線形計画問題に対する新しい多項式アルゴリズム
—Chubanovのアルゴリズム—

北原　知就

Chubanov のアルゴリズムは，楕円体法，内点法に続く線形計画問題に対する新しい多項式アルゴリズムです．錐計画への拡張性，また予備的な数値実験で示された効率性から，Chubanov のアルゴリズムは最近注目を集めています．本稿では，Chubanov のアルゴリズムを概観し，アルゴリズムのエッセンスを説明することを目的とします．

キーワード：線形計画問題，Chubanov のアルゴリズム，多項式アルゴリズム

1. はじめに

線形計画問題に対する Chubanov のアルゴリズム [1] は，Sergei Chubanov によって 2012 年ごろに開発された，楕円体法，内点法に次ぐ第三の多項式アルゴリズムです．Chubanov のアルゴリズムは，二次錐計画問題への拡張が論文 [2] で行われ，論文 [3, 4] では対称錐計画問題への拡張が行われました．また，論文 [1, 5, 6] では予備的な数値実験においてその効率性が確認されており，Chubanov のアルゴリズムは最近多くの注目を集めています．

線形計画法における重要な未解決問題として，「線形計画問題に対する強多項式アルゴリズムは存在するか」というものがあります．本特集の別の記事で藤重先生が解説される LP-Newton 法は，この未解決問題の解決に向けた試みとして開発されたと原論文 [7] にあります．Chubanov のアルゴリズムの開発にあたって，上記の未解決問題が意識されていたかは定かではありませんが，この未解決問題がある以上，線形計画問題に対するさまざまなアルゴリズムの発想を知っておくことは有益であると思われます．本稿ではそのような考えから，線形計画問題に対する Chubanov のアルゴリズムに焦点を絞り，アルゴリズムのエッセンスを説明することを目指します．線形計画問題に対する Chubanov のアルゴリズムに関する資料としては，文献 [8] が本稿よりも詳細にまとめられています．Chubanov のアルゴリズムの対称錐計画問題への拡張を含むサーベイは，文献 [9] をお勧めします．

きたはら　ともなり
九州大学大学院経済学研究院
〒 819–0395 福岡県福岡市西区元岡 744
tomonari.kitahara@econ.kyushu-u.ac.jp

2. 基礎事項の整理

標準的な線形計画法のテキスト（たとえば [10]）では，線形計画問題の標準形として

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

とその双対問題

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

を考えます．ここで，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は与えられたデータで，$\boldsymbol{x}$，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ はそれぞれ主問題 (1)，双対問題 (2) の変数を表します．

一方，Chubanov のアルゴリズムが対象とする問題は次のような線形実行可能性問題です．

$$\begin{array}{ll} \text{find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{such that} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} \end{array} \tag{3}$$

ここで A は $m \times n$ の整数からなる行列であるとします．また，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ はすべての $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $x_j > 0$ であることを意味します．この形式の問題が解けると，なぜ一般の線形計画問題が解けるかということについては，ここでは割愛します．興味のある方は文献 [1]（pp. 703–704, 3.2 節）を参照してください．

行列 A の零空間（またはカーネル）$\ker A$ を

$$\ker A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n |\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

と定義すると，問題 (3) は

$$
\begin{array}{lll}
P(A) & \text{find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\
& \text{such that} & \boldsymbol{x} \in \ker A \\
& & \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}
\end{array} \tag{4}
$$

と書くことができます．この問題は制約行列 A によって定まりますので，$P(A)$ と書くことにします．また，行列 $A^\top$ の像空間 $\mathrm{Im}\ A^\top$ を

$$
\mathrm{Im}\ A^\top = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists u \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{y} = A^\top \boldsymbol{u}\}
$$

と定めて，式 (4) と対をなす問題として次の問題を考えます．

$$
\begin{array}{lll}
D(A) & \text{find} & \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \\
& \text{such that} & \boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\ A^\top \\
& & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}
\end{array} \tag{5}
$$

この問題を $D(A)$ と表すことにします．

次の定理が示すように，問題 $P(A)$ と $D(A)$ の間には二者択一の関係が成立することが知られています．

定理 1. 任意に与えられた $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して，$P(A), D(A)$ のどちらか一方のみが実行可能解をもつ．

問題 $P(A)$ の実行可能解は，正の定数倍しても実行可能解となります．このような問題を，同次形の問題といいます．同様に，$D(A)$ も同次形の問題です．同次形の問題に対しては，問題の標準化を行うことが普通です．まず，問題 $P(A)$ に対して，これを標準化した問題である

$$
\begin{array}{lll}
P_s(A) & \text{find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\
& \text{such that} & \boldsymbol{x} \in \ker A \\
& & 0 < x_j \leq 1,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{array} \tag{6}
$$

を考えます．この問題は制約行列 A によって定まりますので，$P_s(A)$ と表します．$P_s(A)$ の実行可能解はそのまま $P(A)$ の実行可能解になり，逆に $P(A)$ の解が与えられたとき，その解の最大要素で各要素を割れば，$P_s(A)$ の実行可能解となります．したがって，問題 $P(A)$ と $P_s(A)$ は等価な問題であることがわかります．

同様に，問題 $D(A)$ を標準化した

$$
\begin{array}{ll}
\text{find} & \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \\
\text{such that} & \boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\ A^\top \\
& \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},\ \sum_{j=1}^n y_j = 1
\end{array} \tag{7}
$$

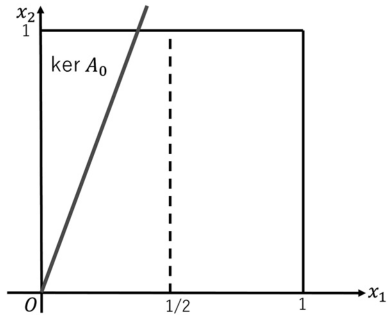

図 1　解の存在範囲

を考え，この問題を $D_s(A)$ と表すと，$D_s(A)$ と $D(A)$ は等価であることがわかります．

3. Chubanov のアルゴリズム

3.1 アルゴリズムの全体像

今後の説明の便宜上，まず「$P_s(A)$ が解ける」という言葉の意味を定義しておきます．

定義 1. 与えられた行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して，$P_s(A)$ が解けるとは，

・$P_s(A)$ の実行可能解を得る

・$D_s(A)$ の実行可能解を得る

のどちらか一方を達成したことをいう．後者の場合，定理 1 から $P_s(A)$ は実行可能解をもたない．

Chubanov のアルゴリズムは，外反復である **Main Algorithm** と Main Algorithm の内部ルーチンとして用いる **Basic Procedure** から構成されます．

Basic Procedure は係数行列 A を入力とします．Basic Procedure では，適当な初期点からスタートし，点の $\ker A$ への射影 → 点の修正 → 点の $\ker A$ への射影…を繰り返します．Basic Procedure の出力として，

(i) $P_s(A)$ が解ける

(ii) ある $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について，$P_s(A)$ の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ において $0 < x_j \leq \frac{1}{2}$ となることが判明する

のいずれかを得ます．

整数からなる $m \times n$ の行列 A_0 が与えられ，問題 $P_s(A_0)$ を解きたいとします．Main Algorithm の入力は，このときの係数行列 A_0 です．まず A_0 を入力として Basic Procedure を実行します．その結果，もし (i) の場合，すなわち $P_s(A_0)$ が解ければ，Main Algorithm を終了させます．一方，(ii) の場合は，たとえば図 1 のように，x_1 が $P_s(A_0)$ の実行可能解におい

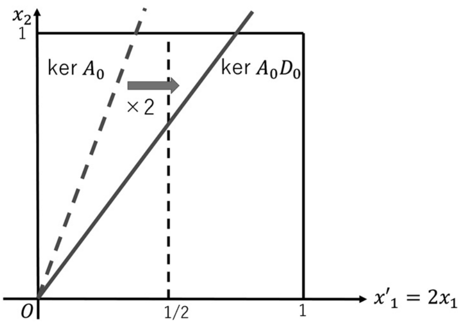

図 2　ある変数を 2 倍にする

て $0 < x_1 \leq \frac{1}{2}$ であることが判明したような状況です．このとき，$P_s(A_0)$ は

$$\begin{array}{ll} \text{find} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{such that} & A_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ & 0 < x_1 \leq \frac{1}{2} \\ & 0 < x_j \leq 1,\ j = 2, 3, \ldots, n \end{array}$$

となります．そこで $x'_1 = 2x_1$ と変数変換すると (図 2)，

$$\begin{array}{ll} \text{find} & \boldsymbol{x}' = (x'_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n)^\top \\ \text{such that} & A_0D_0\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0} \\ & 0 < x'_1 \leq 1 \\ & 0 < x_j \leq 1,\ j = 2, 3, \ldots, n \end{array}$$

となります．ここで，D_0 は $n \times n$ の単位行列の $(1, 1)$ 成分のみを $\frac{1}{2}$ で置き換えた行列です．この問題は $A_1 = A_0D_0$ として，$P_s(A_1)$ と表されます．

次に，A_1 を入力として Basic Procedure を実行します．もし $P_s(A_1)$ が解ければ，$P_s(A_0)$ も解くことができます．実際，もし $P_s(A_1)$ の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ が得られれば，$\boldsymbol{x}$ の第 1 成分のみを $\frac{1}{2}$ 倍すれば $P_s(A_0)$ の解が得られます．一方，もし $D_s(A_1)$ の実行可能解が得られれば，定理 1（二者択一の定理）から $P_s(A_1)$ は実行可能解をもちません．すると，$P_s(A_0)$ もまた解をもちません（$P_s(A_0)$ が解 $\tilde{x}$ をもつとすれば，$\tilde{x}$ の第 1 成分のみを 2 倍した解は $P_s(A_1)$ の解となり，矛盾が生じます）．Basic Procedure の結果が (ii) となった場合は，A_0 から A_1 を作ったのと同じ要領で A_1 から A_2 を作ります．以下同様にして，$A_3, A_4, \ldots$ を作っていきます．$A_0, A_1, \ldots$ は一般に次の性質を満たします．

- $l = 0, 1, \ldots$ に対して，$A_{l+1} = A_lD_l$ と表される．ここで，D_l は $n \times n$ の単位行列のある一つの対角成分を $\frac{1}{2}$ で置き換えた行列である．
- $l = 0, 1, \ldots$ に対して，$P_s(A_{l+1})$ が解ければ $P_s(A_l)$ も解ける．

こうして，A_l の作成 →Basic Procedure→ A_{l+1} の作成…を繰り返して，あるところで $P_s(A_{\bar{l}})$ が解けたとすると，上で述べた性質を活かして再帰的に元々解きたかった $P_s(A_0)$ を解くことができ，Main Algorithm を終了します．

以上が Chubanov のアルゴリズムの全体像となりますが，ここで次のような疑問が浮かび上がります．

- なぜ Basic Procedure である $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について，$P_s(A)$ の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ において $0 < x_j \leq \frac{1}{2}$ となることがわかるのか．
- 制約行列が無限に生成され続け，アルゴリズムが終了しないということはないのか．

これらの疑問について，3.2 節，3.3 節で説明していきます．

3.2　Basic Procedure のしくみ

3.1 節で，Basic Procedure では $\ker A$ への射影を繰り返すと述べました．ベクトル $\boldsymbol{y}$ の $\ker A$ への射影とは，$\ker A$ のもとで，$\boldsymbol{y}$ との 2 ノルムで測った距離が最小になる点 $p(\boldsymbol{y})$ のことを言います．このような点 $\boldsymbol{z}$ は，A がフルランクのときは一つに定まり，射影行列 P_A を

$$P_A = I - A^\top(AA^\top)^{-1}A \tag{8}$$

とすると

$$p(\boldsymbol{y}) = P_A\boldsymbol{y}$$

となります．もし $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ が $\boldsymbol{y} \in \ker A$ を満たすならば，$\boldsymbol{y}$ の $\ker A$ への射影は定義から $\boldsymbol{y}$ 自身です．したがって

$$P_A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \in \ker A \tag{9}$$

が成り立ちます．また，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，定義から $P_A\boldsymbol{y} \in \ker A$ ですから，

$$AP_A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

となります．さらに，

$$P_A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\ A^\top \tag{11}$$

が成り立ちます．

Basic Procedure では，$\boldsymbol{y}_0 = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)^\top \in \mathbb{R}^n$ から反復を開始し，毎回の反復で $\sum_{j=1}^n y_{kj} = 1$, $\boldsymbol{y}_k \geq \boldsymbol{0}$ を満たすベクトルを生成していきます．

もしある反復 k で

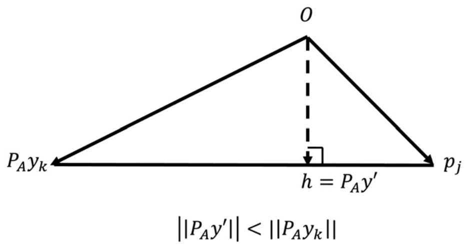

図 3　状況の図解

$$P_A \boldsymbol{y}_k > \boldsymbol{0}$$

となれば，式 (10) より $\frac{P_A \boldsymbol{y}_k}{\max(P_A \boldsymbol{y}_k)}$ は $P_s(A)$ の実行可能解となりますので，Basic Procedure を終了します．

一方，

$$P_A \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{0}$$

となれば，式 (11) より $\boldsymbol{y}_k$ は $D_s(A)$ の実行可能解となりますので，この場合も Basic Procedure を終了します．

$P_A \boldsymbol{y}_k > \boldsymbol{0}$ でも $P_A \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{0}$ でもない場合は，

ある $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在して，$(P_A \boldsymbol{y}_k)_j \leq 0$

となります．ここで，$(P_A \boldsymbol{y}_k)_j$ はベクトル $P_A \boldsymbol{y}_k$ の第 j 成分を表します．このとき，$\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^n$ を第 j 要素のみ 1 で，それ以外の要素は 0 であるベクトルとすると，

$$\begin{aligned}(P_A \boldsymbol{y}_k)_j &= (P_A \boldsymbol{y}_k)^\top \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{y}_k^\top P_A \boldsymbol{e}_j \\ &= (\boldsymbol{y}_k^\top P_A)(P_A \boldsymbol{e}_j) = (P_A \boldsymbol{y}_k)^\top \boldsymbol{p}_j\end{aligned}$$

となります．ここで，$\boldsymbol{p}_j$ は P_A の j 番目の列ベクトルを表します．また，射影行列 P_A の定義 (8) より P_A は対称行列であり，$P_A^2 = P_A$ となることを利用しました．以上の式の展開より，

$$(P_A \boldsymbol{y}_k)^\top \boldsymbol{p}_j \leq 0 \tag{12}$$

となります．

ここで，これまで得られている $\boldsymbol{y}_k$，$\boldsymbol{p}_j$ をもとに，

・$\|P_A \boldsymbol{y}'\| < \|P_A \boldsymbol{y}_k\|$,

・$\sum_{j=1}^n y'_j = 1$，$\boldsymbol{y}' \geq \boldsymbol{0}$

を満たす $\boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^n$ を求めることを考えてみましょう．このような $\boldsymbol{y}'$ は，初等幾何的な考察によって得ることができます．図 3 を参考に考えてみましょう．まず，式 (12) より原点 O，点 $P_A \boldsymbol{y}_k$，点 $\boldsymbol{p}_j$ で作られる三角形は鈍角（または直角）三角形です．よって，点 $P_A \boldsymbol{y}_k$ と点 $\boldsymbol{p}_j$ で定まる線分に点 O から引いた垂線の足を表すベクトルを $\boldsymbol{h}$ とすると，$\boldsymbol{h}$ は点 $P_A \boldsymbol{y}_k$ と点 $\boldsymbol{p}_j$ で定まる線分上にあります．また，$\|\boldsymbol{h}\| < \|P_A \boldsymbol{y}_k\|$ であることが図 3 からわかります．また，$\sum_{j=1}^n y_{kj} = 1$，$\boldsymbol{y}_k \geq \boldsymbol{0}$ ですから，$P_A \boldsymbol{y}_k$ は P_A の列ベクトルの凸結合で書ける点です．このことと $\boldsymbol{p}_j = P_A \boldsymbol{e}_j$ より，点 $P_A \boldsymbol{y}_k$ と点 $\boldsymbol{p}_j$ で定まる線分上にある点 $\boldsymbol{h}$ も P_A の列ベクトルの凸結合で書けます．すなわち，$\sum_{j=1}^n y'_j = 1$，$\boldsymbol{y}' \geq 0$ を満たす $\boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^n$ が存在して，

$$\boldsymbol{h} = P_A \boldsymbol{y}' \tag{13}$$

と書くことができます．

先ほど，$\|\boldsymbol{h}\| < \|P_A \boldsymbol{y}_k\|$ となることが図 3 からわかると書きましたが，このことをきちんと述べたのが次の補題です．証明は付録 1 に示してあります．

補題 1.　上で定めた $P_A \boldsymbol{y}'$ と $P_A \boldsymbol{y}_k$ に対して，

$$\frac{1}{\|P_A \boldsymbol{y}'\|^2} \geq \frac{1}{\|P_A \boldsymbol{y}_k\|^2} + 1 \tag{14}$$

が成り立つ．

Basic Procedure の k 反復目では，式 (13) の $\boldsymbol{y}'$ を $\boldsymbol{y}_{k+1}$ として更新します．Basic Procedure の反復を繰り返していくことで，$\|P_A \boldsymbol{y}_k\|$ の値をだんだんと小さくすることができます．そのようなプロセスの中で $P_s(A)$ が解けないということが続くと，補題 1 より $\|P_A \boldsymbol{y}_k\|$ の値は十分に小さくなっているはずです．そのときの $\boldsymbol{y}_k$ は $D_s(A)$ の実行可能解に近くなっています．このような状況は $P_s(A)$ にとって不利な状況であり，定理 1（二者択一の定理）から式 (4) の解は，存在するとしても「狭い」範囲にあると考えられます．次の補題は，以上のような推論を反映しています．補題の証明は付録 2 にあります．

補題 2.　$\sum_{j=1}^n y_j = 1$，$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$，$P_A \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，ある j が存在して

$$2\sqrt{n}\|P_A \boldsymbol{y}\| \leq y_j \tag{15}$$

が成り立つとする．このとき，式 (6) の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$0 < x_j \leq \frac{1}{2} \tag{16}$$

となる．

Basic Procedure の初期点 $\boldsymbol{y}_0 = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n) \in \mathbb{R}^n$ からスタートして，どのくらいの反復で

式 (15) は満たされるのでしょうか．以下の定理は，これまで得られた結果を組み合わせることにより，式 (15) が満たされるまでの更新回数を見積もることができることを述べています．定理の証明を付録 3 に示しました．

定理 2. Basic Procedure は高々 $4n^3$ 回の反復で，

(i) $P_s(A)$ が解ける

(ii) ある $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について，(6) の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ において $0 < x_j \leq \frac{1}{2}$ となることが判明する

のいずれかの出力を得る．

3.3 Main Algorithm の有限終了性について

Main Algorithm の入力を $m \times n$ の行列 A_0 とします．ここでは，A_0 の要素がすべて整数の場合に，Main Algorithm が有限回で終了することを説明します．Main Algorithm の有限終了性を導くうえで重要となるのが，Khachiyan [11] による古典的な結果です．

定理 3. A を整数からなる $m \times n$ 行列とする．このとき，$P_s(A)$ が実行可能であるならば，ある正の数 $\tau(A)$ が存在して，$P_s(A)$ の任意の実行可能基底解において，正の要素はすべて $\tau(A)$ 以上となる．さらに，$1/\tau(A) = 2^{\mathrm{O}(\mathrm{size}(A))}$ となる[1]．

Main Algorithm を 1 反復実行すると，アルゴリズムが終了しないとすれば，ある変数の上限が $\frac{1}{2}$ 倍されます．そして，ある変数に対して上限の更新が $M = \lfloor \log_2 \frac{1}{\tau(A_0)} \rfloor + 1$ 回上限の更新が行われたとすると，変数の上限が τ を下回り，$P_s(A_0)$ は実行可能解をもたないことがわかります．変数の数は n 個ですから，Main Algorithm の反復が $n(M-1)+1$ 回行われたとすると，ある変数について上限の更新が M 回行われたことになります．したがって，高々 $n(M-1)+1$ 回の Main Algorithm の反復を行えば，$P_s(A_0)$ の実行可能解が得られるか，または $P_s(A_0)$ は実行可能解をもたないことが判明します．定理 3 より，$\frac{1}{\tau(A_0)} = \mathrm{O}(\mathrm{size}(A_0))$ ですから，Main Algorithm は高々 $\mathrm{O}(n \cdot \mathrm{size}(A_0))$ 回で終了します．Main Algorithm の 1 反復では Basic Procedure が 1 回実行され，1 回の Basic Procedure にかかる計算量は $\mathrm{O}(n^4)$ となります [1]．したがって，Chubanov のアルゴリズム全体としてかかる計算量は $\mathrm{O}(n^5 \mathrm{size}(A_0))$ となります．本稿では述べませんでしたが，巧妙な工夫をすると計算量を $\mathrm{O}(n^4 \mathrm{size}(A_0))$ まで落とすことができます [1]．

4. おわりに

本稿では，最近開発された線形計画問題に対する新しい多項式アルゴリズムである Chubanov のアルゴリズムを概説しました．冒頭で述べたような，より広い問題に対してアルゴリズムを拡張したり，数値的な検証が行われるなどのほかにも，最近では Chubanov のアルゴリズムの変種を内部ルーチンに用いた劣モジュラ関数最小化アルゴリズムの開発 [13] が行われるなど，さまざまな関連研究が行われており，今後もこの分野の発展が期待されます．

謝辞　本稿執筆の機会をいただきましたオーガナイザの山本芳嗣先生，機関誌編集委員の繁野麻衣子先生，高野祐一先生に深く感謝いたします．

[1] $\mathrm{size}(A)$ の定義は，文献 [12] の pp. 59–60, 2.10 節を参照してください．

参考文献

[1] S. Chubanov, “A polynomial projection algorithm for linear feasibility problems,” *Mathematical Programming*, **153**, pp. 687–713, 2015.

[2] T. Kitahara and T. Tsuchiya, “An extension of Chubanov’s polynomial-time linear programming algorithm to second-order cone programming,” *Optimization Methods and Software*, **33**, pp. 1–25, 2017.

[3] B. F. Lorenço, T. Kitahara, M. Muramatsu and T. Tsuchiya, “An extension of Chubanov’s algorithm to symmetric cones,” *Mathematical Programming*, **173**, pp. 117–149, 2019.

[4] J. Peña and N. Soheili, “Solving conic systems via projection and rescaling,” *Mathematical Programming*, **166**, pp. 87–111, 2017.

[5] J. Peña and N. Soheili, “Computational performance of a projection and rescaling algorithm,” arXiv: 1803.07107, 2018.

[6] K. Roos, “An improved version of Chubanov’s method for solving a homogeneous feasibility problem,” *Optimization Methods and Software*, **33**, pp. 26–44, 2018.

[7] S. Fujishige, T. Hayashi, K. Yamashita and U. Zimmermann, “Zonotopes and the LP-Newton method,” *Optimization and Engineering*, **10**, pp. 193–205, 2009.

[8] K. Roos, “On Chubanov’s algorithm for the linear feasibility problem,” https://cdn.uclouvain.be/public/Exports%20reddot/core/documents/CORE_Opt_Sem_final.pdf （2018 年 12 月 6 日閲覧）

[9] 村松正和，ブルノ・F・ロウレンソ，北原知就，土谷隆，“Chubanov による同次線形計画問題の内点許容解を求めるアルゴリズムとその拡張に関する最近の展開，” 第 29 回 RAMP シンポジウム論文集，pp. 143–169, 2017.

[10] D. G. Luenberger and Y. Ye, *Linear and Nonlinear Programming*, 4th edition, Springer, 2015.

[11] L. G. Khachiyan, *Doklady Akademiia Nauk SSSR*, **244**, pp. 1093–1096, 1979.

[12] 小島政和，土谷隆，水野眞治，矢部博，『内点法』，朝倉書店，2001.
[13] S. Fujishige, "A note on submodular function minimization by Chubanov's LP algorithm, optimization online," http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2017/09/6217.pdf （2018 年 12 月 7 日閲覧）

付録

付録 1. 補題 1 の証明

まず，点 O，$P_A\boldsymbol{y}_k$，$\boldsymbol{p}_j$ で作られる三角形の面積を S とすると，$2S = \|P_A\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{p}_j\| \cdot \|P_A\boldsymbol{y}'\|$ となり，また，$2S \leq \|P_A\boldsymbol{y}_k\| \cdot \|\boldsymbol{p}_j\|$ となるので，

$$\|P_A\boldsymbol{y}'\|^2 = \frac{(2S)^2}{\|P_A\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{p}_j\|^2} \leq \frac{\|P_A\boldsymbol{y}_k\|^2 \cdot \|\boldsymbol{p}_j\|^2}{\|P_A\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{p}_j\|^2}$$

となり，

$$\|P_A\boldsymbol{y}'\|^2 \leq \frac{\|P_A\boldsymbol{y}_k\|^2 \cdot \|\boldsymbol{p}_j\|^2}{\|P_A\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{p}_j\|^2} \tag{17}$$

を得る．一方，点 O，$P_A\boldsymbol{y}_k$，$\boldsymbol{p}_j$ で作られる三角形は鈍角（または直角）三角形なので，

$$\|P_A\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{p}_j\|^2 \geq \|P_A\boldsymbol{y}_k\|^2 + \|\boldsymbol{p}_j\|^2 \tag{18}$$

となる．式 (17)，式 (18) より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|P_A\boldsymbol{y}'\|^2} &\geq \frac{\|P_A\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{p}_j\|^2}{\|P_A\boldsymbol{y}_k\|^2 \cdot \|\boldsymbol{p}_j\|^2} \\ &\geq \frac{\|P_A\boldsymbol{y}_k\|^2 + \|\boldsymbol{p}_j\|^2}{\|P_A\boldsymbol{y}_k\|^2 \cdot \|\boldsymbol{p}_j\|^2} \\ &= \frac{1}{\|P_A\boldsymbol{y}_k\|^2} + 1\end{aligned}$$

となり，補題が示された． □

付録 2. 補題 2 の証明

式 (6) の実行可能解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を任意にとる．このとき，$\boldsymbol{x} \in \ker A$ だから $P_A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となる．また，$0 < x_j \leq 1$，$j = 1, 2, \ldots, n$ より $\|\boldsymbol{x}\| \leq \sqrt{n}$ となる．これらのことと $\boldsymbol{x} > 0$，$\boldsymbol{y} \geq 0$ および式 (15) より，

$$\begin{aligned}x_j y_j &\leq \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = (P_A\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^\top P_A \boldsymbol{y} \\ &\leq \|x\|\|P_A\boldsymbol{y}\| \leq \sqrt{n} \cdot \left(\tfrac{1}{2\sqrt{n}} y_j\right) = \tfrac{1}{2} y_j\end{aligned}$$

となる．$P_A\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ および式 (15) より $y_j > 0$ に注意して上の不等式の最左辺と最右辺を割ると式 (16) が得られる． □

付録 3. 定理 2 の証明

Basic Procedure が k 反復目で終了しなかったとする．このとき，$P_s(A)$ は解けていないので，$P_A\boldsymbol{y}_k \not> \boldsymbol{0}$ かつ $P_A\boldsymbol{y}_k \neq \boldsymbol{0}$ である．また，もし式 (15) が成り立つとすれば，補題 2 より (ii) の結論が得られる．ここでは Basic Procedure が終了しないとしているので，k 反復目において式 (15) は成り立たない．よって，

$$2\sqrt{n}\|P_A\boldsymbol{y}_k\| > \max\{y_{kj}\} \geq \frac{1}{n}$$

となる．ここで，二つ目の $\geq$ は $\sum_{j=1}^n y_{kj} = 1$ となることから成り立つ．この式を変形すると

$$\frac{1}{\|P_A\boldsymbol{y}_k\|^2} < 4n^3 \tag{19}$$

を得る．一方，補題 1 より，

$$\frac{1}{\|P_A\boldsymbol{y}_k\|^2} \geq k \tag{20}$$

が成り立つ．式 (19) と式 (20) から $k < 4n^3$ となり，定理の主張が示された． □

