p 次錐の幾何学

伊藤　勝，ロウレンソ　武流野　フィゲラ

2 次錐は錐最適化において重要な対称錐の一例である．対称錐とは等質錐かつ自己双対錐であるような凸錐のことである．2 次錐の定義で ℓ_2 ノルムを ℓ_p ノルムに一般化したものを p 次錐と呼ぶ．「p 次錐は対称錐であるか？」という素朴な疑問を掘り下げてみると，p 次錐の自己同型写像といった凸錐の幾何学的な構造の問題と関わってくる．本稿では「2 次錐以外の p 次錐は等質錐でも自己双対錐でもない」ことを証明して，2 次錐以外の p 次錐が対称錐でないことを議論する．

キーワード：凸錐，p 次錐，自己同型群，対称錐，自己双対錐，等質錐

1. はじめに：p 次錐は対称錐か？

本稿では凸錐の幾何学に関して，特に p 次錐を対象とした最近の結果 [1] を紹介する．$1 \leq p \leq \infty$ と $n \geq 3$ に対して，以下で定義される $\mathbb{R}^n$ 上の凸錐を **p 次錐**と呼ぶ．

$$K_p^n = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : t \geq \|x\|_p\}. \qquad (1)$$

ただし，$\|x\|_p$ は $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ の ℓ_p ノルムである：

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_{n-1}|^p)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n-1}|\}.$$

$p = 2$ の場合，K_2^n は錐最適化においてよく知られた 2 次錐になる．また，K_1^n と K_∞^n は多面錐（有限個の半空間の交わり）になることに注意しよう．図 1 には $\mathbb{R}^3$ 上の p 次錐を，図 2 にはそれらの $t = 1$ での断面図を示している．

p 次錐に関わる最適化問題は，2 次錐最適化や，ℓ_1 または ℓ_∞ ノルムに関わる錐最適化といった重要な最適化問題のクラスを含んでいる．一般の p に対しても文献 [2–4] などの研究があるが，$p = 1, 2, \infty$ の場合に比べるとその取り扱いはより技巧的になる．

ℓ_2 ノルムは標準内積 $\langle x, y\rangle = x^\top y$ から導出されるユークリッドノルムであり，2 次錐は p 次錐の中でも特別である．特に 2 次錐計画問題（線形制約と 2 次錐制約のもとでの線形関数の最小化問題）は線形計画問題を含む最適化問題のクラスであって，内点法を用いて効率的に解くことができる [5].

1.1 対称錐

内点法により効率的に解ける最適化問題のクラスとして，対称錐上の最適化は重要なクラスの一つである [6–8]．特に，線形計画問題，2 次錐計画問題や半正定値計画問題はこの対称錐上の最適化に含まれている．対称錐は理論的な性質がよく調べられており（たとえば文献 [9]），与えられた凸錐が対称錐だとわかることは最適化においても有利な情報である．

ここで，対称錐の定義を確認しよう．凸錐 K が対称錐であるとは，次の 2 条件 (i) および (ii) が成り立つことである．

(i) K は**等質錐**である．すなわち，任意の二つの K の内点 x, y に対してある K の自己同型写像[1] A が存在して $y = Ax$ となる．

(ii) K は**自己双対錐**である．すなわち，ある内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が存在して，その内積によって定義される K の双対錐

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \geq 0,\ \forall x \in K\}$$

が K 自身と一致する．

対称錐はその分類が知られており，どのような凸錐が対称錐になるかがある程度わかっている．詳しく述べれば，任意の対称錐は以下に示す 5 種類の対称錐のいずれかと同型な凸錐たちの直和として書きあらわせることが知られている [9].

(i) 2 次錐 K_2^n
(ii) 半正定値な n 次実対称行列全体
(iii) 半正定値な n 次複素エルミート行列全体
(iv) 半正定値な四元数係数の n 次エルミート行列全体
(v) 半正定値な八元数係数の 3 次エルミート行列全体

[1] つまり，$AK = K$ となる正則行列 A のこと．ただし $AK = \{Ax : x \in K\}$ である．

いとう　まさる
日本大学理工学部
〒 101–8308 東京都千代田区神田駿河台 1–8–14
ito.m@math.cst.nihon-u.ac.jp
ロウレンソ　ブルノ　フィゲラ
統計数理研究所
〒 190–8562 東京都立川市緑町 10–3
bruno@ism.ac.jp

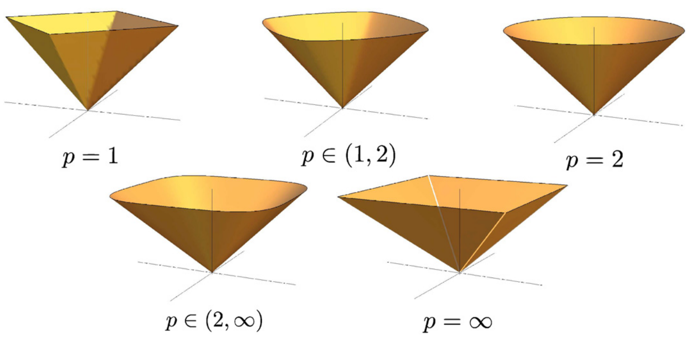

図 1　$\mathbb{R}^3$ における p 次錐 $K_p^3=\{(t,x_1,x_2):t\ge\|(x_1,x_2)\|_p\}$（鉛直方向が t 軸）

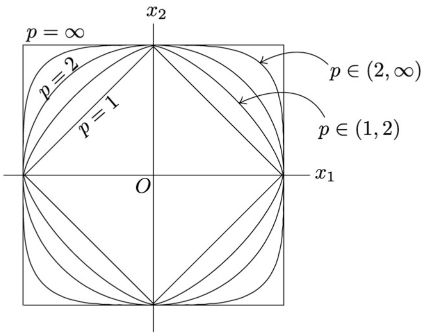

図 2　$\mathbb{R}^3$ における p 次錐 K_p^3 の断面図

たとえば，$n=1$ のとき (ii) は非負の実数全体 $\mathbb{R}_+$ となるから，n 次元の非負象限 $\mathbb{R}_+^n$ は n 個の $\mathbb{R}_+$ の直和とみなせば対称錐である．

1.2　*p* 次錐は対称錐であるか？

本稿で紹介する研究 [1] は，「p 次錐は対称錐であるか？」という議論が発端となっている．筆者らは 2 次錐以外の p 次錐は対称錐ではないと想像していたが，p 次錐は対称錐であると主張する（証明が正確でないと思われる）論文が最近報告された．そこで「p 次錐は対称錐であるか？」という議論をしてみると，3 節で述べるように，これはそれほど容易な問題ではなさそうである．このことは，文献 [10, 11] でも異なる視点から議論されている．この疑問を掘り下げてみると，奇遇にも p 次錐の自己同型群（自己同型写像全体のなす群）の解明などにつながった．本稿ではこのことを解説しよう．

「2 次錐以外の p 次錐は対称錐ではない」ことを示すための一つの方法はそれが自己双対錐でないことを示すことである．まず簡単にわかることとして，p 次錐の標準内積に対する双対錐は q 次錐（ただし $p^{-1}+q^{-1}=1$）であるため，2 次錐は標準内積に関して自己双対であるが，それ以外の p 次錐はそうではない．しかし，この非自己双対性は標準内積に対してのみ検証されたのであって，「2 次錐以外の p 次錐は自己双対ではない」という結論には不十分であることに注意しなくてはならない．すべての内積に対して非自己双対性を示さない限り，その錐は自己双対でないとはいえない．

本稿の構成を簡単に述べよう．まずは 2 節で p 次錐の基本的な性質や先行研究を示した後，3 節に「2 次錐以外の p 次錐は対称錐でない」という事実の証明の一つを紹介する．対称錐ではないということは，その定義から，等質錐でない**または**自己双対錐でないということになる．実はこの主張を強めて「2 次錐以外の p 次錐は等質錐でも自己双対錐でもない」という事実が成り立つことを 4 節で証明する．

この研究の本質的な貢献は次の疑問の解決である．「p 次錐と q 次錐が同型になるのはいつか？ 同型であるとすれば，同型写像はどのような形をしているか？」このことが p 次錐の非等質性や非自己双対性を示すのに重要であることを次節で説明しよう．この疑問の答えと証明はそれぞれ 4 節と 5 節に示す．

2.　準備および先行研究

2.1　*p* 次錐の基本的な性質

p 次錐はどのような集合であるか，基本的な性質を述べよう．まず，p 次錐は**凸錐**である．すなわち，ベクトルの加法と非負のスカラー乗法について閉じた集合である．

本稿では凸錐について**面**と**端線**という概念が重要である．特に，図 1 において K_1^3 と K_∞^3 は，次元 2 の面が 4 面と，端線が 4 本あることを覚えておこう．以下に一般の定義を述べる．凸錐 K に含まれる凸錐 F が K の面であるとは，任意の 2 点 $x,y\in K$ に対して $x+y\in F$ となるのは $x,y\in F$ である場合に限ることと定義される．直線を含まない凸錐 K に対して，自分自身 K と原点 $\{0\}$ は自明な面であり，それ以外の面を非自明な面という．また，次元が 1 の面（直線

または半直線である面）を**端線**という．

p 次錐を，境界の形状によって多面錐と狭義凸錐に区別してみよう．図 1 を見ると，K_1^3 と K_∞^3 はそれ以外の K_p^3 とで境界の形状が異なる．まず，K_1^n と K_∞^n は多面錐（有限個の半空間の交わり）であり，有限本の端線がある．一方で，それ以外の K_p^n $(p \neq 1, \infty)$ は無数の端線に囲まれていて，次元が 2 以上の面が存在しない．詳しく述べれば，これらは非自明な面が端線に限られる凸錐であり，このような凸錐を**狭義凸錐**という．

2.2 錐の同型写像

等質錐や自己双対錐が，錐の同型写像の概念とどのように関わるか説明しよう．

$\mathbb{R}^n$ 上の二つの凸錐 K と K' が**同型**である（このことを $K \simeq K'$ と書く）とは，ある n 次正則行列 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在して $AK = K'$ となることであり，この行列 A を**同型写像**と呼ぶ．特に，$AK = K$ となる正則行列 A は，K の**自己同型写像**と呼ばれ，K の自己同型写像全体のなす群（**自己同型群**）を

$$\mathrm{Aut}(K) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : AK = K\}$$

と書く．

すでに述べたように，**等質錐**とは，どのような二つの K の内点 x, y をとっても，ある自己同型写像 $A \in \mathrm{Aut}(K)$ によって x と y を写し合う（$Ax = y$ となる）ことができるような凸錐である．この定義を見ると，自己同型群 $\mathrm{Aut}(K)$ の性質を調べることで K の等質性が明らかになることが期待される．本稿の目的の一つは，p 次錐の自己同型群 $\mathrm{Aut}(K_p^n)$ の構造を明らかにすることである．

次に，凸錐の自己双対性に話を移そう．$\mathbb{R}^n$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に対して，凸錐 K の双対錐は

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \geq 0,\ \forall x \in K\}$$

で定義され，内積に依存して双対錐の定義が変わることに注意しよう．$\mathbb{R}^n$ 上の任意の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ はある正定値実対称行列 A を用いて $\langle x, y\rangle = x^\top Ay$ と表すことができる．そこで，この内積により定義される K の双対錐を K_A^* とも書くことにする．したがって標準内積に対する K の双対錐は単位行列 I を用いて K_I^* と書かれる．

凸錐 K がある内積に関して $K = K^*$ を満たすとき，K を自己双対と呼ぶのであった．自己双対性について以下の特徴付けが知られている．

補題 1（Proposition 1，文献 [1]）． $\mathbb{R}^n$ の標準内積 $\langle x, y\rangle = x^\top y$ に関する凸錐 K の双対錐を K_I^* と書くとき，K が自己双対であるための必要十分条件は $AK = K_I^*$ となる正定値実対称行列 A が存在することである．

この主張に出てくる行列 A は K と K_I^* との正定値な同型写像になるから，特に $K \simeq K_I^*$ が成り立つ．したがって，逆に K と K_I^* が同型でないことを示せば，K が自己双対錐でないことが従う．p 次錐に関していえば，$p^{-1} + q^{-1} = 1$ となる $p, q \in [1, \infty]$ に対して $K_p^n \not\simeq K_q^n$ を示すことができれば，p 次錐は自己双対でないと結論できることになる．「p 次錐と q 次錐が同型になるのはいつか？」という疑問はここから出てくる．この疑問の答えは定理 6 で明らかになる．

2.3 2 次錐の性質

2 次錐は他の p 次錐に比べて良い性質が多く知られている．ここでは本稿と関わりのある 2 次錐の性質を挙げる．すでに述べたように，2 次錐は等質かつ（標準内積に関して）自己双対であり，したがって対称錐である．2 次錐の自己同型写像も，その特徴付けが知られている [12]: $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が $AK_2^n = K_2^n$ または $AK_2^n = -K_2^n$ を満たすための必要十分条件は

$$A^\top JA = \mu J$$

となる $\mu > 0$ が存在することである．ただし J は $(1, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{R}^n$ を対角成分にもつ対角行列である．

2.4 p 次錐 $(p = 1, \infty)$ の性質

K_1^n と K_∞^n の性質を述べよう．まずこれらは多面錐であって，原点を端点にもち，端線が次のように列挙できる．K_1^n は $2(n-1)$ 本の端線

$$\{\alpha(1, \sigma e_i) : \alpha \geq 0\}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \sigma \in \{-1, 1\},$$

をもち（$e_1, \ldots, e_{n-1}$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ の標準基底），K_∞^n は 2^{n-1} 本の端線

$$\{\alpha(1, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) : \alpha \geq 0\}, \quad \sigma_i \in \{-1, 1\},$$

をもつ．$n \geq 4$ のときは，K_1^n と K_∞^n は端線の数が異なるため $K_1^n \not\simeq K_\infty^n$ $(n \geq 4)$ である．このことと補題 1 から，K_1^n および K_∞^n は $n \geq 4$ のとき自己双対でないこともわかる．

$n = 3$ のとき $K_1^3 \simeq K_\infty^3$ である．実際，K_1^3 を x_1, x_2 に関して $\sqrt{2}$ 倍に拡大して，さらに t 軸周りに 45 度の回転をほどこすと K_∞^3 を得る（図 1 を思い出そう）．

すなわち，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\cos(\pi/4) & -\sqrt{2}\sin(\pi/4) \\ 0 & \sqrt{2}\sin(\pi/4) & \sqrt{2}\cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

に対して $AK_1^3 = K_\infty^3$ が成り立つ．それでも K_1^3 と K_∞^3 は自己双対でないことが，「$\mathbb{R}^3$ の自己双対な多面錐は奇数本の端線をもつ」という Barker and Foran [13] の結果から従う．

本稿の主定理を示すにあたって重要な先行研究は，Gowda and Trott [14] が示した K_1^n と K_∞^n の自己同型群の構造である．

定理 2（Gowda and Trott [14]）． A が $\mathrm{Aut}(K_1^n)$ に属することと，A が以下の形で与えられることは同値である．

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0,\ P: \text{一般化置換行列}. \tag{2}$$

ここで $P \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ が一般化置換行列であるとは，ある置換行列 Q と対角成分が ± 1 の対角行列 D によって $P = DQ$ と書けることである．したがって，K_1^n と K_∞^n の自己同型群は一致する[2]:

$$\mathrm{Aut}(K_1^n) = \mathrm{Aut}(K_\infty^n).$$

この定理から K_1^n と K_∞^n は等質錐でないことが従う．たとえば，K_∞^n の内点 $x = (1, 0, \ldots, 0)$ は自己同型写像 (2) によって $(\alpha, 0, \ldots, 0)$ にしか写らないから，K_∞^n の内点 $y = (1, 1/2, \ldots, 1/2)$ に対して $y = Ax$ を満たす $A \in \mathrm{Aut}(K_\infty^n)$ は存在しない．

以下に，この節で得られた非等質性と非自己双対性の結果をまとめておこう．

補題 3． K_1^n と K_∞^n は等質でも自己双対でもない．

3. p 次錐の非対称性

この節では，冒頭に述べた「p 次錐は対称錐であるか？」という疑問について，以下の事実を証明してみよう．筆者らはもう少し簡単に示せると思ったが，ここでは Lyapunov rank の概念に頼る必要があり，それほど単純ではなかった．

[2] 一般に，凸錐 K の標準内積に対する双対錐を K^* とすると，$A \in \mathrm{Aut}(K)$ であることと，$A^{-\top} \in \mathrm{Aut}(K^*)$ であることは同値である．このことと式 (2) の行列は直交行列であることから $\mathrm{Aut}(K_1^n) = \mathrm{Aut}(K_\infty^n)$ がわかる．

命題 4． 2 次錐以外の p 次錐は対称錐でない．

証明． すでに K_1^n と K_∞^n $(n \geq 3)$ が対称錐でないことは補題 3 に述べたので，$p \neq 1, 2, \infty$ および $n \geq 3$ に対して，p 次錐 K_p^n が対称錐であると仮定して矛盾を導こう．$p \neq 1, \infty$ だからこの p 次錐は狭義凸である（2.1 節参照）．1 節に示した対称錐の分類 (i) から (v) のうち，狭義凸なものは 2 次錐しかない．このことから，狭義凸な対称錐は 2 次錐と同型なものに限られることを示すことができる．したがって，この p 次錐は 2 次錐と同型でなくてはならない．

すると，2 次錐はそれと異なる p 次錐と同型になりえないことを示すことができれば矛盾が得られる．そのためにここでは Lyapunov rank という幾何学的な量を用いることにする．Lyapunov rank は凸錐 K に対して定義され，自己同型群 $\mathrm{Aut}(K)$ の行列群としての次元（= 自己同型群の単位行列における接空間の次元）と定義される．p 次錐の Lyapunov rank は最近の研究 [14, 15] で明らかになった：

・2 次錐 K_2^n の Lyapunov rank は $(n^2 - n + 2)/2$.

・2 次錐以外の p 次錐の Lyapunov rank は 1.

特に，2 次錐とそれ以外の p 次錐は Lyapunov rank が異なることがわかる．ところが Lyapunov rank の定義から，二つの同型な凸錐の Lyapunov rank は一致しなくてはならない．したがって，2 次錐がそれと異なる p 次錐と同型であるのに Lyapunov rank が一致しないことは矛盾である．ゆえに 2 次錐以外の p 次錐が対称錐でないことが証明された．□

対称錐の分類と Lyapunov rank を用いると，「p 次錐は対称錐であるか？」という疑念は晴らすことができた．そこで，筆者らはもう少し踏み込んで p 次錐を調べることにした．今示した命題 4 を言いかえると，2 次錐以外の p 次錐は，等質でないか**または**自己双対でないという結論が得られる．筆者らはさらに「2 次錐以外の p 次錐は，等質でも自己双対でもない」のではないかと予想して，その証明を試みることにした．

最初にわかったことは，非等質性であった．本稿では別証明を与えるので詳細を省くが，以下の定理を使うと，上の命題 4 の証明で「対称錐」を「等質錐」にすり替えることができて，「2 次錐以外の p 次錐は等質錐でない」という結論が得られる．

定理 5（文献 [11]）． $n \geq 3$ に対して $\mathbb{R}^n$ 上の狭義凸な等質錐は 2 次錐と同型なものに限る．

なお，この定理の証明には T-代数 [16] という特別な行列代数による等質錐の特徴づけが用いられていることを補足しておく．

さらに欲張って「2 次錐以外の p 次錐は自己双対でない」ことも証明できないだろうか．補題 1 の後に述べたように，自己双対性は「p 次錐と q 次錐は同型かどうか」という議論と関わってくる．p と q がどちらも 2 以外になると Lyapunov rank は同じであるから，Lyapunov rank とは別の，同型写像に関して不変な量で，p 次錐と q 次錐を何らかの形で区別できるものがあることが望ましい．

4. 主定理とその帰結

1 節に示した疑問「p 次錐と q 次錐が同型になるのはいつか？ 同型であるとすれば，同型写像はどのような形をしているか？」について，以下にその答えを述べよう（Theorem 11, 文献 [1]）．

定理 6. $K_1^3 \simeq K_\infty^3$ であるという例を除いて，$n \geq 3$ に対して $K_p^n \simeq K_q^n$ となるのは $p = q$ であるときに限る．

K_1^3 と K_∞^3 の間の同型写像は，2.4 節にその一例を示した．$p = q$ の場合の（自己）同型写像は K_1^n のそれと同じになる：

定理 7. 2 次錐と異なる p 次錐 K_p^n の自己同型群について以下が成り立つ：

$$\mathrm{Aut}(K_p^n) = \mathrm{Aut}(K_1^n). \tag{3}$$

定理 7 は 2 次錐以外の p 次錐の自己同型群はどれも同じであるという，興味深い結果を与えている．これらの定理から，2 次錐以外の p 次錐の非等質性と非自己双対性は次のようにして証明できる．

系 8. 2 次錐以外の p 次錐は等質でなく自己双対でもない．

証明. 定理 7 の結論 $\mathrm{Aut}(K_p^n) = \mathrm{Aut}(K_1^n)$ および Gowda and Trott の結果（定理 2）により，p 次錐の自己同型写像は必ず式 (2) の形をしている．ゆえに K_p^n の内点 $x = (1, 0, \ldots, 0)$ は自己同型写像 (2) によって $(\alpha, 0, \ldots, 0)$ にしか写らないから，K_1^n や K_∞^n が等質でないのと同様の理由で，p 次錐 $(p \neq 2)$ は等質でない．

今，p 次錐が自己双対であると仮定する．すでに補題 3 より，K_1^n と K_∞^n は自己双対でないことがわかっているので $p \neq 1, \infty$ である．補題 1 によりある正定値実対称行列 A が存在して

$$AK_p^n = K_q^n,\ \ ただし\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

となる．このとき特に p 次錐と q 次錐が同型だから，定理 6 と $p \neq 1, \infty$ より $p = q = 2$ でなくてはならない．すなわち，p 次錐のうち 2 次錐のみが自己双対である． □

5. 同型写像の調べ方

最後に，定理 6 がどのようにして証明されるかを説明しよう．証明は，p 次錐と q 次錐の間に同型写像があるとして，その構造を絞り込んでいくことで，$p = q$ を示す（$K_1^3 \simeq K_\infty^3$ の場合を除く）ことが主な流れである．今，K_p^n と K_q^n の間に同型写像 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ があるとすれば

$$AK_p^n = K_q^n$$

である．この行列 A の構造を調べるためにどのような道具が使えるだろうか．

まず，一般性を失うことなく p の値を $p \in [1, 2]$ に限定して良い．なぜならば，$AK_p^n = K_q^n$ の両辺で，標準内積に関する双対をとると

$$A^{-\top} K_{p^*}^n = K_{q^*}^n,\ ただし\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$$

となり，p^* 次錐と q^* 次錐の同型写像 $A^{-\top}$ を得る．この双対の方で定理を証明しても，もとの定理の主張が得られるから $p \geq 2$ のときは双対に議論を取りかえれば良い（このとき $p^* \in [1, 2]$ となる）．

$p = 2$ の場合，2 次錐と q 次錐が同型であることになる．このとき $p = q = 2$ でなくてはならないことはすでに 3 節で Lyapunov rank を用いて説明した．

$p = 1$ の場合，p 次錐は多面錐なので，それと同型な q 次錐は再び多面錐でなくてはならない（したがって $q \in \{1, \infty\}$）．同型写像は端線を端線に写すから，端線の本数（2.4 節参照）を比較すれば，$K_1^3 \simeq K_\infty^3$ という例を除いて $p = q$ でなければならない．この場合は定理の主張が容易に確かめられた．すなわち，われわれが本当に興味があるのは $p \in (1, 2)$ の場合に，$p = q$ を示すことである．

$p \in (1, 2)$ の場合，K_p^n および K_q^n は多面錐でないから $q \in (1, \infty)$ でなくてはならない．このとき p 次錐の非自明な面はすべて端線なので端線の本数を比較

するという議論は使えない．しかし，次の命題に示すように，われわれは似たような発想を使って A の構造決定を試みることができる．

命題 9（Proposition 4, 文献 [1]）． $p, q \notin \{1, \infty\}$ と $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対して $AK_p^n = K_q^n$ であるとする．今，K_p^n の境界上の点 $(\|x\|_p, x)$（ただし $x \neq 0$）が A によって写された K_q^n の境界上の点を $(\|y\|_q, y)$ とする．このとき自然数 k に対して，以下の 2 条件は同値である．

(i) $\|\cdot\|_p$ は x のある近傍で C^k 級である．

(ii) $\|\cdot\|_q$ は y のある近傍で C^k 級である．

この命題の証明では，p 次錐の境界から原点を除いた集合を，$\mathbb{R}^n$ の部分多様体とみなして解析している．実はこの命題はより一般の多様体に対しても成り立つ．

命題 9 をもとに，p 次錐の境界上の点 $v = (\|x\|_p, x)$ に対して，上記の条件 (i) が成り立つ最大の整数 k を $r_p(v)$ と書こう：

$$r_p(v) = \max\{k : \|\cdot\|_p \text{ は } x \text{ のある近傍で } C^k \text{級}\}.$$

$r_p(v)$ は p 次錐の境界上の点 v における "微分可能性の階数" とみなせる．命題 9 の主張を言いかえれば，

$$r_p(v) = r_q(Av), \quad \forall v : K_p^n \text{の境界の点，} v \neq 0$$

と書ける．すなわち，同型写像 A は "微分可能性の階数" を保存するのである．

この命題を使うために，ℓ_p ノルムの微分可能性を調べよう．次の補題は容易に確かめられる．

補題 10（Lemma 10, 文献 [1]）． (i) $\|\cdot\|_p$ は任意の点 $x \neq 0$ のある近傍で C^1 級である．

(ii) $p \in (1, 2)$ のとき，$\|\cdot\|_p$ が点 x のある近傍で C^2 級であるための必要十分条件は $x_i \neq 0\ (\forall i)$ となることである．

(iii) $p \in [2, \infty)$ のとき，$\|\cdot\|_p$ は任意の点 $x \neq 0$ のある近傍で C^2 級である．

この補題を r_p を使って述べると，p 次錐の境界の点 $v = (\|x\|_p, x) \neq 0$ について，次の区別ができる．

・$p \in (1, 2)$ のときは，$x_i = 0$ なる i が存在するときは $r_p(v) = 1$ となり，それ以外のときは $r_p(v) \geq 2$ である．

・$p \in [2, \infty)$ のときは常に $r_p(v) \geq 2$ である．

三次元の場合に，この区別を示すと図 3 のようになる．この図では，$p \in (1, 2)$ のとき p 次錐の境界上で $r_p(v) = 1$ となる点を点線（4 本ある）で示していて，それ以外の点では $r_p(v) \geq 2$ である．さらに命題 9 と合わせると，p 次錐のこの区別が同型写像によって保存されたまま q 次錐に写される．今は $p \in (1, 2)$ の場合を考えているから，したがって q も同じく $q \in (1, 2)$ でなければならないことを結論できる．このことは，図 3 を使って説明すれば，p 次錐が図の左側の形になっていれば，それと同型な q 次錐も左側の形をしていなくてはならないということである．こうして，q の値を絞り込むことができた．

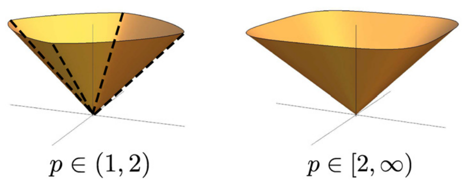

図 3　三次元上の p 次錐の境界上の点 $v \neq 0$ において点線上の点では $r_p(v) = 1$，それ以外では $r_p(v) \geq 2$

$p = q$ を示すために，ここから何が起こるか三次元の場合で見てみよう．図 3 の点線部（原点を除く）全体，すなわち p 次錐の境界上の点 $v \neq 0$ のうち $r_p(v) = 1$ となるもの全体の集合を E_p とすると，命題 9 は，同型写像 A が E_p を E_q に写すということを主張している：

$$AE_p = E_q. \tag{4}$$

p 次錐の断面（図 2）を思い出すと，この点線部 E_p（および E_q）はちょうど K_1^3 の 4 本の端線の和集合と一致する（原点を除く）．すると E_p および E_q の閉凸包は K_1^3 と一致するから，等式 (4) の両辺の閉凸包をとってみると，

$$AK_1^3 = K_1^3 \tag{5}$$

となる．興味深いことに，A は $\mathrm{Aut}(K_1^3)$ に属していることがわかった．$\mathrm{Aut}(K_1^3)$ の構造はすでに Gowda and Trott の結果（定理 2）からわかっており，A は次の形をしていることになる．

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0,\ P : \text{一般化置換行列}.$$

一般化置換行列は $\|Px\|_p = \|x\|_p$ を満たすから，A は $\mathrm{Aut}(K_p^3)$ の元でもある．つまり，

$$AK_p^3 = K_p^3$$

である．一方で，われわれは等式 $AK_p^3 = K_q^3$ から出発したのだから，これらを合わせれば

$$K_p^3 = K_q^3$$

となった．ゆえに，三次元の場合に定理 6 の主張 $p = q$ が得られた．しかも途中で得られた式 (5) は定理 7 をも同時に証明している．

この三次元での議論を経て，一般の n に対しては n に関する帰納法で証明を完了することができる．証明の流れは上記の三次元の場合と同様であるが，微分位相幾何学的な議論を要する．興味のある読者は文献 [1] を参照されたい．

6. さいごに

本稿の研究は「p 次錐は対称錐であるか」という議論から始まり，p 次錐の幾何学的な構造をいくつか明らかにした．特に p 次錐の自己同型群の解明は，さまざまな帰結を導く重要な結果である．凸錐の自己同型群を調べることは一般に難しい課題であるが，凸錐の幾何学を知るうえでは有益であろう．

5 節の主定理の証明は，本質的なところまで踏み込んで解説した．本稿では省略したが，命題 9 や最後の帰納法の部分は微分位相幾何学的な議論に頼っていて，より簡潔な他の証明があればとても面白いだろう．それでもこの議論は，他の凸錐の解析などにも役立つ副産物を与えると期待している．

謝辞　本稿の執筆の機会をくださった理化学研究所の奥野貴之先生，有益な助言をくださった筑波大学の高野祐一先生に感謝いたします．

参考文献

[1] M. Ito and B. F. Lourenço, "The automorphism group and the non-self-duality of p-cones," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **471**, pp. 392–410, 2019.
[2] P. Krokhmal, "Higher moment risk measures," *Quantitative Finance*, **7**, pp. 373–387, 2007.
[3] M. Kloft, U. Brefeld, S. Sonnenburg and A. Zien, "ℓ_p-norm multiple kernel learning," *Journal of Machine Learning Research*, **12**, pp. 953–997, 2011.
[4] G. Xue and Y. Ye, "An efficient algorithm for minimizing a sum of p-norms," *SIAM Journal on Optimization*, **10**, pp. 551–579, 2000.
[5] T. Tsuchiya, "A convergence analysis of the scaling-invariant primal-dual path-following algorithms for second-order cone programming," *Optimization Methods and Software*, **11**, pp. 141–182, 1999.
[6] L. Faybusovich, "Euclidean Jordan algebras and interior-point algorithms," *Positivity*, **1**, pp. 331–357, 1997.
[7] S. H. Schmieta and F. Alizadeh, "Extension of primal-dual interior point algorithms to symmetric cones," *Mathematical Programming*, **96**, pp. 409–438, 2003.
[8] M. Muramatsu, "On a commutative class of search directions for linear programming over symmetric cones," *Journal of Optimization Theory and Applications*, **112**, pp. 595-625, 2002.
[9] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
[10] X.-H. Miao, Y.-C. R. Lin and J.-S. Chen, "A note on the paper "The algebraic structure of the arbitrary-order cone"," *Journal of Optimization Theory and Applications*, **173**, pp. 1066–1070, 2017.
[11] M. Ito and B. F. Lourenço, "The p-cones in dimension $n \geq 3$ are not homogeneous when $p \neq 2$," *Linear Algebra and Its Applications*, **533**, pp. 326–335, 2017.
[12] R. Loewy and H. Schneider, "Positive operators on the n-dimensional ice cream cone," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **49**, pp. 375–392, 1975.
[13] G. P. Barker and J. Foran, "Self-dual cones in Euclidean spaces," *Linear Algebra and Its Applications*, **13**, pp. 147–155, 1976.
[14] M. S. Gowda and D. Trott, "On the irreducibility, Lyapunov rank, and automorphisms of special Bishop-Phelps cones," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **419**, pp. 172–184, 2014.
[15] M. S. Gowda and J. Tao, "On the bilinearity rank of a proper cone and Lyapunov-like transformations," *Mathematical Programming*, **147**, pp. 155-170, 2014.
[16] E. B. Vinberg, "The theory of homogeneous convex cones," *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, **12**, pp. 340–403, 1963 (English Translation).