q} のもとで正のジャンプ付き平方根過程

$$d\lambda_k(t) = \kappa_k (\theta_k - \lambda_k(t)) dt + \sigma_k \sqrt{\lambda_k(t)} dW_k(t) + dJ(t) \quad (3)$$

¹ OIS とは、日々変動する翌日物 (overnight) の金利の四半期あるいは半期といった一定の期間の累積値と同期間に適用する固定金利を定期的に交換する取引であり、その固定金利を OIS 金利と呼ぶ。1~10 年などの OIS 契約の満期に応じて市場実勢の OIS 金利が定まり、その値は Bloomberg などの情報端末で表示されている。

² 平方根過程は、Cox, Ingersoll and Ross [5] で非負の短期金利の確率過程として採用されたことから、CIR 過程とも呼ばれる。

を想定する。 $\kappa_k, \theta_k, \sigma_k$ は定数であり、各企業 k の CDS の市場データからキャリブレートする。誤方向リスクを捉える観点からは、拡散項の相関

$$d\langle W_C, W_R \rangle(t) = \rho_{C,R}^{\text{jump}} dt$$

は正にして捉えるとともに、ジャンプ $dJ(t)$ は同時に生じると考えるのが適切と考えられる。ジャンプ $J(t)$ の強度は簡単化のため一定で η とし、ジャンプの幅は企業 $k = C, R$ に応じて期待値 ζ_k の指数分布に従うものとする。

デフォルト強度について、平方根過程や指数分布に従う上昇ジャンプ付き平方根過程を想定する利点は、デフォルト強度の非負性が担保されるとともに、生存確率が解析的に表現できるという点である。企業 $k = C, R$ の時点 s から時点 t までの累積デフォルト強度を次式で定義する。

$$\Lambda_k(s, t) \equiv \int_s^t \lambda_k(u) du \quad (4)$$

生存確率 $\mathbb{Q}(\tau_k > t | \tau_k > t_j)$ は、 $\mathbb{E}_{t_j}^{\mathbb{Q}}[\exp(-\Lambda_k(t_j, t))]$ という期待値で表現される。平方根過程や指数ジャンプ付き平方根過程は、アフィン・ジャンプ拡散過程の一種であり、この期待値は、時点 t_j での主体 k のデフォルト強度 $\lambda_k(t_j)$ を用いて、次式のように指数アフィン形式で解析的に表現される。

$$\mathbb{Q}(\tau_k > t | \tau_k > t_j) = \exp(\bar{\alpha}(t - t_j) - \bar{B}(t - t_j)\lambda_k(t_j)) \quad (5)$$

$\bar{\alpha}(t)$ 、 $\bar{B}(t)$ は複雑な式にはなるものの解析的に表現され瞬間的に計算可能である³。このように解析的に表される生存確率を用いれば、時点 t_j から各時点 t までの累積デフォルト確率は $1 - \exp(\bar{\alpha}(t - t_j) - \bar{B}(t - t_j)\lambda_k(t_j))$ で求められ、時点 t_j での各主体 k の期間 $(t_{l-1}, t_l]$ でのデフォルト確率 $PD_{k,j}(t_{l-1}, t_l)$ は $t = t_l$ と $t = t_{l-1}$ との差で求められることになる。また、各デフォルト強度 $\lambda_k(t)$ のパラメータのキャリブレーションに際しては、時点 t_0 での各主体 $k = C, R$ の CDS の価値 $V^{\text{No CVA}}(t_0)$ が 0 になるように CDS プレミアム sp_k が決まっていると考え、市場で観測される CDS プレミアムに合わせるように $PD_{k,0}(t_{l-1}, t_l)$ や $1 - PD_{k,0}(t_0, t_{l-1})$ を調整していく。こうした調整が可能なもの式 (5) の右辺が瞬間的に計算できるからである。

³ 式 (5) の導出などの詳細は安達・末重・吉羽 [6] を参照。

2.3 デフォルト強度モデルでの CVA 比較

2.2 節で説明したデフォルト強度のモデルを用いて、CDS の CVA を比較分析する。評価対象は、Brigo and Capponi [7] に倣い、CDS の参照体 R を Royal Dutch Shell、取引相手 (プロテクションの売り手) C を Lehman Brothers として、2008 年 5 月 1 日のデータで分析する。割引金利は 2008 年 5 月 1 日の OIS 金利を用いる⁴。データとモデルのキャリブレーションの詳細は安達・末重・吉羽 [8] を参照。

デフォルト強度のモデルとしては、ブラウン運動の相関や同時ジャンプが誤方向リスクの把握にどの程度有効かを検討するため、以下の四つのモデルを想定する。

1. 相関なし：誤方向リスクを考慮しないモデルで、具体的には式 (3) のジャンプを含まないモデルでかつ $d\langle W_C, W_R \rangle(t) = \rho_{C,R} dt = 0$ とするもの。これにより λ_C と λ_R に依存性を想定しない。
2. ジャンプなし・相関 0.3：式 (3) のジャンプを含まないモデルで $\rho_{C,R} = 0.3$ として誤方向リスクを考慮するモデル。
3. 同時ジャンプ・相関 0.3：式 (3) で与えられる同時ジャンプでジャンプ幅は独立として誤方向リスクを考慮したモデル。ジャンプの強度は 50 年に 1 回程度 ($\eta = 0.02$) とし、ジャンプの幅は取引相手 $k = C$ 、参照体 $k = R$ ともに $\zeta_k = 0.05$ と仮定し、 $d\lambda_R(t)$ と $d\lambda_C(t)$ の相関が前述の「ジャンプなし・相関 0.3」と同じになるように $\rho_{C,R}^{\text{jump}}$ を調整する。
4. ジャンプなし・相関 0.4：式 (3) のジャンプを含まないモデルで $\rho_{C,R} = 0.4$ として誤方向リスクを考慮するモデル。

満期 1~10 年の CDS に対する CVA を算出した結果は、図 1 のように与えられる。ブラウン運動間の相関は CVA にほとんど寄与しない一方、同時ジャンプは CVA の上昇に大きく寄与し、長期ほど寄与することがわかる。しかしながら、同時ジャンプによる誤方向リスクの把握では、取引相手 C がデフォルトした場合に CDS の参照体 R の信用状態が悪化する状況捉えることはできず、不十分である可能性がある。この点を補足するのが 3 節で説明する接合関数アプローチである。

⁴ リーマンショック以前のこの時期では、銀行間取引の信用リスクは大きく認識されていなかったため、割引金利には LIBOR スワップ金利が用いられることが多かった。ここでは、2019 年初時点標準的な OIS 金利を割引金利に用いることにした。

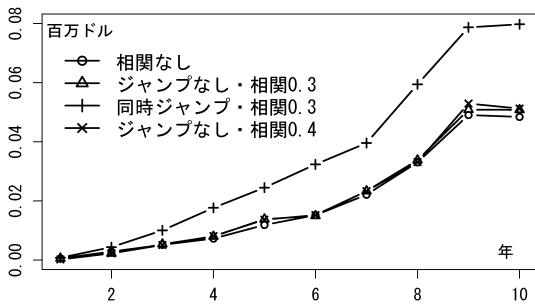


図1 デフォルト強度モデルでのCVA

3. 接合関数アプローチ

3.1 デフォルト強度モデルの問題点

CDSのCVAを参照体 R と取引相手 C のデフォルト強度を用いてシミュレーションで評価する場合、式(2)右辺のように取引相手 C がデフォルトしたパス i について取引相手 C のデフォルト時刻 $\tau_C^{(i)}$ で参照体 R が生存している場合に、式(1)の右辺で表されるCVAの価値のうち正の部分をエクスポージャーとして平均化して評価することになる。誤方向リスクを考えると、取引相手 C がデフォルトするような状況ではデフォルトしたことにより参照体 R のデフォルト可能性も高まる可能性が高い。しかしながら、デフォルト強度モデルでの $\tau_C^{(i)}$ 時点でのCDS評価は、取引相手 C の信用状況とは独立にその時点での参照体 R のデフォルト強度と時点 t_0 で定められたデフォルト強度のパラメータによって決まってしまう。接合関数アプローチは、こうしたデフォルト強度モデルの問題点を踏まえ、取引相手 C のデフォルト時刻 $\tau_C^{(i)}$ 直前での累積デフォルト確率とその後の参照体 R の累積デフォルト確率を接合関数によって結び付けることで強い依存関係を付けて、誤方向リスクを捉えようとするものである。

3.2 累積デフォルト確率の接合関数

取引相手 C のデフォルト時刻 τ_C 直前までの取引相手 C と参照体 R の累積デフォルト確率 U_C 、 $U_{R|C}$ は、式(4)の累積デフォルト強度を用いて、次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} U_C &= 1 - \exp\{-\Lambda_C(t_0, \tau_C)\}, \\ U_{R|C} &= 1 - \exp\{-\Lambda_R(t_0, \tau_C)\} \end{aligned} \quad (6)$$

Brigo and Chourdakis [9] や Brigo and Capponi [7] で提案された接合関数アプローチでは、デフォルト直前の取引相手 C の累積デフォルト確率 U_C と取引相手 C のデフォルト時点 τ_C 後の(満期までのある時点の)参照体 R の累積デフォルト確率 U_R について、次

式のように接合関数 $C(u_C, u_R)$ で依存性をもたせる。

$$\mathbb{Q}(U_C \leq u_C, U_R \leq u_R) = C(u_C, u_R) \quad (7)$$

接合関数は、多変量の同時累積分布関数を周辺累積分布関数としてみることで同時分布から周辺分布の情報を除いた関数である⁵。ここでは、式(7)の左辺のとおり、取引相手 C の累積デフォルト確率 U_C と参照体 R の累積デフォルト確率 U_R の同時分布関数を考えている。一般に、式(7)左辺の2変量同時分布が連続であれば、式(7)左辺は各周辺分布関数 $\mathbb{Q}(U_k \leq u_k)$ ($k = C, R$)と関数 $C(\cdot, \cdot)$ を用いて $C(\mathbb{Q}(U_C \leq u_C), \mathbb{Q}(U_R \leq u_R))$ と一意に表現できることが知られており、関数 $C(\cdot, \cdot)$ は接合関数と呼ばれる。ここでは、 U_k ($k = C, R$)は累積デフォルト確率を示す確率変数であるため、周辺分布は $\mathbb{Q}(U_k \leq u_k) = u_k$ となつて、 U_C と U_R の同時分布関数と接合関数が一致する。

取引相手 C が時点 $\tau_C \in (t_{j-1}, t_j]$ でデフォルトしたという条件での参照体 R の時点 $t > \tau_C$ での生存確率は、次式のように取引相手 C がデフォルトした後の参照体 R の累積デフォルト強度 $\Lambda_R(\tau_C, t)$ についての分布関数 $F_{\Lambda_R(\tau_C, t)}(\cdot)$ と参照体 R の累積デフォルト確率に関する条件付き接合関数 $C_{R|C}(u_R; U_C)$ を用いて求められる。

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau_R > t | \tau_C \in (t_{j-1}, t_j]) \\ = \int_{U_{R|C}}^1 F_{\Lambda_R(\tau_C, t)} \left(\log \frac{1 - U_{R|C}}{1 - u_R} \right) \\ dC_{R|C}(u_R; U_C) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、条件付き接合関数 $C_{R|C}(u_R; U_C)$ は接合関数 $C(u_C, u_R)$ の u_C に関する偏微分を用いて与えられる(式展開など詳細は安達・重木・吉羽 [3]を参照)。

3.3 累積デフォルト強度の分布関数とフーリエ変換

接合関数アプローチでは、式(8)のとおり、取引相手 C のデフォルト時点 τ_C での累積デフォルト確率 U_C と条件付き接合関数 $C_{R|C}(u_R; U_C)$ のほかに、 $s = \tau_C$ 以後の参照体 R の累積強度 $\Lambda_R(s, t)$ に関する累積分布関数が必要となる。

接合関数アプローチを用いない参照体 R の生存確率 $\mathbb{Q}(\tau_R > t | \tau_R > s)$ は、式(4)の累積デフォルト強度 $\Lambda_R(s, t)$ を用いて、 $\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[\exp(-\Lambda_k(s, t))]$ と表現され、式(5)と同様に指数アフィン形式で解析的に評価できる。同様に、参照体 R の累積デフォルト強度 $\Lambda_R(s, t)$

⁵ 接合関数(copula)の概要は、たとえば塚原 [10]の解説を参照。

表 1 採用する接合関数と順位相関, 裾依存係数

接合関数	パラメータ	分布関数 $C(u_1, u_2)$	順位相関	裾依存係数	
				上側	下側
正規	ρ	$\Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) \rho)$	$(2/\pi) \arcsin \rho$		0
Student- t	ρ, ν	$T_\nu(T_\nu^{-1}(u_1), T_\nu^{-1}(u_2) \rho)$	$(2/\pi) \arcsin \rho$	$2T_{\nu+1}$	$\left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}}\right)$
クレイトン	α	$(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$	$\alpha/(\alpha + 2)$	0	$2^{-1/\alpha}$
グンベル	γ	$\exp\{-((-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma)^{1/\gamma}\}$	$1 - 1/\gamma$	$2 - 2^{1/\gamma}$	0

の特性関数 $\phi_{s,t}(u) \equiv \mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[\exp(iu\Lambda_R(s,t))]$ も次式のように指数アフィン形式で解析的に表現される。

$$\phi_{s,t}(u) = \exp(\alpha_J(t-s) + \alpha_D(t-s) + iuB(t-s)\lambda_R(s)) \quad (9)$$

ただし、複素数空間で定義されるこの特性関数には無限多価関数の \log 関数を含むため、安達・末重・吉羽 [6] で示しているようにリーマン面の層を特定して計算する必要がある。

式 (9) のように累積デフォルト強度 $\Lambda_R(s,t)$ の特性関数が定まれば、逆フーリエ変換で密度関数を導くことができ、密度関数を累積すれば、累積分布関数を導くことができる。特性関数から密度関数への変換には、高速フーリエ変換の一つである Bailey and Swartztrauber [11] の非整数次フーリエ変換 (fractional fast Fourier transform: FRFT) を用いると効率的である。

CVA のシミュレーションでの評価にあたっては、取引相手 C がデフォルトしたパス i でのデフォルト時刻 $\tau_C^{(i)}$ での CVA 価値について、残存満期までのグリッド数 $m-j$ の生存確率評価が必要になる。単純に FRFT を用いて特性関数を変換し、生存確率を求めると多大な時間を要してしまうため、Adachi, Sueshige and Yoshida [4] では、CDS の残存満期 $t_m - \tau_C$ については接合関数を考慮して精緻に求め、それまでのグリッド $t_l, l = j+1, \dots, m-1$ については、解析的に評価できる式 (5) の生存確率 $\mathbb{Q}(\tau_R > t_l | \lambda_R(t_j))$ を用いて、近似的に評価する手法を提案している。

3.4 適用すべき接合関数

Brigo and Chourdakis [9] や Brigo and Capponi [7] では、デフォルト直前の取引相手 C の累積デフォルト確率 U_C とその後の参照体 R の累積デフォルト確率 U_R との接合関数として、2 変量の正規接合関数を採用している。正規接合関数は、多変量正規分布関数から導かれる接合関数で金融工学では頻繁に用いられる。たとえば、100 を超える企業向け債務を集め、そのデフォルト損失額に応じて証券化を行う債務担保証券 (Collateralized Debt Obligation: CDO) では、各債

務の資産状態について正規接合関数で捉え、格付けがなされることが多かった。2007~08 年の世界的な金融危機では、このような評価手法ではリスク評価が甘かったと批判された。接合関数を用いて多数の資産の信用状態を把握する場合、資産が一定の閾値を下回ったときにデフォルトが生じるとして構造的に把握することになり、その確率が各資産のデフォルト確率に相当する。接合関数で捉えるべき事象は、複数資産の同時デフォルト確率であり、それは複数資産で同時に低い閾値を下回る確率である。二つの資産について閾値を同じ u として設定し、その極限をとった値 $\lim_{u \rightarrow 0} C(u, u)/u$ は下側裾依存係数と呼ばれ、この値が 0 であるとき下側で漸近独立と呼ばれる。正規接合関数は漸近独立な接合関数であり、理論的にストレス時の同時デフォルトを把握しづらい接合関数になっている。正規接合関数を用いた CDO 格付けに対する批判はこうした理論的裏付けに基づくものである。

Adachi, Sueshige and Yoshida [4] では、正規接合関数の漸近独立性を踏まえ、下側で漸近従属となる接合関数として、Student- t 接合関数、クレイトン接合関数、生存グンベル接合関数も採用して比較検討している。これらの接合関数は正規接合関数と同様、パラメータで形状が決まるパラメトリックな接合関数であり、そのパラメータについては、正規接合関数の相関パラメータ $\rho_{C,R}^{\text{copula}}$ を基準として、順位相関の一つであるケンドールのタウが一致するように調整している。

3.5 採用する接合関数

採用する接合関数のパラメータ、関数形、順位相関 (ケンドールのタウ)、裾依存係数は表 1 のようにまとめられる。ここで、 $\Phi(\cdot, \cdot|\rho)$ は期待値 0、各変量の分散 1 で相関 ρ の 2 変量正規分布の分布関数、 $\Phi^{-1}(\cdot)$ は 1 変量標準正規分布関数の逆関数、 $T_\nu(\cdot, \cdot|\rho)$ は自由度 ν 、相関 ρ の 2 変量 Student- t 分布の分布関数、 $T_\nu(\cdot)$ は 1 変量の自由度 ν の Student- t 分布関数、 $T_\nu^{-1}(\cdot)$ はその逆関数である。

正規接合関数と Student- t 接合関数は上下に対称な接合関数であり、裾依存係数は上側、下側ともに同じ

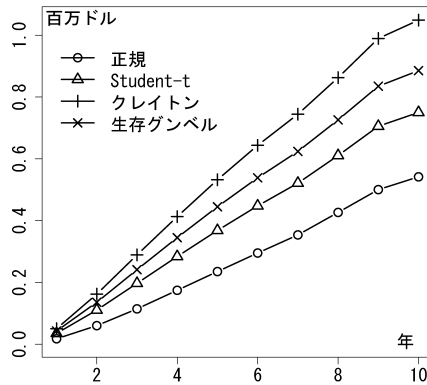
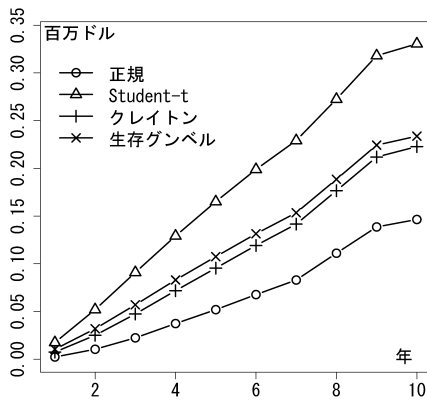


図2 CVA 期間構造の接合関数間比較：左は低相関 ($\rho_{C,R}^{\text{copula}} = 0.1$), 右は高相関 ($\rho_{C,R}^{\text{copula}} = 0.5$) の場合

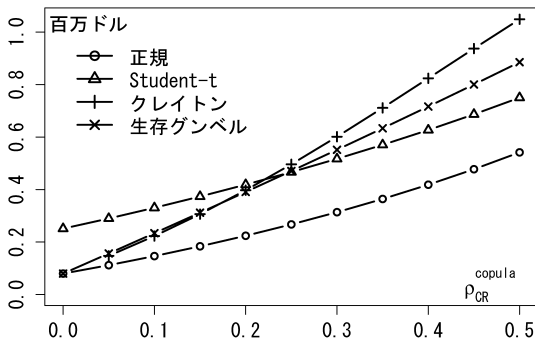


図3 同一の順位相関 (ケンドールのタウ) を持つ接合関数での10年CDSのCVA比較

である。Student- t 接合関数の裾依存係数は自由度 ν が小さいほど大きくなる。そこで、分析においては自由度 $\nu = 3$ として分析を行う。

クレイトン接合関数とグンベル接合関数は、アルキメデス型の接合関数と呼ばれるもので接合関数は標準的な関数のみで表現できる。表1のとおり、クレイトン接合関数は下側で漸近従属な接合関数である一方、グンベル接合関数は上側で漸近従属な接合関数である。分析では下側での裾依存性に注目するため、クレイトン接合関数はそのまま利用する一方、グンベル接合関数については上下の向きを逆にして適用する。ある接合関数について、すべての変数を逆向きに適用した接合関数は、生存接合関数と呼ばれる。そこで分析ではグンベル接合関数については、生存グンベル接合関数を利用する。

3.6 接合関数アプローチでのCVA比較

デフォルト強度モデルについては、同時ジャンプを含む局所的な強度変動の相関が0.3 (同時ジャンプ・相関0.3) のモデルに絞ったうえで、(1) 正規, (2) Student- t ,

(3) クレイトン, (4) 生存グンベルの四つの接合関数の違いによって、CVAの期間構造にどのような差が生じるかを考察する。比較に際しては、接合関数の相関パラメータは、順位相関 (ケンドールのタウ) が一致するように調整して正規接合関数の相関パラメータ $\rho_{C,R}^{\text{copula}}$ で比較を行う。

$\rho_{C,R}^{\text{copula}}$ について低相関 ($\rho_{C,R}^{\text{copula}} = 0.1$) の場合と高相関 ($\rho_{C,R}^{\text{copula}} = 0.5$) の場合でCVAの期間構造を比較すると図2のようになる。低相関では、Student- t > 生存グンベル > クレイトン > 正規の順、高相関では、クレイトン > 生存グンベル > Student- t > 正規の順のCVAが算出されており、相関 $\rho_{C,R}^{\text{copula}}$ に応じて各接合関数で得られるCVAの評価に違いが生じている。ただし、いずれも正規接合関数のCVAは低めであることがわかる。

図3では、10年のCDSに絞り、正規接合関数やStudent- t 接合関数の $\rho_{C,R}^{\text{copula}}$ と同一の順位相関をもつクレイトン接合関数、生存グンベル接合関数を用いて計算したCVAを比較している。

相関 $\rho_{C,R}^{\text{copula}} = \rho \rightarrow 0$ では、 $\alpha \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 1$ となり、正規、クレイトン、生存グンベルの各接合関数は独立接合関数に収束し、下側で漸近独立となる。独立接合関数、すなわち τ_C 直前の取引相手 C の累積強度とは独立に τ_C 以降の参照体 R の累積デフォルト強度の分布が定まる状況は、2.3節で考察したデフォルト強度モデルに帰着する。したがって、図3で正規、クレイトン、生存グンベルの各接合関数が $\rho_{C,R}^{\text{copula}} \rightarrow 0$ で得るCVAの値は同じ値に収束し、図1の「同時ジャンプ・相関0.3」の10年での値に一致する。

一方、Student- t 接合関数は、 $\rho \rightarrow 0$ で順位相関はゼロになっていても独立接合関数ではなく、下側で漸

近従属となる⁶。したがって、Student- t 接合関数での CVA は独立接合関数による CVA よりも大きな値に近づいていると解釈できる。

4. おわりに

本稿では、CDS の CVA を例に挙げ、誤方向リスク把握の実務的な必要性と接合関数を用いたモデリングの有効性を解説した。接合関数は誤方向リスクだけでなく、変量間の依存関係を捉えるモデリングとして有用であるが、その適用に当たっては、利用する接合関数の妥当性などを検討する必要がある。特に本稿では裾依存性の観点から、利用する接合関数の妥当性を評価した。CDS の CVA 評価に当たっては、取引相手 C と参照体 R の累積デフォルト確率の間の接合関数について、裾依存性を念頭に置く必要性を示した。Student- t 接合関数のように順位相関がゼロであっても裾依存性がある場合、CVA は大きく算出されるため、単純な相関だけで累積デフォルト確率間の依存関係を捉えるのは妥当ではないことが示された。

デフォルト強度のパラメータについては市場データからキャリプレートしたが、具体的に設定する接合関数のパラメータ $\rho_{C,R}^{\text{copula}}$ については、幅広く比較する一方で特定しなかった。たとえば、取引相手 C と参照体 R の双方が裏付けの債務として含まれる CDO の価格データを入手できれば、パラメータ $\rho_{C,R}^{\text{copula}}$ の設定に利用できる可能性がある。市場で利用できるデータとそれを用いた接合関数のパラメータの特定については、本研究における今後の大きな課題である。

また、特性関数から累積分布関数への変換の際に利用した FRFT については、参照体 R の累積デフォルト強度が小さく短い期間を対象とした場合に FRFT で必要なグリッド数が膨大になることもあって、残存最長満期については接合関数を考慮して生存確率を精緻に求め、それ以外の時点については解析的に評価できる生存確率を用いて近似を行った。金融工学においては、フーリエ変換を用いたデリバティブ評価など、さまざまな分野に高速フーリエ変換が利用されており、本

稿で考察したように精度や計算速度の面で課題を抱えている場合も想定される。金融工学の発展に向けてそうした課題が段階的に解決されていくことを望みたい。

謝辞 本研究は、JSPS 科研費 JP19K23226、東京都立大学金融工学研究センターからの助成を受けている。なお、本稿で示されている見解は、筆者たち個人の見解であり、筆者たちが所属する組織の公式見解ではない。

参考文献

- [1] Basel Committee on Banking Supervision, *Basel III: Finalising Post-Crisis Reforms*, Bank for International Settlements, 2017.
- [2] 安達哲也, 末重拓己, 吉羽要直, “CVA における誤方向リスク・モデルの潮流,” 金融研究, **35**, pp. 35–88, 2016.
- [3] 安達哲也, 末重拓己, 吉羽要直, “CVA における誤方向リスク・モデル: 実装と比較,” 金融研究, **36**, pp. 115–161, 2017.
- [4] T. Adachi, T. Sueshige and T. Yoshiba, “Wrong-way risk in credit valuation adjustment of credit default swap with copulas,” *Bank of Japan IMES Discussion Paper Series*, No.2019-E-1, 2019.
- [5] J. C. Cox, J. E. Ingersoll and S. A. Ross, “A theory of the term structure of interest rates,” *Econometrica*, **53**, pp. 385–407, 1985.
- [6] 安達哲也, 末重拓己, 吉羽要直, “ジャンプ付き平方根過程に従う強度の累積値に関する分布関数計算と CDS の CVA への応用,” 京都大学数理解析研究所講義録 No.2029, pp. 78–91, 2017.
- [7] D. Brigo and A. Capponi, “Bilateral counterparty risk with application to CDSs,” *Risk*, **23**, pp. 85–90, 2010.
- [8] 安達哲也, 末重拓己, 吉羽要直, “非整数次フーリエ変換と接合関数を適用したジャンプ付き平方根過程に従う累積デフォルト強度分布での誤方向リスク・モデリング—クレジット・デフォルト・スワップに対する信用評価調整への応用—,” 京都大学数理解析研究所講義録 No.2106, pp. 101–116, 2019.
- [9] D. Brigo and K. Chourdakis, “Counterparty risk for credit default swaps: Impact of spread volatility and default correlation,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **12**, pp. 1007–1026, 2009.
- [10] 塚原英敦, “接合分布関数 (コピュラ) の理論と応用,” [21 世紀の統計科学 III : 数理・計算の統計科学], 北川源四郎・竹村彰通 (編), 東京大学出版会, pp. 111–146, 2008.
- [11] D. H. Bailey and P. N. Swartztrauber, “The fractional Fourier transform and applications,” *SIAM Review*, **33**, pp. 389–404, 1991.

⁶ 表 1 より、下側裾依存係数は $2T_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1})$ となって依存性が残る。