搜索資源配分ゲームに関する研究の変遷

宝崎　隆祐

搜索者とその搜索対象である目標が参加するゲームを搜索ゲームという．搜索ゲームの基礎となる最適化の理論は搜索理論（あるいは，探索理論）であり，第二次世界大戦における米海軍の対潜水艦作戦を起源とするが，近年では遭難者，被災者の搜索救難活動に活用されている．搜索ゲームの多種多様なモデル群の一モデルである搜索資源配分ゲームは，目標の意思決定とともに搜索者の合理的な搜索資源配分を研究するものであり，主として非協力ゲームの枠組みで論じられてきた．この報告では，搜索資源配分ゲームに関する当研究室の長年の研究成果の一部を紹介する．

キーワード：搜索，ゲーム，搜索資源配分

1. はじめに

搜索者とその搜索対象である目標が参加するゲームを**搜索ゲーム**という．搜索ゲームの基礎となる最適化の理論は搜索理論（あるいは，探索理論）であり，第二次世界大戦における米海軍の対潜水艦作戦（対潜戦）を起源とするが，近年では遭難者，被災者の搜索救難活動に活用されている．搜索ゲームの多種多様なモデル群の一モデルである**搜索資源配分ゲーム** (SAG) は，目標の意思決定とともに搜索者の合理的な搜索資源配分を研究するものであり，主として非協力ゲームの枠組みで論じられてきた．この報告では，搜索資源配分ゲームに関する当研究室の長年の研究成果の一部を紹介する．

搜索理論は，第二次世界大戦中の対潜戦を起源とする．図 1 は，北大西洋での英国を含む連合国および中立国船舶の U ボートによる月間喪失トン数と新建造トン数の推移を，戦争のほぼ全期間にあたる 1939 年 9 月から 1945 年 4 月の間，その特徴が良く現れる 9 ヶ月〜11 ヶ月単位で区切った 7 期について表したものである [1]．下向きの棒グラフが喪失トン数，上向きが新建造トン数，折れ線グラフは両者の差を示したもので，前半期における連合国側船舶の被害超過の状態から，後半期ではドイツ軍がジリ貧となり，北大西洋での連合国側のシーレーン確保と輸送力増加の様子が見てとれる．表 1 は，同じ 7 期において次第に増大する U ボートの撃沈隻数を示している．この舞台裏では，搜索理論が連合国側の対潜作戦の一助となっていた．

ほうざき　りゅうすけ
防衛大学校
〒 239–8686 横須賀市走水 1–10–20
ryu-hoh@outlook.jp

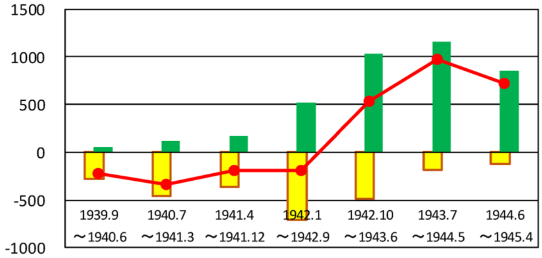

図 1　連合国関連船舶の月間喪失および新建造トン数

表 1　U ボートの撃沈隻数

1 期	2 期	3 期	4 期	5 期	6 期	7 期
3.2	3.1	4.7	8.4	19.9	23.0	24.3

ご存知のように，オペレーションズ･リサーチ (OR) が英国におけるレーダー開発･運用を支援する形で誕生し，この OR がレーダーやソナーの技術とともに 1940 年 8 月という大戦の早い段階で科学使節団により米国に紹介されると，米海軍は北大西洋における対潜戦にこれを利用する．実学としての OR 技術が，Morse and Kimball の著書 “Methods of Operations Research”（OR の方法）[2] により戦後の世界に紹介されたと同様，対潜戦を対象として誕生した搜索理論は Koopman による “Search and Screening”（搜索と直衛）[3] により紹介されたが，前者が戦後における産業の再構築と促進に役立ったことに比べれば，後者のご利益は海上自衛隊や海上保安庁以外ではほとんど認知されなかった．

次節で搜索理論が取り扱うテーマを簡単に紹介し，3 節では搜索者の最適な意思決定のみに関する古典的な搜索資源配分問題について言及する．4 節では，その問題の拡張問題として，目標の意思決定も考慮した搜索ゲームを解説する．

2. 捜索理論の目的と要素理論

現代の捜索理論の目的は，「通常では発見しにくく，関連情報の少ない目標を効率よく発見すること」であるが，この目的のため次のテーマに関する個別の理論が必要となる [4].

(1) 目標存在分布の推定問題：効果的に目標を発見するには，捜索の前に目標の存在分布を推定することが必要不可欠である．目標のいない場所を探してもいつまでも発見できないからである．常識的には，目標のいそうな場所，さらには目標がいた場合に捜索が発見につながり易い場所を探すことが肝要である．

(2) センサーによる目標探知能力の定量化の問題：世の中にはさまざまな探知センサーがある．水中の物体を発見する主要な媒体として音があり，それを使った探知センサーとしてソナーがある．また，陸上での物体の探知に有効なセンサーとしてのわれわれの目やレーダーなどがあるから，さまざまなセンサーに対する目標の探知，発見の事象を共通して取り扱う理論が必要となる．そこで考案された重要な概念として**有効捜索幅**がある．これは探知センサーと目標の特定化された組合せに対し，センサーからの距離 $W/2$ 以内で目標と行き会えば必ず探知が起こり，それ以遠であれば決して探知が起こらないとする理想化されたセンサーに換算した場合の探知幅 W のことである．目標に対するセンサーの探知事象の実験値から，この有効捜索幅の評価式が提案されている．特に海上救難に関連して，遭難者や救命筏，救命ボートのような目標に対する船舶上の見張員や航空機の搭乗員の有効捜索幅は国際マニュアル [5] に掲載され，国際協同による捜索救難活動で利用されている．

(3) 捜索オペレーションの理論と評価：捜索救難活動において具体的な捜索行動を実施した場合の目標探知確率を評価する理論が必要である．捜索行動の具体例として，ある地域，海域で遭難した目標を，その領域内に設定した平行な直線経路を捜索者が移動しつつ領域の隅々を探し回る捜索法があり，これを**平行捜索**という．また，意図的に領域内のランダムな地点を探したり，不正確な航法装置のため計画立った捜索が困難で，結果的にランダムな地点を探し回るようになる捜索法は**ランダム捜索**と呼ばれる．捜索オペレーションの理論を用いれば，目標が一様分布で存在すると推定される面積 A の捜索領域内を，有効捜索幅 W のセンサーをもった捜索者が速度 v で時間 t の間ランダム捜索を行った場合，探知確率 $P(t)$ は次式で評価される．

$$P(t) = 1 - \exp\left(-\frac{vWt}{A}\right) \qquad (1)$$

(4) 最適捜索計画：これまでの (1)–(3) の理論により，個々の捜索活動による探知確率が評価できることになる．そこで，たとえば広大な領域で遭難した目標を，全捜索時間 72 時間，5 機の回転翼機を使用し，どの場所を，どれだけの時間，何機のヘリを使って捜索したら最も早く目標を探知できるか，といった具体的な計画を立てることがこの分野の問題であり，手持ちの捜索資源の最適配分問題と見なすことができる．

(5) 捜索ゲーム：one-sided な最適化問題の中には，複数の意思決定の変数を含む two-sided な問題として拡張できるものがある．捜索問題に関するそのような拡張が捜索ゲームである．これまで，目標に関する情報を所与として議論してきた捜索者側の最適化問題に目標側の意思決定を取り入れることで，より現実的な問題となる．

上記の各論を解説する紙数はないため，次節以降では第 4 および第 5 のテーマを解説する．

3. 古典的な捜索資源配分問題

Search and Screening を著した Koopman は，戦後は捜索理論の学術的側面を追究し，Operations Research 誌に捜索資源配分問題に関する研究を発表する．その一つが次の問題である．

K 個のセル空間 $\boldsymbol{K} = \{1, \ldots, K\}$ のセル i に確率 p_i で隠れる目標に対し，任意に分割可能な総量 Φ の捜索資源をセルに分割投入する．セル i に目標が存在するという条件で投入した資源量 φ_i による条件付き目標探知確率は，ランダム捜索の式 (1) のように次式で与えられるとする．

$$f_i(\varphi_i) = 1 - \exp(-\alpha_i \varphi_i)$$

パラメータ $\alpha_i (> 0)$ は単位資源量に対するセル i での探知効率を表し，これが大きいほど資源の探知効果は高い．全体の目標探知確率を最大にする問題は，次式で定式化できる．

$$(P_K) \qquad \max_{\varphi} \sum_{i\in \boldsymbol{K}} p_i \{1-\exp(-\alpha_i \varphi_i)\} \tag{2}$$

$$s.t. \qquad \sum_{i\in \boldsymbol{K}} \varphi_i = \Phi, \quad \varphi_i \geq 0, i \in \boldsymbol{K} \tag{3}$$

目的関数は変数 $\{\varphi_i\}$ に対し変数分離な関数であり，Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 条件から容易に次の最適解の形を得る．

$$\varphi_i^* = \frac{1}{\alpha_i}\left[\log \frac{\alpha_i p_i}{\lambda}\right]^+ \tag{4}$$

ただし，$[z]^+ \equiv \max\{0,\ z\}$ であり，ラグランジュ乗数である λ は制約 (3) の等式制約から一意に決まるが，(4) 式が λ に対し単調減少であることから 2 分探索法による数値解法アルゴリズムが提案できる．式 (4) は，資源を投入するセル i では資源量 φ_i を単位量増加させるときの限界効用 $\alpha_i p_i \exp(-\alpha_i \varphi_i)$ を同じ値にバランスさせよとの要請を表現している．

実は，Koopman が議論したのは連続空間 $\boldsymbol{R}$ における捜索資源配分問題であり，点 $x \in \boldsymbol{R}$ での目標存在確率密度 $p(x)$ が与えられた場合の総量 Φ の捜索資源の配分密度 $\varphi(x)$ を求める次の変分問題であった [6].

$$\max_{\varphi} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\{1-\exp(-\alpha(x)\varphi(x))\}\,dx$$

$$s.t. \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \Phi, \quad \varphi(x) \geq 0, x \in \boldsymbol{R}$$

この問題は **Koopman 問題**と呼ばれ，その後の**最適資源配分問題**と呼ばれる問題群の出発点となった．

4. 捜索ゲームと均衡解

捜索者の最適化問題 (P_K) の自然な拡張として，目標がその存在確率 $\boldsymbol{p} = \{p_i, i \in \boldsymbol{K}\}$ を制約 $\sum_i p_i = 1$ の下で変化させ，目的関数である探知確率を最小化しようとさせることで，ゲームの問題にすることができる．この問題の解説は後述するとして，何らかの目標発見の事象を含む捜索ゲームには，これまでさまざまなモデル群が提案されている．表 2 はこれまで提案されてきた従来モデルを分類した表である．‘G’ は game の略語として使っている．

表 2　捜索ゲームのプレイヤーの戦略による分類 [7]

	捜索者		
目標	特殊	移動	資源配分
特殊	密輸 G		査察 G
静止	2 分法 -捜索 G	線形捜索 G 潜伏-捜索 G	潜伏-配分 G
移動	経路制約付 -捜索 G	逃避-捜索 G プリンセス -野獣 G	待伏せ G 捜索資源配分 G ネットワーク -阻止 G
資源配分			捜索-捜索 G ブロットー G 攻撃-守備 G

この中で，目標の戦略が静止か移動であり，捜索者の戦略が資源配分であるゲームを総称して捜索資源配分ゲームと呼ぶ．その他のモデルとして密輸発見と阻止を取り扱う密輸ゲームや有効な核査察を扱う査察ゲームなども見られるが，捜索資源配分ゲーム以外のモデルの具体的な内容については，サーベイ論文 [7] を参照していただきたい．この報告の焦点である捜索資源配分ゲームを議論する前に，ゲームにおける最も初歩的な解の概念を復習しておこう．

ゲームのモデルは，大きく非協力ゲームと協力ゲームに分類される．非協力ゲームでは，参加者であるプレイヤーのそれぞれが自分の評価尺度（**支払**あるいは**利得**とよぶ）を大きくするように意思決定するものとする．プレイヤーの集合を $\boldsymbol{N} = \{1, \ldots, n\}$，プレイヤー $i \in \boldsymbol{N}$ の戦略の集合を S_i とし，全プレイヤーの戦略の組 $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ に対するプレイヤー i の支払を $R_i(\boldsymbol{s})$ と表す．戦略の組合せ $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ が（ナッシュ）**均衡解**であるとは，任意のプレイヤー $i \in \boldsymbol{N}$ の戦略 s_i^* が他のプレイヤーの戦略に対し最大の支払を与えること（**最適反応**と呼ぶ）であり，このとき，任意の $s_i \in S_i$ に対し次式が成り立つ．

$$R_i(\boldsymbol{s}^*) \geq R_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

このとき，どのプレイヤー i も自分の戦略 s_i^* を変える動機のない均衡の状態にあり，s_i^* をプレイヤー i の**最適戦略**，$\{R_i(\boldsymbol{s}^*), i \in \boldsymbol{N}\}$ を**均衡利得**と呼ぶ．

二人のプレイヤーが参加し，彼らの支払の和が常に $R_1(\boldsymbol{s}) + R_2(\boldsymbol{s}) = 0$ となるゲームを 2 人ゼロ和ゲームという．この場合はプレイヤー 2 の支払は $R_2(\boldsymbol{s}) = -R_1(\boldsymbol{s})$ であるから $R_1(\boldsymbol{s})$ だけを定義すればよく，これをゲームの支払とする．プレイヤー 1 はこの支払を最大化したいマキシマイザーであり，プレイヤー 2 は最小化したいミニマイザーである．もし $\max_{s_1}\min_{s_2} R_1(\boldsymbol{s}) = \min_{s_2}\max_{s_1} R_1(\boldsymbol{s})$ であれば，この均衡利得を**ゲームの値**といい，二重の最適化問題 $\max_{s_1}\min_{s_2} R_1(\boldsymbol{s})$ を解いて得られる最適解 s_1^* がプレイヤー 1 の最適戦略であり，$\min_{s_2}\max_{s_1} R_1(\boldsymbol{s})$ の最適解 s_2^* がプレイヤー 2 の最適戦略となる．

以下では捜索資源配分ゲームに焦点をあて，まず静止目標の探知に関する問題 (P_K) を捜索資源配分ゲームに拡張した問題を考えてみる．

問題 (P_K) の目的関数 (2) 式

$$P(\varphi, \boldsymbol{p}) = \sum_{i \in \boldsymbol{K}} p_i \{1 - \exp(-\alpha_i \varphi_i)\} \tag{5}$$

を支払とする 2 人ゼロ和ゲームの均衡解は，次式で与えられる．

$$p_i^* = \frac{1/\alpha_i}{\sum_{j \in \boldsymbol{K}} 1/\alpha_j} \tag{6}$$

$$\varphi_i^* = \Phi \frac{1/\alpha_i}{\sum_{j \in \boldsymbol{K}} 1/\alpha_j} \tag{7}$$

なぜなら，式 (7) を (5) 式に代入すると，変数 $\boldsymbol{p} = \{p_i, i \in \boldsymbol{K}\}$ に無関係な定数となるから，目標は (6) 式で与えられる戦略を変える動機がない．また，式 (6) を式 (4) に代入することで $1/\alpha_i$ に比例する資源配分である (7) 式が得られることから，φ^* は $\boldsymbol{p}^*$ に対する最適反応となる．求められた最適戦略は理解し易く，目標は探知効率 α_i の高いセルにはできるだけ潜伏しないようにし，捜索者はどのセル i の条件付き探知確率 $1 - \exp(-\alpha_i \varphi_i)$ も同じにして，目標に対する潜伏の魅力がセル間で異ならないようにする．この均衡解は，捜索者の一方的な最適化問題の最適解である (4) 式よりはよほどシンプルである．このような均衡解の単純さは多くのゲームの問題で見られる．

5. 移動目標に対する捜索資源配分ゲーム

ここでは，移動目標に対する捜索資源配分ゲームについて紹介しよう．このタイプのゲームに関してわれわれが提案してきたモデルを総括したのが図 2 であるが，以降で解説を行うモデルは，図中の (1) 基本モデル [8] と (9) 目標の初期位置情報が不完備情報である 1 段階の 2 人ゼロ和ゲーム [9] である．なお，基本モデルは，ゲームのルールを両プレイヤーが知っている情報完備で 2 人ゼロ和な 1 段階の非協力ゲームである．その他にも，情報不完備ゲーム，非ゼロ和ゲーム，多段階ゲーム，さらには協力ゲームのモデルも研究している．

5.1 捜索資源配分ゲームの基本モデル

捜索理論では，目標の移動形態としてさまざまなものを考えている．1 点からの拡散移動や現在の状態によって次の移動場所を決めるマルコフ移動などである．ここでは，理解の容易なパス型の移動目標を考える．まずは，捜索資源配分ゲームの基本モデルの前提を正確に記す．

A1. 捜索の地理空間はセル空間 $\boldsymbol{K} = \{1, \ldots, K\}$，時間空間は離散時点の集合 $\boldsymbol{T} = \{1, \ldots, T\}$ である．

A2. 目標はこの空間上を移動する一本のパスを事前に選択することにより捜索者からの逃避を図る．目標の実行可能なパス全体を Ω で表す．パス $\omega \in \Omega$ は，時点 $t \in \boldsymbol{T}$ にセル $\omega(t)$ を通過する．

A3. 捜索者はこの捜索空間上へ捜索資源を投入することにより目標を探知しようと図るが，捜索は時点 τ 以降にしか開始できない．この捜索可能な時間帯 $\widehat{\boldsymbol{T}} \equiv \{\tau, \ldots, T\}$ の各時点 $t \in \widehat{\boldsymbol{T}}$ で使用可能な資源総量は $\Phi(t)$ である．

各時点では，目標の存在するセル i に投入した捜索資源量 x により，確率

$$f_i(x) = 1 - \exp(-\alpha_i x) \tag{8}$$

で目標探知が生起する．ただし，各時点での目標探知事象は互いに独立である．

A4. ゲームの支払は全捜索時間での探知確率であり，捜索者はこれを大きくするように，目標は小さくするように行動する．

目標の純粋戦略は 1 本のパス $\omega \in \Omega$ の選択であるが，ここではその混合戦略 $\pi = \{\pi(\omega), \omega \in \Omega\}$ を考える．また，捜索者の純粋戦略を，各時点 $t \in \widehat{\boldsymbol{T}}$ で各セル $i \in \boldsymbol{K}$ に投入する資源量 $\varphi(i, t)$ を使った $\varphi = \{\varphi(i, t), i \in \boldsymbol{K}, t \in \widehat{\boldsymbol{T}}\}$ で表す．まず，プレイヤーの戦略 (φ, ω) による支払関数である探知確率を求める．

前提 A 2 から，パス ω をとった目標は時点 t でセル $\omega(t)$ におり，A 3 から，そこに投入された資源 $\varphi(\omega(t), t)$ による探知確率は $1 - \exp(-\alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t))$ である．したがって，支払関数である全捜索時間 $\widehat{\boldsymbol{T}}$ で少なくとも 1 回探知が起こる確率は

$$P(\varphi, \omega) = 1 - \exp\left(-\sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t)\right)$$

となる．さらに，パス選択確率 π を考慮した期待支払は次式で与えられる．

$$P(\varphi, \pi) = 1 - \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \exp\left(-\sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t)\right)$$

この期待支払に関しては $\max_{\varphi} \min_{\pi} P(\varphi, \pi) = \min_{\pi} \max_{\varphi} P(\varphi, \pi)$ が成り立ち，結果的には，目標の移動位置へうまく投入できる有効捜索資源量 $\sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t)$ をゲームの支払とす

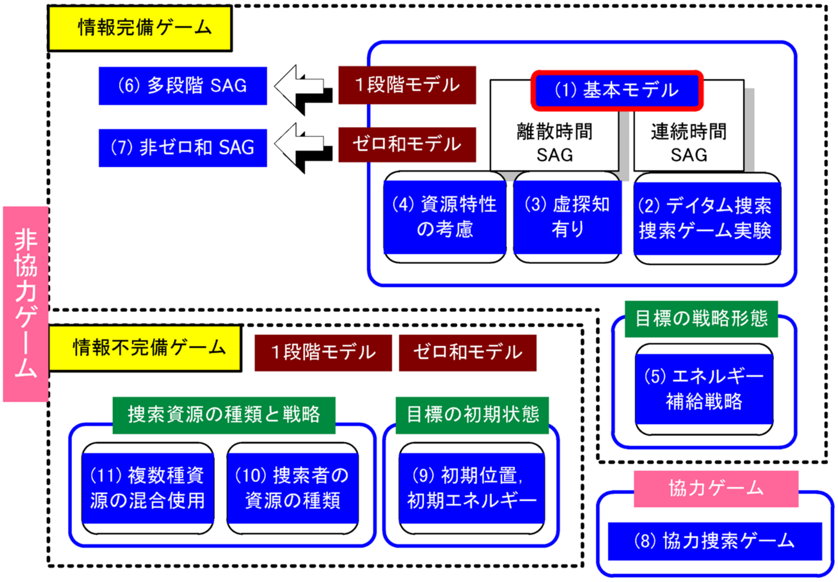

図 2 捜索資源配分ゲームのモデルの分類

る問題と同値となる．マックスミニ最適化問題 $\max_\varphi \min_\pi P(\varphi,\pi)$ は最終的に次の問題にまとめられ，この線形計画問題を解けば捜索者の最適戦略 φ^* が得られる．

$$
\begin{aligned}
(P_S) \qquad & \max_{\eta,\varphi}\ \eta \\
s.t. \qquad & \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t) \geq \eta,\ \omega\in\Omega \\
& \sum_{i\in\boldsymbol{K}} \varphi(i,t) = \Phi(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}} \\
& \varphi(i,t)\geq 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}
\end{aligned}
$$

一方，ミニマックス最適化 $\min_\pi \max_\varphi P(\varphi,\pi)$ は次の線形計画問題にまとめられ，目標の最適戦略 π^* が求められる．

$$
\begin{aligned}
(P_T) \qquad & \min_{\nu,\pi} \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \Phi(t)\nu(t) \\
s.t. \qquad & \alpha_i \sum_{\omega\in\Omega_{it}} \pi(\omega) \leq \nu(t),\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}} \\
& \sum_{\omega\in\Omega} \pi(\omega) = 1 \\
& \pi(\omega)\geq 0,\ \omega\in\Omega
\end{aligned}
$$

5.2 目標の初期位置が個人情報であるモデル

捜索者の探知センサーが不完全ながらも目標の存在を感知し，それが捜索活動を実施するに足る情報だと判断されれば，捜索者は捜索活動を開始する．捜索開始時におけるこの目標位置を目標は正確に知っている一方，捜索者の知識は何らかの確率分布で与えられると考えられる．つまり，捜索開始時の目標初期位置が目標の個人情報である情報不完備な捜索資源配分ゲームがここでの問題である．

このモデルは，5.1 節の前提 A 2 を目標初期位置の情報に関する次の前提で置き換えた捜索資源配分ゲームである．

B2. 搜索者は，目標初期位置に関する確率分布 $\{f(k), k\in I_0\}$ の情報を取得して捜索を開始する．ただし，$I_0\subseteq\boldsymbol{K}$ は初期位置の可能性のあるセル群であり，$\sum_{k\in I_0} f(k)=1$ である．初期位置情報 $\{f(k)\}$ は目標にも既知な共通知識であるが，目標は実際の初期位置を知っている．
初期位置 k から出発する実行可能なパス群を P_k とし，目標はその一つを選んで移動する．移動パス $\omega\in P_k$ による時点 $t\in\boldsymbol{T}$ での目標存在セルは $\omega(t)\in\boldsymbol{K}$ である．

初期位置 k の目標をタイプ k の目標と呼ぶ．5.1 節の基本モデルと同様，捜索者の資源配分戦略を $\varphi=\{\varphi(i,t), i\in\boldsymbol{K}, t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\}$ で表すが，目標は，そのタイプ k ごとにパス選択確率 $\pi_k=\{\pi_k(\omega),\omega\in P_k\}$ を決めるとし，目標全体の戦略を $\pi=\{\pi_k, k\in I_0\}$ で表す．このとき，5.1 節の式 $P(\varphi,\pi)$ 導出の類推から，タイプ k の目標が最小化したい期待支払（探知確率）は，

$$
R_k(\varphi,\pi_k)
$$

$$
=1-\sum_{\omega\in P_k}\pi_k(\omega)\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)\right)
$$

で与えられ，目標初期位置を分布 $\{f(k)\}$ でしか推測できない捜索者が最大化したい期待支払は次式となる．

$$R(\varphi,\pi)=\sum_{k\in I_0}f(k)R_k(\varphi,\pi_k)=1-\sum_{k\in I_0}f(k)$$
$$\times\sum_{\omega\in P_k}\pi_k(\omega)\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)\right)$$

以上のように，両プレイヤーの評価尺度は一見異なっているが，$R_k(\varphi,\pi_k)$ を最小にする各々のタイプ k の目標戦略 π_k は期待支払 $R(\varphi,\pi)$ を最小にすることになるから，捜索者の最適戦略 φ^* は $R(\varphi,\pi)$ のマックスミニ最適化により導出できる．その結果として，次の凸計画問題による定式化が得られる．

$$(P_S^I)\quad \max_{\varphi,\{\eta_k\}}\left\{1-\sum_{k\in I_0}f(k)\exp(-\eta_k)\right\}$$
$$s.t.\quad \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)\geq\eta_k,\ \omega\in P_k,k\in I_0$$
$$\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)=\Phi(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}$$
$$\varphi(i,t)\geq 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}$$

一方の目標の最適戦略 $\pi^*=\{\pi_k^*,k\in I_0\}$ を求めるミニマックス最適化はそれほど簡単ではなく，いくつかの工夫を重ね，問題 (P_S^I) の最適解 φ^* と η_k^* を利用した次の線形計画問題が π^* を求める定式化として得られる．

$$(P_T^I)\quad \min_{\pi,\lambda}\sum_{k\in I_0}f(k)\sum_{\omega\in P_k}\pi_k(\omega)$$
$$\times\left\{1-\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi^*(\omega(t),t)\right)\right\}$$
$$\text{s.t.}\quad \varphi^*(i,t)>0\text{ なる }(i,t)\in\boldsymbol{K}\times\widehat{\boldsymbol{T}}\text{に対し，}$$
$$\alpha_i\sum_{k\in I_0}f(k)\exp(-\eta_k^*)\sum_{\omega\in\Omega_{it}^{+k}}\pi_k(\omega)=\lambda(t)$$
$$\varphi^*(i,t)=0\text{ なる }(i,t)\in\boldsymbol{K}\times\widehat{\boldsymbol{T}}\text{に対し，}$$
$$\alpha_i\sum_{k\in I_0}f(k)\exp(-\eta_k^*)\sum_{\omega\in\Omega_{it}^{+k}}\pi_k(\omega)\leq\lambda(t)$$
$$\sum_{\omega\in P_k}\pi_k(\omega)=1,\ k\in I_0$$
$$\pi_k(\omega)\geq 0,\ \omega\in P_k,\ k\in I_0$$

ただし，Ω_{it}^{+k} は次式で定義される．

$$\Omega_{it}^{+k}\equiv\{\omega\in P_k\mid\omega(t)=i,$$
$$\sum_{t'\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t')}\varphi^*(\omega(t'),t')=\eta_k^*\}$$

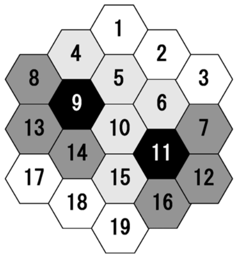

図 3　捜索空間

5.3　目標初期位置が個人情報であるモデルの数値例

時間空間 $\boldsymbol{T}=\{1,\ldots,5\}$ で，図 3 のような蜂の巣型のセル空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\ldots,19\}$ を目標は移動する．セル 9 と 11 には障害物があり，目標は移動できない．探知効率 α_i の値には 3 種類あり，セル $\{1,2,3,17,18,19\}$ では $\alpha_i=0.7$，セル $\{4,5,6,10,15\}$ では $\alpha_i=0.5$，また障害物周辺のセル $\{7,12,16,8,13,14\}$ では探知効率が低く $\alpha_i=0.3$ である．これら 3 種類のセルは，灰色の濃淡で区別して図に描かれている．

目標の初期位置として二つのセル $I_0=\{4,2\}$ の可能性がある．目標はどの時点でも現在存在するセルから隣接セル，あるいは二つ隣接するセルに移動可能であるが，前者の移動には移動エネルギー 1 を消費し，後者では 4 を消費するとして，時点 $t=1$ での初期エネルギー e_0 の許容内で移動できる．エネルギーが尽きた場合は現在のセルから動けない．初期位置 $k\in\{4,2\}$ を出発し上記の移動制約を満たす実行可能な移動パスが，パス群 P_k である．初期エネルギー e_0 は数値例において変化させる．

捜索者は時点 $\tau=2$ から捜索を開始でき，各時点 $t\in\widehat{\boldsymbol{T}}=\{2,\ldots,5\}$ で $\Phi(t)=1$ の資源量が利用できる．また，目標初期セル群 $I_0=\{4,2\}$ に対する捜索者の確率分布予想 $f(4),f(2)$ $(f(2)=1-f(4))$ は数値例において変化させる．

図 4 および図 5 のひし形のマークは，それぞれ $e_0=2$ および $e_0=5$ に対し，$f(4)$ を $[0,1]$ 間で変化させた場合のゲームの値（探知確率）を描いたものである．比較のため，初期位置を捜索者も知っている 5.1 節で解説した情報完備な捜索資源配分ゲームの値を四角のマークの直線で描いた．両曲線の差が，探知確率を尺度とした初期位置情報の価値である．初期位置に関する捜索者の無知のため，本モデルでの探知確率は情報完備ゲームの探知確率より常に小さい．この図から次のことがわかる．

(1) エネルギー量 e_0 が大きくなると 2 本の曲線は下に下がる．これは，目標の機動性が増すほど目標

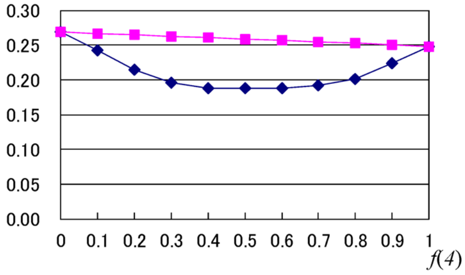

図 4　探知確率の変化（$e_0 = 2$ の場合）

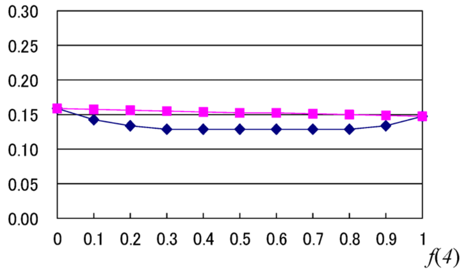

図 5　探知確率の変化（$e_0 = 5$ の場合）

表 3　生存確率の分布

時点	1	2	3	4	5
$e_0 = 2$	1	0.93	0.89	0.85	0.81
$e_0 = 5$	1	0.96	0.93	0.90	0.88

の存在分布が広がり，効果的な捜索が難しくなるためである．また，曲線の両端点 $f(4) = 0$ あるいは $f(4) = 1$ のそれぞれは，目標の初期位置がセル 2 あるいは 4 であると捜索者に知られている状況であるから，両曲線は同じ値をとる．ただし，後者の探知確率が前者より若干小さい．これは，初期セル 4 からの目標移動の方が，探知効率を表す α 値が 0.5 や 0.3 と小さなセルに目標が到達し易いため，捜索者に不利となるからである．

(2) どちらの図でも，図の中央付近で，両曲線の差で示される情報の価値が最大となる．このことは，初期位置情報に捜索者が確信をもてないときほど，得られる情報の価値が高いことを示している．この傾向は，e_0 が小さい場合に大きい．これは，初期エネルギーが小さい場合，その後の目標位置も初期位置付近にあると推測され捜索領域が限定されることから捜索者には有利となり，情報の有効性が比較的長時間保たれるからである．逆に，初期エネルギーが大きい場合は，時間とともに急速に初期位置情報の利用価値は失われる．

目標の移動の特徴をみるため，$f(4) = f(2) = 0.5$ の場合に，時点 t にセル i を通過するパスをとる目標が，探知されずに生き残って (i, t) を出発する確率 $q(i, t)$ をすべての (i, t) の対し計算してみた．その詳細な目標分布データの提示は省略し，特徴だけをまとめると次のようになる．

目標分布は $e_0 = 5$ の方が $e_0 = 2$ よりも時間とともに急速に広く拡散するため，各時点での生存確率は大きい．表 3 は，各時点 t での生存確率 $\sum_i q(i, t)$ を示した表である．

各時点 t での $q(i, t)$ のセル間における分布に関しては，α 値が 0.7，0.5，0.3 の三つのタイプのセルごとに値がほぼ同じとなり，分布の一様性が観察できる．また，探知効率の悪いセルでの $q(i, t)$ は良いセルよりも大きく，目標の生存確率が高い．

以上の目標分布に関する三つの特徴：(1) 拡散性，(2) 一様性，(3) 低探知効率セルへの指向性が，最適な目標移動戦略に見られる特徴である．

6.　おわりに

この報告では，本家である OR と同じ起源と歴史をもつ捜索理論について解説し，創始者である Koopman が学術的に追究した最適捜索資源配分問題の延長上で研究が進んできた捜索資源配分ゲームを概説した．そのような伝統的な捜索理論の拡張とは別に，今日的な問題への適用と解決への指向が捜索理論の研究者の間では望まれており，災害対策，セキュリティ問題およびドローンの活用など，さまざまな適用分野がある．実は，筆者達もこれらの分野への応用も細々ながら模索しているものの，防衛大学校の飯田耕司先生，大阪大学／関西大学の中井暉久先生といった捜索理論における著名な先達が引退し，兵庫県立大学の菊田健作先生だけが海外でも活発に発信されている現状にあって，捜索理論の今日的ニーズの発掘と実学への回帰を期待する昨今である．

参考文献

[1] C. M. Sternhell and T. M. Thorndike, *Anti-Submarine Warfare in World War II*, OEG Report, No.51, 1946.

[2] P. M. Morse and G.E. Kimball, *Methods of Operations Research*, MIT Press, Cambridge, 1951.（中原勲平訳，『オペレーションズ・リサーチの方法』，日科技連，1954.）

[3] B. O. Koopman, *Search and Screening*, Operations Evaluation Group, Office of the Chief on Naval Operations, Navy Department, 1946.（2 訂版，Pergamon, 1980）.

[4] 宝崎隆祐，飯田耕司，『捜索理論における確率モデル』，コロナ社，2019.

[5] International Aeronautical and Maritime Search and Rescue Manual; Vol. 1∼3, ICAO/IMO publications, London, 2003.

[6] B. O. Koopman, "The theory of search III: the optimum distribution of searching effort," *Operations Research*, **5**, pp. 613–626, 1957.

[7] R. Hohzaki, "Search games: Literature and Survey," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **59**, pp. 1–34, 2016.

[8] R. Hohzaki, K. Iida and T. Komiya, "Discrete search allocation game with energy constraints," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**, pp. 93–108, 2002.

[9] R. Hohzaki and K. Joo, "A search allocation game with private information of initial target position," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **58**, pp. 353–375, 2015.