半正定値最適化問題に対する切除平面法と混合整数半正定値最適化問題への拡張

小林　健

半正定値最適化問題は線形最適化問題や凸 2 次最適化問題，2 次錐最適化問題などを含む広いクラスの最適化問題である．近年，半正定値最適化問題に整数制約を追加した混合整数半正定値最適化問題を解く有効なアプローチとして，半正定値最適化問題に対する切除平面法を拡張した手法が研究されている．そこで本稿では半正定値最適化問題の基本事項と半正定値最適化問題に対する切除平面法について解説する．その後，切除平面法の枠組みが混合整数半正定値最適化問題の解法として自然に拡張できることについて述べ，混合整数半正定値最適化問題に関する研究の動向についても紹介する．

キーワード：半正定値最適化問題，切除平面法，混合整数半正定値最適化問題

1. はじめに

半正定値最適化問題（Semidefinite Optimization Problem; SDP[1]）とは，対称行列に関する線形制約と半正定値制約のもとで目的関数を最小化あるいは最大化する最適化問題である．この問題は線形最適化問題 (Linear Optimization Problem; LP) や凸 2 次最適化問題，2 次錐最適化問題などさまざまな凸最適化問題を含み，工学の諸分野で現れる多くの最適化問題が SDP として表現される [1].

SDP 自体汎用性の高い問題であるが，SDP の拡張として整数制約を追加した混合整数半正定値最適化問題 (Mixed-integer Semidefinite Optimization Problem; MISDP) の研究がここ数年活発に行われている．MISDP はさまざまな混合整数凸最適化問題を含み，その問題記述能力の高さから多様な領域で応用されている．このような状況とあわせて MISDP の解法の研究も近年行われており，その有効なアプローチの一つとして SDP に対する切除平面法 [2] を拡張した手法が用いられている [3, 4].

そこで本稿では切除平面法の研究への足掛かりとして，SDP に対する切除平面法 [2] とその MISDP への拡張について解説する．はじめに導入として SDP の基本的な事項について説明し，その後 SDP に対する切除平面法のアルゴリズムとその性質について述べる．次に SDP に対する切除平面法が MISDP の解法として自然に拡張できることについて述べ，最後に MISDP に関する研究の進展について紹介する．

本稿では以降，n 次元実ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$，$m \times n$ 実行列全体の集合を $\mathbb{R}^{m\times n}$，$n \times n$ 実対称行列全体の集合を $\mathcal{S}^n$ と表し，$\top$ はベクトルまたは行列の転置を表す．また正の整数 n に対して，$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．適当なサイズの単位行列を $\boldsymbol{I}$ と表す．対称行列 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{S}^n$ に対し，$\boldsymbol{M}$ の最大固有値と最小固有値をそれぞれ $\lambda_{\max}(\boldsymbol{M})$，$\lambda_{\min}(\boldsymbol{M})$ と表す．二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ の内積を $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{b} := \sum_{i=1}^n a_i b_i$ とし，二つの対称行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{S}^n$ の内積を $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} := \mathrm{Tr}(\boldsymbol{AB}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}$ と定義する．ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ のユークリッドノルムを $\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{a}}$ と表す．

2. 準備

本節では準備として半正定値行列の定義といくつかの重要な性質について説明する．定理の証明やより詳細な説明は文献 [5] などを参照されたい．

定義 1（**半正定値行列**）**.** ある対称行列 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{S}^n$ に対し，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ で

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} \geq 0$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{M}$ を**半正定値行列**といい，$\boldsymbol{M} \succeq \boldsymbol{O}$ と表す．

こばやし　けん
株式会社富士通研究所 人工知能研究所
〒 211–8588 神奈川県川崎市上小田中 4–1–1
ken-kobayashi@fujitsu.com

[1] 本稿ではこれまでの慣例に従って半正定値計画問題 (SemiDefinite Programming Problem) に対応する略称である SDP を用いる．同様に線形最適化問題の略称には LP を用いる．

定義 2（正定値行列）． ある対称行列 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{S}^n$ に対し，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なる任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ で

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} > 0$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{M}$ を**正定値行列**といい，$\boldsymbol{M} \succ \boldsymbol{O}$ と表す．

半正定値行列の定義と同値な条件として以下のことが知られる：

定理 3. 対称行列 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{S}^n$ に関して，以下 四つの条件は同値である．

(a) $\boldsymbol{M} \in \mathcal{S}^n$ が半正定値行列である．
(b) $\boldsymbol{M}$ の固有値がすべて非負である．
(c) ある直交行列 $\boldsymbol{Q}$ と対角成分が非負の対角行列 $\boldsymbol{D}$ を用いて $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}$ と書ける．
(d) ある正方行列 $\boldsymbol{S}$ を用いて，$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{S}$ と書ける．

現実の問題を SDP として定式化する際，Schur 補行列がよく用いられる．以下では Schur 補行列の定義とその性質について説明する．

定義 4（Schur 補行列）． 行列 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

とブロック行列として表されているとする．$\boldsymbol{A}$ が正則行列であるとき，

$$\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{1}$$

を $\boldsymbol{M}$ の $\boldsymbol{A}$ に関する **Schur 補行列** といい，$\boldsymbol{M}/\boldsymbol{A}$ と表す．

定理 5. 対称行列 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{S}^n$ が

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^\top & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

と表されているとする．$\boldsymbol{A} \succ \boldsymbol{O}$ のとき

$$\boldsymbol{M} \succeq \boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{M}/\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{O}$$

が成り立つ．

3. 半正定値最適化問題の等式標準形

本節では線形最適化問題 (LP) と対比して，SDP の等式標準形について説明する．LP は最も基本的な最適化問題で，等式標準形は以下のように定式化される：

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & \text{(2a)} \\ \text{制約条件} \quad & \boldsymbol{a}_p^\top \boldsymbol{x} = b_p \quad \forall p \in [m], & \text{(2b)} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. & \text{(2c)} \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a}_p \in \mathbb{R}^n \ (p \in [m]), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ は所与のデータとする．LP の等式標準形 (2) は $\boldsymbol{x}$ に関する非負制約と等式制約のもとで線形関数 $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ を最小化する最適化問題である．

これに対して SDP の等式標準形は以下のように定式化される：

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{X} & \text{(3a)} \\ \text{制約条件} \quad & \boldsymbol{A}_p \bullet \boldsymbol{X} = b_p \quad \forall p \in [m], & \text{(3b)} \\ & \boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}. & \text{(3c)} \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{C} \in \mathcal{S}^n, \boldsymbol{A}_p \in \mathcal{S}^n \ (p \in [m]), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ は所与のデータとする．LP に対して SDP は半正定値制約と等式制約のもとで線形関数 $\boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{X}$ を最小化する最適化問題である．LP と SDP の変数と制約条件の対応関係は表 1 のようにまとめられる．

表 1　変数と制約条件の対応関係

	線形最適化問題	半正定値最適化問題
変数	n 次元ベクトル	$n \times n$ 対称行列
制約	等式制約，非負制約	等式制約，半正定値制約

SDP が LP の一般化となっていることは，以下の事実から確認できる．あるベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，各成分を対角成分に並べた対角行列を $\mathrm{Diag}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}^n$ と表す．このとき非負制約について

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \mathrm{Diag}(\boldsymbol{x}) \succeq \boldsymbol{O},$$

が成り立つ．また 二つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ について

$$\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{q} = \mathrm{Diag}(\boldsymbol{p}) \bullet \mathrm{Diag}(\boldsymbol{q})$$

が成り立つ．したがって LP の等式標準形 (2) は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \mathrm{Diag}(\boldsymbol{c}) \bullet \mathrm{Diag}(\boldsymbol{x}) \\ \text{制約条件} \quad & \mathrm{Diag}(\boldsymbol{a}_p) \bullet \mathrm{Diag}(\boldsymbol{x}) = b_p \quad \forall p \in [m], \\ & \mathrm{Diag}(\boldsymbol{x}) \succeq \boldsymbol{O} \end{aligned}$$

と SDP の等式標準形 (3) に等価に変形可能で，SDP の等式標準形は LP の等式標準形を特殊ケースとして含むことがわかる．

4. 半正定値最適化問題の問題記述能力

ここでは半正定値制約に帰着できる制約について具体例をあげて説明し，SDP の問題記述能力について述べる．SDP の問題記述能力については文献 [6, 7] により詳細な解説が述べられている．

4.1 ベクトルに関する制約

Schur 補行列の性質（定理 5）を用いると，半正定値制約でベクトルに関するさまざまな制約を表現できる．

■2 次錐制約 非負変数 $t \geq 0$ と変数 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|\boldsymbol{x}\|$ を t 以下とする制約について考える：

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq t. \tag{4}$$

この形で表される制約は 2 次錐制約とよばれる．いま，

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} t\boldsymbol{I} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}^\top & t \end{pmatrix}$$

と対称行列 $\boldsymbol{M}$ を定義する．$t > 0$ のとき，Schur 補行列 $\boldsymbol{M}/(t\boldsymbol{I})$ は

$$\boldsymbol{M}/(t\boldsymbol{I}) = t - \boldsymbol{x}^\top (t\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{x} = t - \frac{1}{t}\|\boldsymbol{x}\|^2$$

となる．よって定理 5 から $t > 0$ のとき制約 (4) は

$$\begin{pmatrix} t\boldsymbol{I} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}^\top & t \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \tag{5}$$

として半正定値制約として表現できる．$t = 0$ の場合も半正定値行列の性質から

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}^\top & 0 \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つため，$t \geq 0$ のもとで 2 次錐制約 (4) と半正定値制約 (5) は等価である．

■凸 2 次制約 t を定数として，変数 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に関する凸 2 次関数を t 以下とする制約について考える：

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} \leq t. \quad \text{（ただし } \boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{O}\text{）} \tag{6}$$

2 次錐制約の場合と同様に，以下の行列を考える：

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{S}\boldsymbol{x} \\ (\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^\top & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} + t \end{pmatrix}.$$

ここで $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は $\boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}$ を満たす正方行列とする．このとき Schur 補行列 $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{I}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}/\boldsymbol{I} &= -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} + t - (\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{x} \\ &= -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} + t - \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となる．したがって定理 5 から凸 2 次制約 (6) は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{S}\boldsymbol{x} \\ (\boldsymbol{S}\boldsymbol{x})^\top & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} + t \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

と半正定値制約として表現できる．

これらの結果から，SDP は 2 次錐最適化問題 [8] や凸 2 次最適化問題 [9] も含む問題クラスであることがわかる．

4.2 固有値に関する制約

半正定値制約 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ は定理 3 から $\lambda_{\min}(\boldsymbol{X}) \geq 0$ と同値である．この性質を用いると，固有値に関するさまざまな制約を半正定値制約として記述できる．

■最小固有値の制約 t を定数として，変数 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^n$ に対して最小固有値 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{X})$ を t 以上とする制約は

$$\boldsymbol{X} - t\boldsymbol{I} \succeq \boldsymbol{O}$$

と表せる．同様に，変数 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^n$ の最大固有値に上限を与える制約も半正定値制約として表現できる．

■条件数制約 線形方程式の求解における係数行列の数値的な扱いやすさを表す指標として条件数 (condition number) がある．半正定値行列 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ の条件数 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})$ は最大固有値と最小固有値の比，すなわち

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{X}) := \lambda_{\max}(\boldsymbol{X})/\lambda_{\min}(\boldsymbol{X})$$

として定義される．条件数が大きい係数行列をもつ線形方程式は数値計算で扱いづらく悪条件であるとよばれる．条件数の上限を $\kappa \geq 1$ として，変数 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ の条件数 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})$ を κ 以下とする制約について考える：

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{X}) \leq \kappa. \tag{7}$$

このとき，半正定値行列 $\boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O}$ に対して

$$\begin{aligned} &\mathrm{cond}(\boldsymbol{X}) \leq \kappa \\ &\quad \Leftrightarrow \lambda_{\max}(\boldsymbol{X}) \leq \kappa\lambda_{\min}(\boldsymbol{X}) \\ &\quad \Leftrightarrow \exists\lambda \geq 0 \text{ s.t. } \lambda \leq \lambda_{\min}(\boldsymbol{X}) \text{ かつ } \lambda_{\max}(\boldsymbol{X}) \leq \kappa\lambda \end{aligned}$$

が成り立つことに注意すると，制約 (7) は，$\boldsymbol{X}$ の最小固有値に対応する補助変数 $\lambda \geq 0$ を新たに導入して

$$\kappa\lambda\boldsymbol{I} \succeq \boldsymbol{X} \succeq \lambda\boldsymbol{I}$$

と半正定値制約として表現できる．ここで $\boldsymbol{A} \succeq \boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \succeq \boldsymbol{O}$ を表すものとする．

5. 半正定値最適化問題に対する切除平面法

本節では SDP の解法として Konno et al. [2] が提

案した切除平面法について説明する．この切除平面法では半正定値制約を緩和し，半正定値制約を近似する線形制約を逐次追加しながら緩和問題を繰り返し解くことでもとの問題の最適解を得る．

5.1 切除平面法のアルゴリズム

ここでは以下の双対標準形を解く切除平面法のアルゴリズムについて述べる：

$$\text{最大化} \quad \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \tag{8a}$$
$$\text{制約条件} \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{C} - \sum_{p\in[m]} \boldsymbol{A}_p y_p \succeq \boldsymbol{O}. \tag{8b}$$

ただし $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ は変数である．切除平面法ではまず半正定値制約 (8b) を $\boldsymbol{y}$ に関する線形制約に置き換えた以下の実行可能領域を定義する：

$$\mathcal{Y} := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})) \geq \boldsymbol{0}\}.$$

ここで $\mathrm{diag}(\boldsymbol{M})$ は正方行列 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の対角成分からなるベクトルとする．$\mathcal{Y}$ が問題 (8) の実行可能領域を含むことは，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) \succeq \boldsymbol{O} \Rightarrow \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})) \geq \boldsymbol{0}$$

が成り立つことに基づく．切除平面法では実行可能領域 $\mathcal{Y}$ に対して，以下の仮定をおく：

仮定 6. 実行可能領域 $\mathcal{Y}$ は有界.

実行可能領域 $\mathcal{Y}$ を定義したのち，切除平面法では以下の緩和問題を解く：

$$\text{最大化} \quad \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \tag{9a}$$
$$\text{制約条件} \quad \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}. \tag{9b}$$

問題 (9) は線形制約のみもつ LP であるため，単体法などの効率的な解法を適用できる，$\mathcal{Y} = \emptyset$ のとき（すなわち問題 (9) が実行不能のとき）もとの問題 (8) も実行不能である．一方 $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ の場合，仮定 6 から問題 (9) は最適解 $\hat{\boldsymbol{y}}$ をもつ[2]．

最適解 $\hat{\boldsymbol{y}}$ が得られたら, 続いてもとの問題 (8) に対する $\hat{\boldsymbol{y}}$ の実行可能性を確認する．もし $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{y}})) \geq 0$（すなわち $\hat{\boldsymbol{y}}$ が制約 (8b) を満たす）ならば，$\hat{\boldsymbol{y}}$ は問題 (8) の最適解である[3]．この場合，切除平面法は $\hat{\boldsymbol{y}}$ を問題 (8) の最適解として出力しアルゴリズムを終了する．そうでない場合，$\hat{\boldsymbol{y}}$ を取り除く線形制約を問題 (9) の制約に追加して実行可能領域を更新する．$\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{y}})) < 0$ の場合，$\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{y}}))$ に対応する固有ベクトルを $\hat{\boldsymbol{d}}$ （ただし $\|\hat{\boldsymbol{d}}\| = 1$）とすると

$$\hat{\boldsymbol{d}}^\top \boldsymbol{A}(\hat{y})\hat{\boldsymbol{d}} = \lambda_{\min}(\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{y}}))\|\boldsymbol{d}\|^2 = \lambda_{\min}(\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{y}})) < 0$$

が成り立つ．このベクトル $\hat{\boldsymbol{d}}$ を用いて，切除平面法は解 $\hat{\boldsymbol{y}}$ を取り除く線形制約として

$$\hat{\boldsymbol{d}}^\top \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})\hat{\boldsymbol{d}} \geq 0 \tag{10}$$

を問題 (9) の制約に追加する．ここで半正定値行列の定義からもとの問題 (8) の任意の実行可能解は制約 (10) を満たす．したがって制約 (10) は解 $\hat{\boldsymbol{y}}$ と問題 (8) の実行可能領域を分離する制約となっている．制約 (10) を問題 (9) の制約に追加したのち，切除平面法は再び問題 (9) を解きなおす．この手続きを $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{y}}))$ が十分 0 に近づくまで（十分小さい定数 $\varepsilon \geq 0$ に対して $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{y}})) > -\varepsilon$ が成り立つまで）繰り返す．切除平面法のアルゴリズムを Algorithm 1 にまとめる．

Algorithm 1 問題 (8) に対する切除平面法

Step 0（初期化） $k \leftarrow 1$ とし，許容誤差 $\varepsilon \geq 0$ と初期実行可能領域 $\mathcal{F}_1 \leftarrow \mathcal{Y}$ を設定する.

Step 1（緩和問題の求解） 以下の最適化問題を解く：

$$\boldsymbol{y}^k \in \arg\max\{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}_k\}.$$

Step 2（実行可能性の判定）

- **(a)** $\mathcal{F}_k = \emptyset$（実行不能）ならば計算を終了する.
- **(b)** $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}^k)) \geq -\varepsilon$ ならば $\boldsymbol{y}^k$ を ε-最適解として出力し計算を終了する.

Step 3（切除平面の生成） 実行可能領域 $\mathcal{F}_k$ を

$$\mathcal{F}_{k+1} \leftarrow \mathcal{F}_k \cap \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; (\boldsymbol{d}^k)^\top \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{d}^k \geq 0\right\},$$

と更新する．ここで $\boldsymbol{d}^k$ は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}^k)$ の最小固有値に対応する固有ベクトル（ただし $\|\boldsymbol{d}^k\| = 1$）とする.

Step 4 $k \leftarrow k+1$ とし，Step 1 に戻る.

5.2 切除平面法の収束性

仮定 6 のもとで，Algorithm 1 の収束性について以下二つの命題を示すことができる．証明の詳細は文献 [2, 4] を参照されたい.

定理 7. 任意の $\varepsilon > 0$ のもとで Algorithm 1 は有限回の反復回数で終了する.

定理 8. $\varepsilon = 0$ のもとで Algorithm 1 が無限点列 $\{\boldsymbol{y}^k\}$ を生成した場合，その任意の集積点は問題 (8) の最適解と一致する.

[2] 有界な閉集合上の連続関数は最大値をとるため.

[3] 緩和問題の最適解がもとの問題の制約をすべて満たすとき，その解はもとの問題の最適解である.

6. 混合整数半正定値最適化問題への切除平面法の拡張

切除平面法の利点は，適用する問題の拡張が容易であるという点である．ここでは SDP の拡張として，双対標準形 (8) における変数 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ のいくつかの成分に 0-1 整数制約を追加した以下の MISDP に切除平面法 (Algorithm 1) を適用することを考える：

$$\begin{aligned} &\text{最大化} \quad \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} && \text{(11a)} \\ &\text{制約条件} \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) \succeq \boldsymbol{O}, && \text{(11b)} \\ &\qquad\qquad y_p \in \{0,1\} \quad \forall p \in B. && \text{(11c)} \end{aligned}$$

ここで $B \subseteq [m]$ は 0-1 整数制約を課す成分 y_p の添字集合とする．問題 (11) に対して半正定値制約 (11b) を $\boldsymbol{y}$ に関する線形制約に置き換えた実行可能領域を

$$\mathcal{Y} := \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})) \geq \boldsymbol{0},\ \text{制約 (11c)} \right\}$$

と定義すると，仮定 6 のもとで切除平面法 (Algorithm 1) を問題 (11) にそのまま適用できる．問題 (11) に切除平面法を適用した場合，各反復で解く緩和問題は LP ではなく混合整数線形最適化問題となるが，問題が大規模でなければ高性能な混合整数最適化ソルバーを用いて実用上は解くことができる．

7. 混合整数半正定値最適化問題の研究動向

問題 (11) のように定式化される MISDP は，半正定値制約でさまざまな非線形制約を表現可能であるのに加えて整数制約で “する/しない” という意思決定変数を扱うことができる．この問題記述能力の高さから MISDP は多様な領域で応用されており，統計的変数選択 [10]，制御 [11]，圧縮センシング [12]，ロバスト構造設計 [13]，スケジューリング [14] などに適用されている．

この状況とあわせて MISDP に対する解法も現在盛んに研究されており，切除平面法は有効なアプローチの一つとして用いられている．著者らは SDP に対する切除平面法と分枝限定法を組み合わせた分枝切除法を提案した [4]．MATLAB を用いたモデリング言語 YALMIP では，切除平面法に基づいて MISDP を解く機能 CUTSDP を搭載している [15]．また切除平面法に基づく MISDP の汎用ソルバーとして Julia 言語を用いたソルバー Pajarito が公開されている [3]．スパース主成分分析やスパース共分散構造選択問題など特定の MISDP に対する解法も提案されており，これらの解法も切除平面法に基づいている [16, 17]．MISDP に対する切除平面法とは異なるアプローチとしては内点法と分枝限定法による解法の研究もあり，SCIP-SDP という汎用ソルバーが公開されている [18].

8. おわりに

本稿では SDP に関する基本的な解説と SDP を解く切除平面法について述べ，切除平面法が MISDP の解法として拡張できることを説明した．MISDP に対する切除平面法の研究は現在精力的に行われているが，計算機で実際に解ける問題の規模はまだ限られていて，この分野の研究は発展途上の段階であると著者は感じている．本稿が MISDP や切除平面法の研究に興味をもつきっかけとなれば幸いである．

謝辞　本稿を執筆する機会をくださりました理化学研究所の奥野貴之先生，有益なコメントをくださった筑波大学の高野祐一先生に深く御礼申し上げます．

参考文献

[1] H. Wolkowicz, R. Saigal and L. Vandenberghe (eds.), *Handbook of Semidefinite Programming*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
[2] H. Konno, J. Gotoh, T. Uno and A. Yuki, “A cutting plane algorithm for semi-definite programming problems with applications to failure discriminant analysis,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **46**, pp. 141–154, 2002.
[3] C. Coey, M. Lubin and J. P. Vielma, “Outer approximation with conic certificates for mixed-integer convex problems,” *Mathematical Programming Computation*, **12**, pp. 249–293, 2020.
[4] K. Kobayashi and Y. Takano, “A branch-and-cut algorithm for solving mixed-integer semidefinite optimization problems,” *Computational Optimization and Applications*, **75**, pp. 493–513, 2020.
[5] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
[6] 中田和秀，“半正定値計画の問題記述&解決能力，” オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**55**, pp. 387–392, 2010.
[7] MOSEK ApS, MOSEK Modeling Cookbook 3.2.2, https://docs.mosek.com/modeling-cookbook/index.html（2020 年 8 月 28 日閲覧）
[8] F. Alizadeh and D. Goldfarb, “Second-order cone programming,” *Mathematical Programming*, **95**, pp. 3–51, 2003.
[9] M. Frank and P. Wolfe, “An algorithm for quadratic programming,” *Naval Research Logistics Quarterly*, **3**, pp. 95–110, 1956.
[10] R. Tamura, K. Kobayashi, Y. Takano, R. Miyashiro, K. Nakata and T. Matsui, “Best subset selection for eliminating multicollinearity,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **60**, pp. 321–336, 2017.
[11] J. A. Taylor, N. Luangsomboon and D. Fooladivanda, “Allocating sensors and actuators via optimal

estimation and control," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **25**, pp. 1060–1067, 2017.
[12] T. Gally and M. E. Pfetsch, "Computing restricted isometry constants via mixed-integer semidefinite programming," *Optimization Online*, 2016.
[13] K. Yonekura and Y. Kanno, "Global optimization of robust truss topology via mixed integer semidefinite programming," *Optimization and Engineering*, **11**, pp. 355–379, 2010.
[14] Y. Zhang, S. Shen and S. A. Erdogan, "Solving 0-1 semidefinite programs for distributionally robust allocation of surgery blocks," *Optimization Letters*, **12**, pp. 1503–1521, 2018.
[15] J. Löfberg, YALMIP, https://yalmip.github.io/ (2020 年 8 月 28 日閲覧)
[16] D. Bertsimas, R. Cory-Wright and J. Pauphilet, "Solving large-scale sparse PCA to certifiable (near) optimality," *arXiv preprint*, arXiv:2005.05195, 2020.
[17] D. Bertsimas, J. Lamperski and J. Pauphilet, "Certifiably optimal sparse inverse covariance estimation," *Mathematical Programming*, **184**, pp. 491–530, 2019.
[18] T. Gally, M. E. Pfetsch and S. Ulbrich, "A framework for solving mixed-integer semidefinite programs," *Optimization Methods and Software*, **33**, pp. 594–632, 2017.