

# 金融リスク計測のための確率金利モデルの提案 —国際的規制の流れとは異なる視点から—

室町 幸雄

世界金融危機を経て、大手金融機関に適用される金融リスク規制は厳しさを増してきたが、数理モデルとしての一貫性はなく、各資産・負債クラス別のリスク量を算出できたとしても、リスク量の合算には大きな問題がある。本稿では、さまざまな資産・負債クラスに統一的に適用しうる金利モデルの候補の一つを紹介する。

キーワード：金融リスク管理、金利リスク、リスクの合算、確率金利モデル、レジーム遷移、流動性預金残高

## 1. はじめに

本稿では、金融リスク計測の分野において筆者の最近の関心から生じた研究を、まだワーキングペーパー [1] の状態であるが紹介させていただきたい。

国際的な活動を行う金融機関に課される国際金融規制の中で最も有名なものはバーゼル規制であろう。これは1988年のバーゼル自己資本規制（バーゼルⅠ）から始まり、金融の複雑化と計測技術の高度化を踏まえて2007年にバーゼルⅡへ進み、間もなく発生した世界金融危機を経て、現在はバーゼルⅢが段階的に施行されている。この過程をみると、バーゼル規制は世界金融危機の防止に役立たなかったと受け取られるかもしれない。確かに、当時の金融ネットワークの中で規制の隙間をつくように拡大した部分から世界金融危機は発生したため、当時の規制やリスク計測技術で予測することはできなかった。この反省を活かし、以後の規制はより広い領域に、より多角的な視点から、より厳しい規制が適用されるようになり、現在に至っている。

現在のバーゼル規制では、リスク計測手法は複数の選択肢の中から金融機関がそれぞれの理由で選択できるが、各計測手法間に整合性はない。基本的にリスク量は積み上げ方式で算出され、たとえば感応度アプローチ (sensitivity approach) の評価式はテイラー展開をもとにリスクファクターとファクター感応度にさまざまな調整を加えつつ積み上げる形式で、一般的でもっともらしくもあるが、背後に具体的な数理モデルはない。

筆者は現在の金融規制の進め方には肯定的で、ある

統一した基準のもとで日々リスク管理を続けることは有益と思っている。実務で大切なのは日々自分の抱えるリスクを可視化して向き合い、可能ならばリスクの変化を捉えることで、たとえ不完全でも金融工学技術が金融危機の回避に役立つならば非常に望ましい。

しかし、リスク評価手法の統一感の欠如、この部分にはこの手法、あの部分にはあの手法といったパッチワーク的な対応が見え隠れする領域が、特に負債側に広く残る点は今後解決すべき課題と考えている。これは単なる好みの問題ではない。さまざまな資産・負債クラスのリスク量は最終的に統合評価されて一つのリスク量に集約されるが、これは各クラスの価値または損失額という相関性のある確率変数の和の分布の裾の形状を議論することに相当する。全資産・負債に共通の確率モデルを適用して統一的に評価する場合、資産・負債クラスごとのリスク量の算出も、統合したリスク量の算出も理論的に問題はない。しかし、共通の確率モデルを使わず、資産・負債クラスごとに異なる方法でリスク量を算出する場合、リスク量の合算は理論上困難で、合算方法により合計値が大きく変動しうるといふ重大な問題が生じる。本稿では、金融リスクの統一の評価のために使えるモデルの候補の一つを紹介する。

## 2. リスク計測モデルと測度変換

モデルの説明の前に、本節では、リスク計測モデル理論の構成について説明する。Kijima and Muromachi [2] は、金利リスクと信用リスクを統合評価するフレームワークを提案した。リスク計測モデルは、ある将来時点  $T$  の価値の分布をもとに、時点  $T$  における損益を扱う将来価値ベースのモデルと、ある将来時点  $T$  までに発生しうる潜在的な損失額の分布を扱うモデルに分けられる。市場リスク計測モデルは前者に属し、多く

むろまち ゆきお  
東京都立大学大学院経営学研究所  
〒100-0005 東京都千代田区丸の内 1-4-1  
muromachi-yukio@tmu.ac.jp

の信用リスク計測モデルは後者に属する。Kijima and Muromachi [2] は前者に属し、金利やデフォルト強度などのリスクファクター（資産価格に影響を与える変数）を確率微分方程式などの確率モデルで表現し、現在価値と将来価値には無裁定価格を使い、モンテカルロ・シミュレーションを用いてリスクホライズン（リスク計測期間の最終時点）におけるポートフォリオの将来価値分布を構築する。将来価値分布が得られれば、実務で使われるリスク量は適宜算出できる。

Kijima and Muromachi [2] によるフレームワークの特徴は二つの確率測度、観測確率（実確率、統計的確率ともいう）と価格付けのための確率（リスク中立確率など）の両方を用いる点である。リスク計測で考察する将来シナリオは現実には発生するシナリオなので、シナリオ生成には観測確率を使用する。一方、現在価値や将来価値の評価では無裁定価格、すなわち、リスク中立確率のような価格付けのための確率を用いて得られる将来のキャッシュフローの割引現在価値の期待値を使用する。

つまり、価値ベースのリスク計測を行うには、観測確率下の確率モデルと、リスク中立確率下の確率モデルの両方が必要である。あるいは、観測確率下の確率モデルと、観測確率からリスク中立確率への測度変換を明確に定める必要がある。次節で提案する確率モデルはこの方針で記述されていることに注意されたい。

### 3. レジーム遷移を考慮した金利モデル

本節では、資産・負債の統一的評価に使う金利モデルの有力候補と筆者が考えている、レジーム（局面）遷移を取り込んだ金利モデルについて説明する。レジームとは離散的な状態空間モデルにおけるそれぞれの状態のことで、複数のレジーム間にある確率で遷移すると考えるモデルがレジーム遷移モデルである。たとえば、株式市場では価格変動性の高いレジームと低いレジームの存在がデータから指摘されている。

図 1 に、1996 年 12 月～2020 年 2 月の円短期金利（LIBOR の月末値）の動きを示す。これを過去の金利の動きや水準にいくつかのレジーム（高金利・高変動レジーム、低金利・安定レジームなど）が存在すると解釈して、レジーム遷移をマルコフ過程で表現し、拡張 Vasicek モデル（または Hull-White モデル）と呼ばれる確率金利モデル [3] のパラメータがレジームごとに異なる値をとるモデル、Regime-Switching Extended Vasicek Model（以下では RSEVM と略）を考える。

金利にレジーム遷移過程を取り入れることで、より

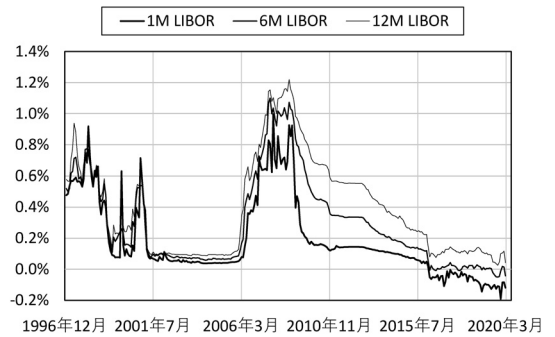


図 1 LIBOR の動向 (Bloomberg のデータより作成)

現実的なモデルを構築できる。たとえば、後に数値例で示すが、現在のマイナス金利環境の継続性を考慮しつつ、今以上の金利低下を避けながらも将来の金利上昇を自然に織り込むことができる。また、負債には金利に依存して残高が変化するものがあるが、近年では通常の依存性が見られなくなったという指摘も、レジームごとに依存性が異なると考えれば、マイナス金利レジームでは依存性がないというだけに過ぎない。

時刻を  $t, t \geq 0$ 、現在を  $t = 0$  として、フィルター付確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  で表す。  $P$  は観測確率（現実の確率）で、フィルトレーション  $\mathcal{F}_t$  は時刻  $t$  までのモデルに含まれるすべての情報のことを指す。

#### 3.1 観測確率 $P$ 下のモデル

観測確率  $P$  下で連続時間、有限状態のマルコフ連鎖モデルを考える。複数の  $K$  個のレジーム  $k = 1, \dots, K$  が存在すると、時刻  $t$  における状態をマルコフ連鎖  $\mathbf{X}(t)$  で表現する。  $\mathbf{X}(t) \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_K\}$  は  $K$  次元の確率過程ベクトル、ベクトル  $\mathbf{e}_j$  は第  $i$  成分  $(\mathbf{e}_j)_i = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ)、すなわち、第  $j$  成分のみ 1、他の成分は 0 の単位ベクトルで、時刻  $t$  にレジーム  $j$  にあることを示す。  $\mathbf{X}(t)$  の無限小生成作用素  $\mathcal{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,2,\dots,K}$  は定常的と仮定して、

$$q_{ij} = \begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{\mathbf{X}(t + \Delta t) = \mathbf{e}_j | \mathbf{X}(t) = \mathbf{e}_i\}}{\Delta t}, & j \neq i \\ -\sum_{k \neq i} q_{ik}, & j = i \end{cases} \quad (1)$$

として、遷移確率行列  $\mathcal{P}(t) \equiv (p_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,K}$  を

$$p_{ij}(t) \equiv P\{\mathbf{X}(s+t) = \mathbf{e}_j | \mathbf{X}(s) = \mathbf{e}_i\}, \quad s, t \geq 0 \quad (2)$$

で定義する。  $\mathcal{I}_K$  を  $K$  次単位行列とすると、  $\mathcal{P}(t)$  は

$$\frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} = \mathcal{Q}\mathcal{P}(t), \quad \mathcal{P}(0) = \mathcal{I}_K \quad (3)$$

の解であり、

$$\mathcal{P}(t) = \exp\{t\mathcal{Q}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{Q}^k t^k}{k!} \quad (4)$$

で与えられる。

時刻  $t, t \geq 0$  における無リスクの瞬間的な短期金利  $r(t)$  は、観測確率  $P$  のもとで、

$$dr(t) = a(\langle \mathbf{m}, \mathbf{X}(t) \rangle - r(t))dt + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}(t) \rangle dz(t) \quad (5)$$

に従うものとする。ただし、 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_K)^\top$ 、 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_K)^\top$  はそれぞれ  $K$  次元定数ベクトル、 $a$  と  $\sigma_k, k = 1, \dots, K$  は正定数、 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$  はベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の内積、 $z(t)$  は確率  $P$  のもとにおける標準ブラウン運動で、 $z(t)$  と  $\mathbf{X}(t)$  は独立と仮定する。

ここで、十分先の将来時点  $T > 0$  とし、任意の時刻  $t, 0 \leq t \leq T$  に対して  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\mathbf{X}(s) : 0 \leq s \leq t)$ 、 $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{0 \leq t \leq T}$ 、 $\mathcal{F}_t^r = \sigma(r(s) : 0 \leq s \leq t)$ 、 $\mathcal{F}^r = (\mathcal{F}_t^r)_{0 \leq t \leq T}$  とし、 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X \vee \mathcal{F}^r$ 、すなわち  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^r$  が成り立つとする。 $\mathcal{F}_t^X$  は時刻  $t$  までの  $\mathbf{X}$  の情報、 $\mathcal{F}_t^r$  は時刻  $t$  までの  $r$  の情報、 $\mathcal{F}_t$  は時刻  $t$  までの  $\mathbf{X}$  と  $r$  の情報である。

### 3.2 リスク中立確率 $\tilde{P}$ と $\tilde{P}$ 下のモデル

$P$  からの測度変換と価格付けはリスク計測モデルの主要部分であるがテクニカルなので、重要な点のみ記載する。 $P$  と同値な確率測度  $P^X$  を考える。 $P^X$  下の無限小生成作用素  $\mathcal{Q}^X$  も定常的であると仮定して、式 (1) と同様に  $\mathcal{Q}^X = (q_{ij}^X)_{i,j=1,2,\dots,K}$  を定義する。このとき、 $P$  から  $P^X$  への測度変換を与えるラドン・ニコデーム微分は、 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^X$  などを用いて明示的に表現できて、さらに式 (2) と同様に  $P^X$  下の遷移確率行列  $\mathcal{P}^X(t)$  を定義すると、確率  $P^X$  下でも式 (3) と式 (4) に対応する式が成立する。

Elliott et al. [4] によると、リスク性資産の価格過程  $S(t)$  が

$$dS(t) = S(t)\mu(t, S(t), \mathbf{X}(t))dt + S(t)\boldsymbol{\sigma}(t, S(t), \mathbf{X}(t))dz(t)$$

に従うとき、

$$\eta^r(t) \equiv \frac{r(t) - \mu(t, S(t), \mathbf{X}(t))}{\boldsymbol{\sigma}(t, S(t), \mathbf{X}(t))}$$

を使ったギルサノフ変換を用いると、若干の仮定の下で、 $\mathcal{F}_t$  が与えられたときのヨーロッパ・デリバティブの価格  $V(t)$  は、

$$V(t) = E^{P^\eta} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r(u)du \right\} G(S(\tau)) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 $G(S(\tau))$  はデリバティブの満期  $\tau, t \leq \tau \leq T$  のペイオフ関数で、 $E^{P^\eta}[\cdot | \mathcal{F}_t]$  は確率  $P^\eta$  下の条件付期待値演算子である。

以下では  $P^\eta$  をリスク中立確率と呼び  $\tilde{P}$  で表し、 $\tilde{P} = P^\eta$  のもとにおける標準ブラウン運動  $z^\eta(t)$  を  $\tilde{z}(t)$ 、 $\mathcal{Q}^X$  を  $\tilde{\mathcal{Q}}$ 、 $\mathcal{P}^X(t)$  を  $\tilde{\mathcal{P}}(t)$  で表す。一般に、レジーム遷移を用いたモデルは非完備で、 $P$  と同値なリスク中立確率  $\tilde{P}$  は複数存在し、 $P^\eta$  はその一つに過ぎない。そのため、式 (6) で与えられる価格は無裁定価格の一つの候補に過ぎないが、Elliott et al. [5] によると、確率測度  $P^\eta$  は最小エントロピー・マルチンゲール測度（英語名称、MEMM）なので、合理的に選択されうる価格の一つである。なお、標準ブラウン運動  $z(t)$  に対するリスクの市場価格は  $\lambda(t) = -\eta^r(t)$  である。

このとき、 $\tilde{P}$  下における  $r(t), 0 \leq t \leq T$  は、

$$dr(t) = (\langle \boldsymbol{\phi}(t), \mathbf{X}(t) \rangle - ar(t))dt + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}(t) \rangle d\tilde{z}(t)$$

に従う。ここで、 $\boldsymbol{\phi}(t) \equiv a\mathbf{m} + \eta^r(t)\boldsymbol{\sigma} = a\mathbf{m} - \lambda(t)\boldsymbol{\sigma}$  は一般に  $K$  次元確率過程ベクトルであるが、利便性を考慮して本稿では次の仮定を用いる。

**仮定 3.1.**  $\lambda(t) = -\eta^r(t)$  は時刻  $t$  の確定関数である。

仮定 3.1 より、

$$\phi_k(t) = am_k - \sigma_k \lambda(t)$$

は時刻  $t$  の確定関数となるので、レジーム  $k$  における確率金利モデルは観測確率  $P$  下では Vasicek モデル、リスク中立確率  $\tilde{P}$  下では拡張 Vasicek モデルとなる。

### 3.3 将来の金利期間構造

本稿の設定の下では Elliott and Siu [6] と同じ議論を展開できる。結果のみ示すと、時刻  $t$  における満期  $T$  の割引債価格は、 $r(t) = r, \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}$  として

$$P(t, T, r, \mathbf{X}) = \tilde{E} \left[ e^{-\int_t^T r(u)du} \middle| r, \mathbf{X} \right] = \exp \{ \langle \mathbf{A}(t, T), \mathbf{X} \rangle - B(t, T)r \} \quad (7)$$

で与えられる。ただし、 $B(t, T) = (1 - e^{-a(T-t)})/a$ 、 $\mathbf{A}(t, T) = (A_1(t, T), \dots, A_K(t, T))^\top$ 、 $A_i(t, T) \equiv \log \bar{A}_i(t, T)$  で、 $\bar{\mathbf{A}}(t, T) = (\bar{A}_1(t, T), \dots, \bar{A}_K(t, T))^\top$  は連立常微分方程式

$$\frac{d\bar{A}_i(t, T)}{dt} + \left\{ \frac{1}{2} \sigma_i^2 B^2(t, T) - \phi_i(t) B(t, T) \right\} \bar{A}_i(t, T) + \sum_{j=1}^K \tilde{q}_{ij} \bar{A}_j(t, T) = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (8)$$

$$\bar{A}_i(T, T) = 1, \quad i = 1, \dots, K \quad (9)$$

の解である。この問題は数値的に容易に解けて、時刻  $t$  における満期  $T$  のゼロレート（割引債の最終利回り）は、

$$R(t, T, r(t), \mathbf{X}(t)) = -\frac{\log P(t, T, r(t), \mathbf{X}(t))}{T-t} \quad (10)$$

で与えられる。

### 3.4 金利リスクの計測手順

将来時刻  $T, T > 0$ （リスクホライズン）までのポートフォリオの金利リスクは以下の手順で計測する。

#### 計測手順

1.  $(r(0), \mathbf{X}(0))$  を初期値として、式 (4) で与えられる推移確率行列  $\mathcal{P}(t)$  と確率微分方程式 (5) に従い、モンテカルロ・シミュレーションにより観測確率  $P$  下の離散時点上の将来シナリオのサンプルパス  $(r(t_i), \mathbf{X}(t_i)), i = 1, \dots, n, t_n = T$  を生成する。ここで、 $t_i, i = 1, \dots, n$  はキャッシュフローの評価が必要な将来時刻である。
2. 将来時刻  $t_i, i = 1, \dots, n$  における金利期間構造を、 $(r(t_i), \mathbf{X}(t_i))$  から式 (7)–(10) を使って生成する。
3. 生成した金利期間構造をもとに、資産・負債から生じるキャッシュフローや、資産・負債の価値を算出する。資産・負債を金利デリバティブとして評価できるならば、式 (6) を用いて無裁定価格を算出してもよい。
4. 十分な数の将来シナリオが得られるまで、手順 1～3 を繰り返す。十分な数の将来シナリオが得られたら、手順 5 に進む。
5. 生成した将来シナリオから資産・負債のリスク量を算出する。

リスク量は規制の種類や資産・負債クラスなどにより異なり、VaR(Value at Risk) や ES(Expected Shortfall) に限定されないが、基本的には将来シナリオから生成される将来価値分布から算出できる。

### 4. 応用例：流動性預金の金利リスク評価

金融機関の金利リスク評価では、資産だけでなく負債もあわせて行う必要がある。なぜならば、資産としても債券や貸付の金利リスクの一部は、負債としても

表 1 3 レジームのパラメータ

regime	$a$	$m_k$ (%)	$\sigma_k$ (%)
1	0.4	-0.05%	0.02%
2	0.4	1.1%	0.09%
3	0.4	2.7%	0.54%

預金などの金利リスクと相殺されるからであり、バーゼル II 以降、定期性預金の解約率や流動性預金（普通預金など）の残高増加率の金利依存性を考慮した金利リスク評価が重視されるようになった（Basel Committee on Banking Supervision [7] を参照）。たとえば、期限の定めのない流動性預金は、翌日引き出される可能性を重視すれば預金の滞留期間（債券の満期に相当）はほぼゼロである。しかし実際には多くの部分が長期間引き出されずに留まり、コア預金と呼ばれるが、現状でその滞留期間を評価する標準モデルがあるとは言いがたい（室町 [8] を参照）。本節では、前節で紹介した金利モデルを流動性預金の金利リスク評価に用いた数値例を紹介する。

#### 4.1 モデル・パラメータの設定

ここでは、表 1 の三つのレジームを考えたときの RSEVM と、常にレジーム 2 に留まると仮定した場合（この場合は拡張 Vasicek モデルになり、以下では EVM と呼ぶ）の結果を比較することで、提案モデルの特性であるレジーム遷移の効果を明確にする。

観測確率  $P$  下の無限小生成作用素  $\hat{Q}$  には、

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -0.05 & 0.04 & 0.01 \\ 0.08 & -0.17 & 0.09 \\ 0.00 & 0.14 & -0.14 \end{pmatrix}$$

を使う。このとき 1 年間のレジーム遷移確率行列は、

$$\mathcal{P}(1) = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 \\ 0.07 & 0.85 & 0.08 \\ 0.01 & 0.12 & 0.87 \end{pmatrix}$$

となる。これらの数値は、2003 年 1 月–2018 年 2 月の 1 ヶ月 LIBOR の月次時系列データから  $K = 3$ （3 レジーム）を仮定して得られた推定値であるが、一部はモデルの特性を際立たせるために変更している<sup>1</sup>。また、現在のゼロクーポンレートの期間構造は、

<sup>1</sup> 平均回帰水準  $m$  の推定値  $(-0.0005, 0.001, 0.007)$  を、 $(-0.0005, 0.011, 0.027)$  に変更した。なお、レジーム数  $K = 3$  は ad hoc な設定なので、今後の検討が必要である。

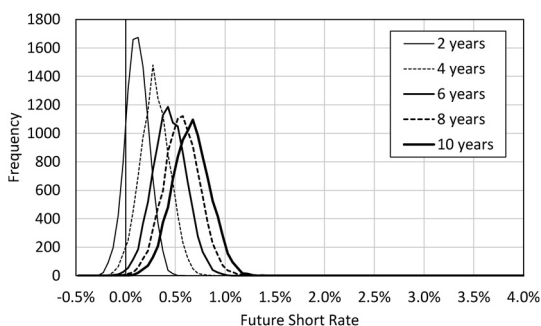


図2 将来の短期金利の分布 (EVM)

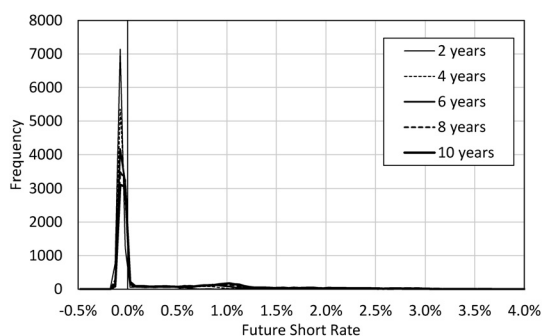


図4 将来の短期金利の分布 (RSEVM)

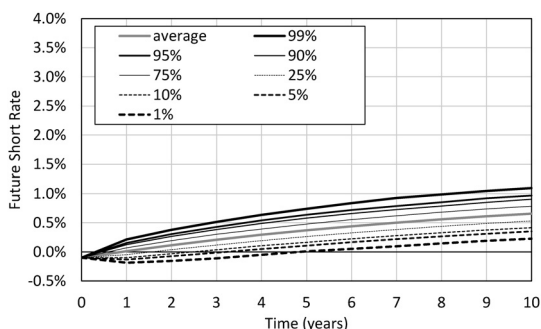


図3 将来の短期金利のパーセント点の推移 (EVM)

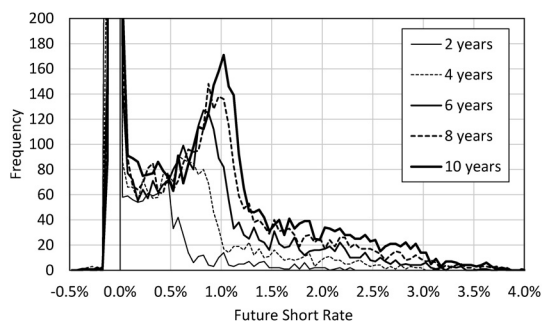


図5 将来の短期金利の分布 (RSEVM, 拡大図)

$$R(T) = -0.001 + 0.0016T - 0.00005T^2, \quad 0 \leq T \leq 10,$$

( $T$  は年,  $R(T) = 0.01$  は 1.0% のこと) とする. 他のパラメータ値と推定手法は室町 [1] を参照されたい.

シミュレーションの初期値は, RSEVM では  $\mathbf{X}(0) = (1, 0, 0)$ , EVM では  $\mathbf{X}(0) = (0, 1, 0)$  とし, 短期金利は  $r(0) = -0.001$  (-0.1%) として,  $T = 10$  年後までの計算を 10,000 回行った.

#### 4.2 将来の短期金利の分布

図 2 に EVM による将来 (2, 4, 6, 8, 10 年後) の短期金利  $r(t)$  の分布を示す. 横軸は短期金利, 縦軸は頻度である. EVM では将来の短期金利は正規分布に従い, 分布は広がりながら次第に右方向 (平均回帰水準 1.1%) へとシフトする. 図 3 はパーセント点および average (平均値) の時間推移を示す. これらの図から, 金利の分布は緩やかに広がりながら全体として上昇していくことがわかる. なお, 図 3 で示した average は将来の各時点における短期金利の分布から求めた平均値を繋いだ線で, 後出の図でも使われる.

図 4 は RSEVM による将来 (2, 4, 6, 8, 10 年後) の短期金利  $r(t)$  の分布で, 図 5 はその拡大図である. これらの図から, 短期金利の初期値周辺にできる分布の

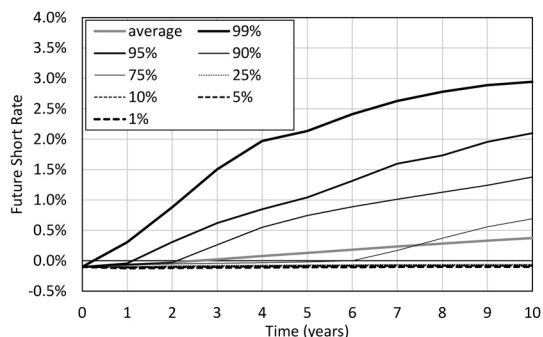


図6 将来の短期金利のパーセント点の推移 (RSEVM)

ピークは何年間も鋭い形状のまま維持されること, 分布の左裾は時間が経過してもわずかに変化するだけだが, 右裾だけが延びて裾の厚い分布になることがわかる. 分布の左裾が厚くならないのは, 初期値よりも金利が低い側にレジームが存在しないことと, レジーム 1 のボラティリティが非常に小さいからである. 一方, 分布の右裾が次第に厚くなっていくのは, より金利の高いレジームへの遷移とそれらのレジームのボラティリティが相対的に高いからである.

図 6 は RSEVM によるパーセント点の時間推移である. この図によると, 25% 以下のパーセント点 が 10 年経ってもあまり変わらず負値に留まるが, 75% 以上

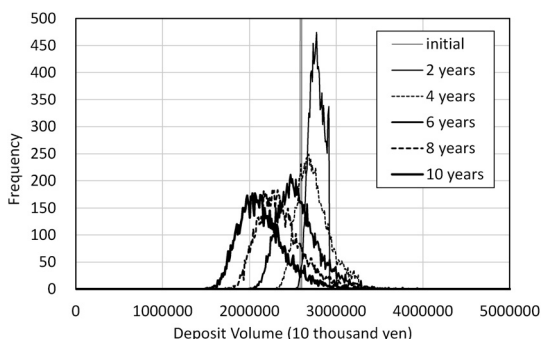


図7 将来の流動性預金残高の分布 (EVM)

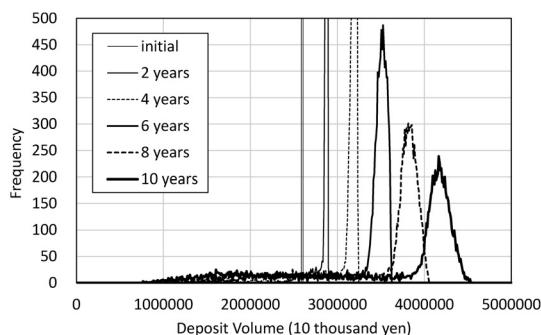


図9 将来の流動性預金残高の分布 (RSEVM)

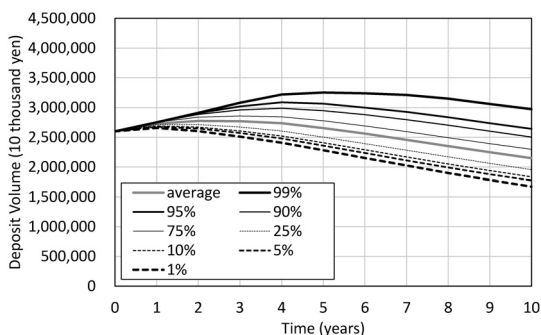


図8 将来の流動性預金残高のパーセント点の推移 (EVM)

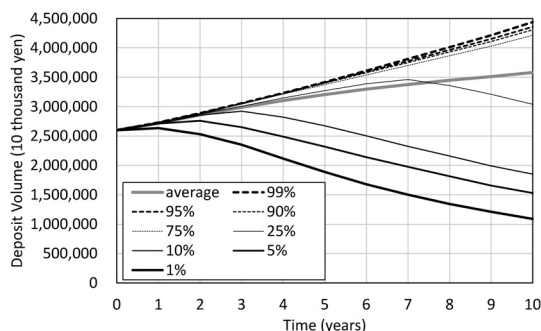


図10 将来の流動性預金残高のパーセント点の推移 (RSEVM)

のパーセント点はそれぞれある時点から急速に上昇し、average は時間とともに緩やかに上昇する。これらのことも、前述した将来の短期金利の分布の特徴と合致している。初期値よりも平均回帰水準の低いレジームが存在しないため、将来金利が今以上にマイナス方向に深入りしないことも実務的に望ましい特徴である。

### 4.3 流動性預金残高の分布

流動性預金残高の変化率を金利の関数として記述すれば、前述の金利シナリオから預金残高シナリオを作成できるので、将来の預金残高の分布を使ったコア預金の金利リスク評価を行うことができる。ここではデータフォアビジョン [9] に記載されている関係式を形だけ借用して、時刻  $t$  における個人流動性預金残高を  $L_1(t)$ 、法人流動性預金残高を  $L_2(t)$ 、前月比を  $R_{L_i}(t) \equiv L_i(t + \Delta t)/L_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  として、

$$R_{L_i}(t) = \beta_{i1} - \beta_{i2} \sqrt{\max(R(t, t + \Delta t_i) + 0.001, 0)}$$

を使用する。上式中の定数は、個人で  $(\beta_{11}, \beta_{12}, \Delta t_1) = (1.00452, 0.00769, 1/12)$ 、法人で  $(\beta_{21}, \beta_{22}, \Delta t_2) = (1.00504, 0.01988, 1)$  で、 $R(t, t + \Delta t_1)$  は時刻  $t$  の1ヵ月金利、 $R(t, t + \Delta t_2)$  は1年金利である。総流動性預金残高は  $L(t) = L_1(t) + L_2(t)$  で、初期値は  $L_1(0) = 1.6 \times 10^6$  万円、 $L_2(0) = 1.0 \times 10^6$  万円、合

計で  $2.6 \times 10^6$  万円とする。このモデルでは、当該期間の金利が  $-0.1\%$  以下のとき、残高増加率の金利依存性は完全に消失する。

図7はEVMによる将来の流動性預金残高の分布の推移を示している。分布は時間とともに次第に広がり、預金残高は当初は増加傾向で、後に減少傾向に転じる。この増加から減少へという転換は将来金利の滑らかな上昇に対応する。当初はマイナス金利のため残高は増加傾向を示すが、次第に金利が上昇するにつれて減少傾向へと転じる。分布が非対称になるのは残高増加率のモデルが金利に関して非対称なためである。

図8はEVMによる流動性預金残高分布のパーセント点及びaverage(平均値)の推移である。averageは各時点における預金残高分布から求めた平均値を繋いだ線である。図8から、EVMによる預金残高はaverage周辺に広がる、右裾がやや厚い分布になることがわかる。超低金利に留まり預金残高が高くなるサンプルパスもあるが、その発生確率は時間とともに低下し、averageは2年目以降は減少に、99%点でさえ5年後をピークに減少に転じる。

図9はRSEVMによる将来の流動性預金残高分布の推移である。この図によると、将来の預金残高は過

去のトレンドを維持して全体的に増加傾向で、分布のピークは緩やかになりつつ増加を続ける一方、次第に左側に長い裾を伸ばし、極端に左裾の長い非対称性の強い分布になっていく。これらの傾向は図 10 にも表れており、75%以上のパーセント点は時間が経過しても滑らかに増加する一方、25%以下のパーセント点はそれぞれ異なる時期から急激に減少し、1%点にいたっては 10 年間で当初の残高の半分を下回る。

二つのモデルを具体的なリスク量で比較する。通常の定義とやや異なるが、 $100\alpha\%$ -VaR (Volume at Risk の略)  $VaR_\alpha$  を初期残高と残高分布の  $100(1-\alpha)\%$  の差で定義すると、10 年後に EVM では平均 2.66,  $VaR_{0.99} = 0.93$ , RSEVM では平均 3.20,  $VaR_{0.99} = 1.51$  (単位はすべて  $10^6$  万円) となった。RSEVM では平均値はこれまでのトレンドを維持して増加する一方、リスク量は EVM よりも高い値を示している。

EVM により得られた結果は、将来の金利が正規分布に従うモデルを用いた場合の特徴を明確に示している。将来の短期金利は左右対称に広がる正規分布に従うので、今後の金利がマイナス方向に深く突き進まないようにするためには、 $(m, a)$  に高い値を設定して短期金利を強引に上昇させなければならず、その結果得られる将来残高は全体として減少せざるを得ない。特筆すべきことは、これまで長期間増加傾向であったにもかかわらず、平均的な預金残高は間もなく（この例では 2 年目をピークに）減少に転じ、10 年後には相当の割合が流出するという結果が得られた点である。このような推定結果は、将来金利はマイナス領域に深く踏み込まないであろうという制約から生じたに過ぎず、残高に減少傾向が全く見られない現時点において妥当な予想と言えるかどうか甚だ疑問である。

RSEVM では、時間が経過しても初期値付近に分布のピークが残るため、将来残高にも現在の動向が強く反映されて average は上昇を続ける。一方、将来の金利上昇確率は次第に増加し、かつ上昇時には広い範囲に分布するので、低確率ではあるが残高減少パスが現れ、減少量も幅広い値をとる。結果として、RSEVM による将来の預金残高は EVM に比べて幅広い分布となり、平均的には現状と変わらず増加傾向を維持しつつ、10 年間で残高が半減するような事象も発生し、これがリスク評価に強く影響することになる。

## 5. おわりに

本稿では、金融リスク計測分野での筆者の最近の研究を紹介させていただいた。国際的な金融規制の方向

性や最近進展しつつあるビッグデータを活用したデータサイエンス的な研究とは異なり、従来の金融工学の視点から、さまざまな資産・負債クラスのリスク評価に共通に活用可能で、かつ、リスク計測のための強引な設定を排除した自然なモデルでリスクを計測できないかを検討したもので、具体的には、デリバティブの価格付けで使われる確率金利とレジーム遷移を合体させたモデルである。このモデルで将来金利の分布と流動性預金残高減少リスクを計算したところ、将来金利はマイナス側に深入りすることなく、これまでのトレンドを維持可能で、かつ、極端な金利上昇シナリオも生成できるモデルであること、そして、流動性預金残高に適用すると、現状を維持しつつ、リスク計測の目的も十分に達成しうるモデルであることなどがわかった。

しかし、まだまだ問題も残されている。たとえば、日本では超低金利環境が長期間継続してきたため、生半可な長さの過去データを用いても高金利レジームを検出できず、リスク量はあまり高くない。この点は室町 [1] に詳しく記載したので参照されたい。

現在の金融機関では、金利リスクは負債クラスごとに異なる考え方で評価しているが、リスク量だけ集めて何らかの方法で合算しても理論的には適切でない。一方、共通の確率モデルを使用すればリスク量の統合評価は可能で、合算されたリスク量は明確な意味をもつ。この点を重視するならば、さまざまな負債クラスで共通に活用しうる確率モデルの検討は今後も必要な研究テーマである。本稿のモデルは、そのような確率モデルの有力候補の一つではないかと思っている。

**謝辞** 本稿の内容は株式会社エイファス主催の研究会の成果の一部である。株式会社エイファスの高橋政好氏には共同研究の機会を与えていただいたことに、塩田雅之氏と劉榕錡氏にはモデルの検討およびパラメータ推定にご協力いただいたことに厚く感謝する。また、初稿をお読みいただいた一橋大学大学院経済学研究科西出勝正教授に厚く感謝する。もちろん、ありうべき誤りはすべて筆者の責任に帰する。最後に、日本学術振興会より科学研究費補助金基盤研究 (B) 16H03123 の支援を受けたことに感謝する。

## 参考文献

- [1] 室町幸雄, “金利のレジーム遷移を考慮したコア預金モデル—コア預金のマチュリティー・ラダーの構築—,” 首都大学東京大学院経営学研究科 *Research Paper Series* 6, 2019.
- [2] M. Kijima and Y. Muromachi, “Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and de-

- fault processes,” *Journal of Risk*, **3**, pp. 5–36, 2000.
- [3] J. Hull and A. White, “Pricing interest-rate-derivative securities,” *Review of Financial Studies*, **3**, pp. 573–592, 1990.
- [4] R. J. Elliott, T. K. Siu and H. Yang, “Martingale representation for contingent claims with regime switching,” *Communications on Stochastic Analysis*, **1**, pp. 279–292, 2007.
- [5] R. J. Elliott, L. Chan and T. K. Siu, “Option pricing and Esscher transform under regime switching,” *Annals of Finance*, **1**, pp. 423–432, 2005.
- [6] R. J. Elliott and T. K. Siu, “On Markov-modulated exponential-affine bond price formulae,” *Applied Mathematical Finance*, **16**, pp. 1–15, 2009.
- [7] Basel Committee on Banking Supervision, *Basel Committee on Banking Supervision: Standards—Interest Rate Risk in the Banking Book—*, 2016.
- [8] 室町幸雄編著, 『金融工学の新潮流 2 金融リスクモデリング』, 朝倉書店, 2014.
- [9] データフォアビジョン, “弊社の提供するコア預金モデルについて, 日本銀行金融高度化センターワークショップ「銀行勘定における金利リスク管理—預貸金のデュレーションの把握—」資料,” 2013.