非線形半正定値計画問題に対する安定化逐次二次半正定値計画法

山川　雄也

非線形半正定値計画問題は，半正定値計画問題，非線形計画問題，二次錐計画問題，線形計画問題などを含む広いクラスの最適化問題であり，制御，金融，統計，経済などの分野で現れる多くの最適化問題を記述することができるため，近年多くの研究者から注目を浴びている．特に，ここ数年の研究の動向としては，Karush-Kuhn-Tucker 条件のような従来の最適性条件とは異なる，点列最適性条件と呼ばれる概念が導入され，また，そのような条件を満たす点を求めるための手法が研究され始めている．本稿では，このような新しい最適性条件や解法について概要を述べる．

キーワード：非線形半正定値計画問題，非線形最適化，錐計画問題，半正定値錐，逐次二次計画法，点列最適性条件，AKKT 条件，TAKKT 条件

1. はじめに

本稿では，以下の最適化問題を取り上げる．

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{subject to} & g(x)=0,\ X(x)\succeq O \end{array} \tag{1}$$

ただし，関数 $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $X\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^d$ は二階連続的微分可能であるとし，集合 $\mathbb{S}^d$ を d 次対称行列の集合とする．また，$X(x)\succeq O$ は行列 $X(x)$ が半正定値であることを表す．一般に，対称行列 $M\in\mathbb{S}^d$ が半正定値であるとは，任意のベクトル $v\in\mathbb{R}^d$ に対して，$v^\top Mv\geq 0$ が成り立つことをいい，d 次半正定値行列の集合を $\mathbb{S}^d_+$ と表す．

問題 (1) は非線形半正定値計画問題 (Nonlinear Semidefinite Programming Problem: NSDP) と呼ばれる問題であり，半正定値計画問題 (Semidifinite Programming Problem: SDP)，非線形計画問題 (Nonlinear Programming Problem: NLP)，二次錐計画問題 (Second-Order Cone Programming Problem: SOCP)，線形計画問題 (Linear Programming Problem: LP) などを含む広いクラスの最適化問題である．特に，SDP は目的関数および制約関数は線形であるが，モデル記述能力が高いため応用範囲が広く，90 年代以降盛んに研究されている．また，SDP を解くためのソルバーも数多く開発されており，SeDuMi [1], SDPT3 [2], SDPA [3] などが有名である．計算機の発達に伴いさまざまな場面において SDP を解く需要は増えているが，一方で目的関数や制約関数に非線形性を伴うモデルも出現し，SDP では記述できないモデルを扱う需要も高まり始めている．問題 (1)（以降 NSDP (1) と呼ぶ）は，前述のような SDP では記述できない非線形性をもつモデルを扱うことができ，これにより応用範囲も広がりつつあるため，近年盛んに研究がされ始めている．

以降は，NSDP (1) の最適性条件である Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件や，これに関連する非線形最適化の基礎的概念を導入する．そして，ここ数年で話題となっている点列最適性条件と呼ばれる新しい概念を紹介し，このような条件を満たす点を求めるための解法について概要を述べる．

やまかわ　ゆうや
京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
〒 606–8501 京都府京都市左京区吉田本町

2. NSDP に対する KKT 条件

ここでは，主に NSDP (1) の最適性条件として知られる KKT 条件について紹介する．このために，以下にいくつかの記号を定義する．

(i) $v\in\mathbb{R}^p$ に対し，$[v]_j$ $(j=1,\dots,p)$ は v の第 j 成分を表す．

(ii) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^{q\times r}$ の内積であり，$\langle X,Y\rangle:=\mathrm{tr}(X^\top Y)$ $(X,Y\in\mathbb{R}^{q\times r})$ で定義される．

(iii) $g(x)\in\mathbb{R}^m$ は，$g_j\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(j=1,\dots,m)$ により $g(x)=[g_1(x),\dots,g_m(x)]^\top$ と表される．

(iv) $\nabla g(x)\in\mathbb{R}^{n\times m}$ は，g の x での転置ヤコビ行列で，$\nabla g(x):=[\nabla g_1(x),\dots,\nabla g_m(x)]$ と定義される．

(v) $A_j(x)\in\mathbb{S}^d$ $(j=1,\dots,n)$ は，$A_j(x):=\frac{\partial X(x)}{\partial[x]_j}$ で定義される行列である．

(vi) $\mathcal{A}(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^d$ は，$\mathcal{A}(x)u := [u]_1 A_1(x) + \ldots + [u]_n A_n(x)$ $(u \in \mathbb{R}^n)$ で定義される作用素である．

(vii) $\mathcal{A}^*(x)\colon \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^n$ は，$\mathcal{A}(x)$ の共役作用素であり，$\mathcal{A}^*(x)U := [\langle A_1(x), U\rangle, \ldots, \langle A_n(x), U\rangle]^\top$ $(U \in \mathbb{S}^d)$ で定義される．

(viii) $\lambda_j^Q(M)$ $(j = 1, \ldots, d)$ は行列 $M \in \mathbb{S}^d$ の固有値で，M を直交行列 Q により対角化した際に得られる対角行列の第 j 番目の対角要素を表す．

続いて，ラグランジュ関数 $L\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ を以下に定義する．

$$L(v) := f(x) - \langle g(x), y\rangle - \langle X(x), Z\rangle \tag{2}$$

ただし，$v := (x, y, Z)$ であり，$y \in \mathbb{R}^m$ および $Z \in \mathbb{S}^d$ は，それぞれ $g(x) = 0$ および $X(x) \succeq O$ に対するラグランジュ乗数と呼ばれる．ラグランジュ関数 L の点 v における x に関する勾配は

$$\nabla_x L(v) = \nabla f(x) - \nabla g(x)y - \mathcal{A}^*(x)Z$$

で与えられる．以上を用いると，NSDP (1) の KKT 条件は次で与えられる．

定義 1. 点 $x \in \mathbb{R}^n$ において KKT 条件が成り立つとは，ある $y \in \mathbb{R}^m$ および $Z \in \mathbb{S}^d$ が存在して，

$$\begin{gathered} \nabla_x L(v) = 0,\ g(x) = 0,\ \langle X(x), Z\rangle = 0, \\ X(x) \succeq O,\ Z \succeq O \end{gathered} \tag{3}$$

が満たされることである．

以降，KKT 条件を満たす点 x のことを KKT 点と呼ぶ．この KKT 条件は，ある仮定の下で最適性の必要条件（つまり，点 x が NSDP (1) の局所的最適解であれば満たされる条件）となることが知られている．しかし，一般に KKT 条件は最適性の十分条件とはならない．ただし，NSDP (1) が凸計画問題となる場合は，KKT 条件は最適性の十分条件となる．

さて，先ほど定義した KKT 条件は，ある仮定の下で最適性の必要条件となることを述べたが，ここで言うある仮定とは，一般的に制約想定と呼ばれる条件のことである．この制約想定は，KKT 条件が最適性の必要条件となるための十分条件であり，これまでにさまざまなものが提案されている．ここでは，最も代表的な制約想定の一つとして知られる Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification (MFCQ) を紹介する．

定義 2. NSDP(1) の実行可能点 x において MFCQ が成り立つとは，

$$\begin{aligned} &\mathrm{rank}(\nabla g(x)) = m, \\ &\exists d \in \mathbb{R}^n\ [\nabla g(x)^\top d = 0,\ X(x) + \mathcal{A}(x)d \succ O] \end{aligned}$$

が満たされることである．

いま，点 x に対して集合 $\Lambda(x)$ を $\Lambda(x) := \{(y, Z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^d\colon (x, y, Z)$ は式 (3) を満たす $\}$ と定義しよう．MFCQ は集合 $\Lambda(x)$ が非空かつ有界となるための十分条件であることが知られている [4]．この性質から，MFCQ は KKT 条件が最適性の必要条件となるための十分条件であることがわかる．また，MFCQ は NSDP (1) の解法の大域的収束性を議論する際にも重要な役割を果たしている．NSDP (1) に対する解法はこれまでにいくつも提案されており，それらの多くは，主双対内点法，逐次二次計画法，拡張ラグランジュ法などの非線形最適化の解法に基づいたものである [5]．これらの既存手法の主な目的は，NSDP (1) の KKT 点を求めることであり，多くの場合は MFCQ を仮定して大域的収束性を証明している．

3. NSDP に対する点列 KKT 条件

前節では，NSDP (1) の最適性の必要条件として，制約想定の下で成り立つ KKT 条件を与えたが，近年では制約想定を仮定せず成り立つ最適性の必要条件として点列 KKT 条件という概念が提案されている．点列 KKT 条件は，いくつかの種類が提案されているが，ここでは Approximate KKT (AKKT) 条件と Trace Approximate KKT (TAKKT) 条件を紹介する．まず，AKKT 条件については以下のように定義される．

定義 3. 点 $x \in \mathbb{R}^n$ において AKKT 条件が成り立つとは，$g(x) = 0$ および $X(x) \succeq O$ が成り立ち，ある点列 $\{(x_k, y_k, Z_k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^d_+$ および直交行列 U, U_k $(k \in \mathbb{N})$ が存在し，

$$\begin{gathered} \lim_{k\to\infty} x_k = x,\ \lim_{k\to\infty} \nabla_x L(x_k, y_k, Z_k) = 0, \\ \forall j \in \{1, \ldots, d\}\ [\lambda_j^U(X(x)) > 0 \implies \\ \qquad \exists k_j \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_j\ \lambda_j^{U_k}(Z_k) = 0], \\ X(x) = U \mathrm{diag}[\lambda_1^U(X(x)), \ldots, \lambda_d^U(X(x))]U^\top, \\ Z_k = U_k \mathrm{diag}[\lambda_1^{U_k}(Z_k), \ldots, \lambda_d^{U_k}(Z_k)]U_k^\top, \\ \lim_{k\to\infty} U_k = U \end{gathered}$$

を満たすことである．

続いて，TAKKT 条件は以下のように定義される．

定義 4. 点 $x \in \mathbb{R}^n$ において TAKKT 条件が成り立つとは，$g(x) = 0$ および $X(x) \succeq O$ が成り立ち，ある点列 $\{(x_k, y_k, Z_k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^d_+$ が存在し，

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x, \quad \lim_{k\to\infty} \langle X(x_k), Z_k \rangle = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} \nabla_x L(x_k, y_k, Z_k) = 0$$

を満たすことである．

AKKT 条件および TAKKT 条件を満たす点 x のことを，それぞれ AKKT 点および TAKKT 点と呼ぶ．

先にも述べたが，AKKT 条件および TAKKT 条件は，制約想定を仮定せずに導き出される最適性の必要条件である．したがって，MFCQ を仮定したときのように $\Lambda(x)$ が非空かつ有界になる保証はない．実際，AKKT 条件および TAKKT 条件はともに点列 $\{(x_k, y_k, Z_k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^d_+$ によって特徴づけられており，ラグランジュ乗数に対応する点列 $\{y_k\}$ および $\{Z_k\}$ は，有界とは限らないことに注意してほしい．

ここまで，MFCQ などの制約想定が仮定されていない場合を想定してきたが，「制約想定が成り立つ場合には，AKKT 点や TAKKT 点は KKT 点となるのだろうか？」という疑問を抱く読者もいることかと思う．これに関する性質は，Andreani et al. [6] によって示されており，MFCQ の仮定の下で AKKT 点および TAKKT 点は KKT 点となることがわかっている．これはつまり，AKKT 点および TAKKT 点は，制約想定が成り立たないような問題（以下，退化した問題[1]と呼ぶ）に対して意味を成すといえる．

4. 安定化逐次二次半正定値計画法

これまで，NSDP に対する KKT 点を求めるための手法は数多く提案されているが，AKKT 点や TAKKT 点などの点列最適性条件を満たす点を求めるための手法はほとんど提案されていない．ここでは，AKKT 点または TAKKT 点を求めるための安定化逐次二次半正定値計画法（Stabilized Sequential Quadratic Semidefinite Programming Method, SSQSDP 法）について紹介する．先述したように，AKKT 点および TAKKT 点は退化した問題に対して意味を成すため，SSQSDP 法は退化した問題を解くための手法であることに注意されたい．この手法は，非線形最適化における逐次二次計画法（Sequential Quadratic Programming Method, SQP 法）に基づいているが，既存の手法とは異なり，以下のようないくつかの特徴的な性質をもつ．

- 各反復において部分問題は実行可能であり，かつ，厳密に解く必要がない．
- 制約想定を仮定せずに，AKKT 点または TAKKT 点への大域的収束性が保証される．

ここで説明する SSQSDP 法は，主に「探索方向の計算」，「点列 $\{x_k\}$ の更新」，「ラグランジュ乗数の点列 $\{y_k\}$ および $\{Z_k\}$ と各種パラメータの更新」の三つのステップから構成される．以下では，これらのステップについて説明する．

4.1 探索方向の計算

非線形最適化における SQP 法は，毎回の反復点において元の問題から導出される二次計画問題を部分問題として，これを解くことで探索方向を計算する．SSQSDP 法においても同様の枠組みで探索方向を計算するが，部分問題の生成方法が一般の SQP 法と異なる．この部分問題の生成に関して以下に述べる．現在の反復回数を $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし，k 回目の反復点を $v_k := (x_k, y_k, Z_k)$ としよう．まず，NSDP (1) に関する minmax 問題

$$\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \ \underset{(y,Z)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{S}^d_+}{\text{maximize}} \ L(x,y,Z)$$

を考える．ただし，L は式 (2) で定義したラグランジュ関数である．この問題は，NSDP (1) と本質的に同じ問題であることが簡単な計算によりわかる．一般の SQP 法では，この問題の目的関数 L に対して，

$$\widetilde{L}(\xi,\zeta,\Sigma) := \langle \nabla f(x_k), \xi \rangle + \frac{1}{2}\langle H_k \xi, \xi \rangle$$
$$- \langle \zeta, g(x_k) + \nabla g(x_k)^\top \xi \rangle - \langle \Sigma, X(x_k) + \mathcal{A}(x_k)\xi \rangle$$

のような二次近似関数 $\widehat{L}$ の minmax 問題

$$\underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \ \underset{(\zeta,\Sigma)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{S}^d_+}{\text{maximize}} \ \widetilde{L}(\xi,\zeta,\Sigma)$$

の解 $(\xi^*, \zeta^*, \Sigma^*)$ を求める．ただし，行列 $H_k \in \mathbb{S}^n$ は $\nabla^2_{xx} L(v_k)$ もしくはその近似である．そして，探索方向を $(\xi^*, \zeta^* - y_k, \Sigma^* - Z_k)$ と設定する．しかし，いま NSDP (1) は退化した問題を想定しており，このような問題に対して通常の非線形最適化の手法を用いると，ラグランジュ乗数が発散し，解へ収束しないことが多々ある．そこで，SSQSDP 法では

$$\widehat{L}(\xi,\zeta,\Sigma) := \langle \nabla f(x_k), \xi \rangle + \frac{1}{2}\langle H_k \xi, \xi \rangle$$
$$- \langle \zeta, g(x_k) + \nabla g(x_k)^\top \xi \rangle - \langle \Sigma, X(x_k) + \mathcal{A}(x_k)\xi \rangle$$
$$- \frac{\sigma_k}{2}\|\zeta - y_k\|^2 - \frac{\sigma_k}{2}\|\Sigma - Z_k\|_{\mathrm{F}}^2$$

のような二次近似関数 $\widehat{L}$ の minmax 問題

[1] 退化した問題は，KKT 条件を満たすようなラグランジュ乗数が存在するとは限らないため，一般的な非線形最適化の枠組みで扱うことが理論的に困難であると知られている．

$$\underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}}\ \underset{(\zeta,\Sigma)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{S}^d_+}{\text{maximize}}\ \widehat{L}(\xi,\zeta,\Sigma) \tag{4}$$

を考える．ただし，$\sigma_k > 0$ はパラメータである．この問題には，ラグランジュ乗数に関する近接項 $\frac{\sigma_k}{2}\|\zeta - y_k\|^2$ および $\frac{\sigma_k}{2}\|\Sigma - Z_k\|_{\mathrm{F}}^2$ が含まれている．これは，ラグランジュ乗数が発散していかないように抑制する効果があり，これによってラグランジュ乗数の計算を安定化させることができる [7]．よって，問題 (4) は安定化部分問題と呼ばれている．また，問題 (4) は

$$\begin{array}{ll} \underset{(\xi,\zeta,\Sigma)\in\mathcal{W}}{\text{minimize}} & \langle\nabla f(x_k),\xi\rangle + \frac{1}{2}\langle H_k\xi,\xi\rangle \\ & \qquad + \frac{\sigma_k}{2}\|\zeta\|^2 + \frac{\sigma_k}{2}\|\Sigma\|_{\mathrm{F}}^2 \\ \text{subject to} & g(x_k) + \nabla g(x_k)^\top\xi + \sigma(\zeta - y_k) = 0 \\ & X(x_k) + \mathcal{A}(x_k)\xi + \sigma(\Sigma - Z_k) \succeq O \end{array} \tag{5}$$

と等価である．SSQSDP 法では，これを部分問題として扱う．ただし，$\mathcal{W} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^d$ と定義する．問題 (5) は，二次半正定値計画問題と呼ばれるものであり，これを近似的に解くことで探索方向を計算する．

ここで注目すべきは，問題 (5) は各反復 k に対して必ず実行可能であり，これを厳密に解かなくても大域的収束性が保証されるという点である．既存の SQP 法では，各反復において部分問題が実行可能となる保証はなく，しかも部分問題の厳密解を得ることで大域的収束性が保証されるため，これらの点は SSQSDP 法がもつ利点であるといえる．

反復 k 回目における問題 (5) の近似解を $(\xi_k, \zeta_k, \Sigma_k)$，$x_k$ に関する探索方向を p_k としよう．このとき，探索方向は $p_k := \xi_k$ により与えられる．また，

$$\bar{y}_{k+1} := \zeta_k, \quad \bar{Z}_{k+1} := [\Sigma_k]_+ \tag{6}$$

については，次の反復でのラグランジュ乗数 y_{k+1} および Z_{k+1} の候補となる．ただし，$[M]_+ \in \operatorname{argmin}\{\|M - P\|_{\mathrm{F}} \colon P \in \mathbb{S}^d_+\}$ である．これらの更新方法については後に述べる．

4.2 点列 $\{x_k\}$ の更新

探索方向 p_k を計算した後，p_k 方向に沿って点 x_k を更新する．このとき，点列 $\{x_k\}$ は AKKT 点もしくは TAKKT 点へ近づいていくように更新をしたい．そこで，以下のメリット関数を導入する．

$$\begin{aligned} F(x;\sigma,y,Z) := f(x) &+ \frac{1}{2\sigma}\|\sigma y - g(x)\|^2 \\ &+ \frac{1}{2\sigma}\|[\sigma Z - X(x)]_+\|_{\mathrm{F}}^2 \end{aligned}$$

ただし，$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$\sigma > 0$, $y \in \mathbb{R}^m$, $Z \in \mathbb{S}^d$ はパラメータである．この関数 F は，Andreani et al. [6] における拡張ラグランジュ関数に対応しており，$\mathbb{R}^n$ 上で微分可能であることが知られている．また，探索方向 p_k はその降下方向，つまり，$\langle\nabla F(x_k;\sigma_k,y_k,Z_k),p_k\rangle < 0$ となることが示されている [4]．さらに，AKKT 点に関連する以下の定理が成り立つ．

定理 1（文献 [4]）**.** 点列 $\{\widehat{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\widehat{\sigma}_k\} \subset \mathbb{R}$, $\{\widehat{y}_k\} \subset \mathbb{R}^m$, $\{\widehat{Z}_k\} \subset \mathbb{S}^d_+$ は，$\nabla F(\widehat{x}_k;\widehat{\sigma}_k,\widehat{y}_k,\widehat{Z}_k) \to 0$ $(k \to \infty)$ を満たすとする．このとき，点列 $\{\widehat{x}_k\}$ が有界であるならば，その任意の集積点は AKKT 点となる．

定理 1 より，関数 F の停留点を求めること，すなわち，関数 F を最小化することが，AKKT 点への収束に繋がると期待できる．よって，適切な直線探索を用いてステップサイズ $\alpha_k > 0$ を決定し，$x_{k+1} := x_k + \alpha_k p_k$ と更新する．

4.3 ラグランジュ乗数の点列 $\{y_k\}$ および $\{Z_k\}$ と各種パラメータの更新

以下では，$k+1$ 反復目の点 $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ と，式 (6) により計算されたラグランジュ乗数の候補 $\bar{y}_{k+1} \in \mathbb{R}^m$ および $\bar{Z}_{k+1} \in \mathbb{S}^d_+$ をまとめて $\bar{v}_{k+1} := (x_{k+1}, \bar{y}_{k+1}, \bar{Z}_{k+1})$ と表記する．ここでは，$k+1$ 反復目のラグランジュ乗数 $y_{k+1} \in \mathbb{R}^m$ および $Z_{k+1} \in \mathbb{S}^d_+$ の計算方法と各種パラメータの更新方法について説明する．

まず，与えられた点 $v := (x,y,Z) \in \mathcal{W}$ と TAKKT 点との距離を測るため

$$\begin{aligned} \Phi(v) := \|g(x)\| &+ \max\{\lambda_{\max}(-X(x)), 0\} \\ &+ \|\nabla_x L(v)\| + |\langle X(x), Z\rangle| \end{aligned}$$

を定義する．この定義より，以下の定理が成り立つ．

定理 2（文献 [4]）**.** 点列 $\{\widehat{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\widehat{y}_k\} \subset \mathbb{R}^m$, $\{\widehat{Z}_k\} \subset \mathbb{S}^d_+$ は，$\Phi(\widehat{x}_k,\widehat{y}_k,\widehat{Z}_k) \to 0$ $(k \to \infty)$ を満たすとする．このとき，点列 $\{\widehat{x}_k\}$ が有界であるならば，その任意の集積点は TAKKT 点となる．

AKKT 点との距離の測り方については，定理 1 の性質を利用する．以下では，これらの性質を用いて，ラグランジュ乗数の点列 $\{y_k\}$ および $\{Z_k\}$ と各種パラメータを更新するための手法を考える．この手法では，

(a) x_{k+1} が x_k に比べて TAKKT 点へ近づいている
(b) x_{k+1} が x_k に比べて AKKT 点へ近づいている
(c) x_{k+1} が，x_k に比べて TAKKT 点にも AKKT 点にも近づいていない（つまり，前述の (a) と (b) のどちらにも該当しない）

の三つの場合に分けることで，それぞれの状況に応じた更新方法を採用する．したがって，(a), (b) のどちらに該当するのかを判定する必要があるため，(a) に該当するかどうかを判定するための基準としてパラメータ ϕ_k を，(b) に該当するかどうかを判定するための基準としてパラメータ γ_k を導入する．

いま，定理 2 の性質を考慮すると，$\Phi(\bar{v}_{k+1})$ が何かしらの基準値よりも小さければ (a) と判定しても良さそうである．したがって，$\Phi(\bar{v}_{k+1}) \leq \phi_k$ が成り立てば (a) と判定する．これにより，ラグランジュ乗数の候補 $\bar{y}_{k+1}$ および $\bar{Z}_{k+1}$ が良い傾向であると見なし，これらを $k+1$ 反復目のラグランジュ乗数として採用する．そして，次の反復でさらに厳しい基準を課すために $\phi_{k+1} := \frac{1}{2}\phi_k$ と減少するように更新する．

次に，定理 1 に注目すると，$\|\nabla F(x_{k+1}; \sigma_k, y_k, Z_k)\|$ が何かしらの基準値よりも小さければ (b) と判定しても良さそうである．したがって，$\|\nabla F(x_{k+1}; \sigma_k, y_k, Z_k)\| \leq \gamma_k$ が成り立てば (b) と判定する．前節でも述べたが，ここでは F の最小化が行われているということ，そして，F は拡張ラグランジュ関数であるということに注意してほしい．これを考慮すると，拡張ラグランジュ法に基づいた更新方法を採用することが妥当であろう．したがって，ラグランジュ乗数を $y_{k+1} := \Pi_C(y_k - \frac{1}{\sigma_k} g(x_{k+1}))$, $Z_{k+1} := \Pi_D(Z_k - \frac{1}{\sigma_k} X(x_k))$，パラメータを $\sigma_{k+1} := \frac{1}{2}\sigma_k$ と更新する．ただし，$C := \{y \in \mathbb{R}^m : -r \leq [y]_j \leq r,\ j = 1, \ldots, m\}$, $D := \{Z \in \mathbb{S}^d : O \preceq Z \preceq rI\}$, $r \gg 0$ は定数，I は単位行列，Π_M は凸集合 M への凸射影を表す．これらは，ラグランジュ乗数の有界性が保証されていないことによる $\{y_k\}$ と $\{Z_k\}$ の発散を抑制する役割を担っている．そして，次の反復でさらに厳しい基準を課すために $\gamma_{k+1} := \frac{1}{2}\gamma_k$ と減少するように更新する．

最後に，(c) の場合は，期待よりも良い傾向ではないため，現状を維持するような更新を行う．

以上をまとめると以下のような更新手法となる．

Procedure 1.

Step 1: もし，$\Phi(\bar{v}_{k+1}) \leq \phi_k$ であれば，$y_{k+1} := \bar{y}_k$, $Z_{k+1} := \bar{Z}_k$, $\sigma_{k+1} := \sigma_k$, $\phi_{k+1} := \frac{1}{2}\phi_k$, $\gamma_{k+1} := \gamma_k$ として終了する．

Step 2: もし，$\|\nabla F(x_{k+1}; \sigma_k, y_k, Z_k)\| \leq \gamma_k$ であれば，$y_{k+1} := \Pi_C(y_k - \frac{1}{\sigma_k} g(x_{k+1}))$, $Z_{k+1} := \Pi_D(Z_k - \frac{1}{\sigma_k} X(x_k))$, $\sigma_{k+1} := \frac{1}{2}\sigma_k$, $\phi_{k+1} := \phi_k$, $\gamma_{k+1} := \frac{1}{2}\gamma_k$ として終了する．

Step 3: $y_{k+1} := y_k$, $Z_{k+1} := Z_k$, $\sigma_{k+1} := \sigma_k$, $\phi_{k+1} := \phi_k$, $\gamma_{k+1} := \gamma_k$ として終了する．

4.4 SSQSDP 法

これまでに説明した各ステップを組み合わせると，SSQSDP 法は以下のようになる．

SSQSDP 法

Step 0: $r \gg 0$ をとり，$v_0 := (x_0, y_0, Z_0) \in \mathcal{W}$, $\bar{y}_0 := y_0$, $\bar{Z}_0 := Z_0$, $\sigma_0 > 0$, $\phi_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, $k := 0$ を設定する．

Step 1: v_k が終了条件を満たせば終了する．

Step 2: 適切な H_k をとり，部分問題 (5) を解く．そして，近似解 $(\xi_k, \zeta_k, \Sigma_k)$ を得て，$p_k := \xi_k$, $\bar{y}_k := \zeta_k$, $\bar{Z}_k := [\Sigma_k]_+$ と設定する．

Step 3: 直線探索により関数 F の値が減少するステップサイズ α_k を計算し，$x_{k+1} := x_k + \alpha_k p_k$ と更新する．

Step 4: $y_{k+1}, Z_{k+1}, \sigma_{k+1}, \phi_{k+1}, \gamma_{k+1}$ を Procedure 1 により計算する．

Step 5: $k \leftarrow k+1$ として，Step 1 へ戻る．

また，SSQSDP 法は，制約想定を含まない適切な仮定の下で大域的収束性が示される．

5. おわりに

本稿では，主に NSDP (1) に対する点列最適性条件や，そのような条件を満たす点を求めるための SSQSDP 法を紹介した．SSQSDP 法の大域的収束性については，紙面の都合上，詳しく述べることはできなかったが，詳細は文献 [4] を参照して頂きたい．

今後は，本稿で提案した SSQSDP 法に対する局所的超一次収束性を示すことや，SSQSDP 法を実装したソルバーの開発などに挑戦していきたい．

謝辞　本稿を執筆する機会を下さりました編集委員の先生方に，この場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

[1] J. F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones," *Optimization Methods and Software*, **11**, pp. 625–653, 1999.

[2] K. C. Toh, M. J. Todd and R. H. Tütüncü, "SDPT3–a Matlab software package for semidefinite programming, version 1.3," *Optimization Methods and Software*, **11**, pp. 545–581, 1999.

[3] M, Yamashita, K. Fujisawa and M. Kojima, "Implementation and evaluation of SDPA 6.0 (Semidefinite Programming Algorithm 6.0)," *Optimization Methods and Software*, **18**, pp. 491–505, 2010.

[4] Y. Yamakawa and T. Okuno, "Global convergence of a stabilized sequential quadratic semidefinite programming method for nonlinear semidefinite programs without constraint qualifications," *arXiv e-prints*, September 2019, https://arxiv.org/abs/1909.13544.

[5] H. Yamashita and H. Yabe, "A survey of numerical methods for nonlinear semidefinite programming," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **58**, pp. 24–60, 2015.

[6] R. Andreani, G. Haeser and D. S. Viana, "Optimality conditions and global convergence for nonlinear semidefinite programming," *Mathematical Programming*, **180**, pp. 203–235, 2020.

[7] P. E. Gill and D. P. Robinson, "A globally convergent stabilized SQP method," *SIAM Journal on Optimization*, **23**, pp. 1983–2010, 2013.