単体法を理解しよう！
—例題を使ったやさしい解説—

水野　眞治

本稿は，大学において線形代数の基礎を学んだ学生・社会人などを主な対象として，線形計画問題を解く単体法を理解するための入門的な解説である．例題を主に使って解説することにより，初学者でも理解できるように配慮している．ただし，単体法の単なる計算手順を説明するだけでなく，単体法とは基本的にどのような方法であり，なぜ線形計画問題を解くことができるのか，そのことを理解できることに主眼を置いている．したがって，単体法で線形計画問題が解ける理由を理解するために必要な基礎知識，線形計画問題の性質，問題に対する条件などについても詳しく説明している．

キーワード：線形計画問題，基底解，辞書，単体法，2 段階単体法

1.　はじめに

単体法は，英語で simplex method と呼ばれ，線形計画問題を解くために，1947 年に G. Dantzig [1] によって開発された．本稿は，大学において線形代数の基礎を学んだ学生・社会人などを主な対象として，単体法を理解するための入門的な解説である．

まずはじめに，単体法の概略を理解してもらうために，2 節で実際に単体法で例題を解いている．ただし，単なる計算手順だけではなく，単体法でなぜその問題が解けるのか，そこを理解できるような説明を心がけた．2 節の内容がよく理解できない場合には，先に 3 節から 5 節まで読んで，基礎的な事柄をよく理解してから， 2 節に戻ることを勧める．また，2 節と 3 節以降は，どちらから先に読んでも理解できるように，一部の用語をそれぞれの節で定義している．

3 節では単体法が対象とする標準形の線形計画問題を解説する．4 節と 5 節では，単体法の基礎となる，標準形の線形計画問題の基底解と辞書について解説する．本稿では，単体法で計算される係数などを並べたタブローを使わず，基底変数と非基底変数を区別して，元問題を書き換えた辞書を使い説明する．

6 節では，線形計画問題の実行可能基底解を頂点とし，単体法の 1 反復で移動できる頂点間に有向枝をはったグラフを導入する．そして，単体法により，初期基底解を表す頂点からそのグラフ上で有向路を生成することにより，最適解を表す頂点に達することができることを説明する．これにより，単体法によってなぜ最適解が求まるのか，直感的なイメージが湧くことを期待している．

7 節では，実行可能であるが最適解をもたない線形計画問題に対して単体法を適用すると，最適解をもたないことが判定できることを示す．ここまでの議論をまとめることにより， 8 節で標準形の線形計画問題を解くための単体法のアルゴリズムを一般的に述べる．

9 節では，初期実行可能基底解が簡単に求められない場合にも適用できる 2 段階単体法について，例題を使って解説する． 10 節では，実行不能な線形計画問題に対して 2 段階単体法を適用すると，実行不能であることが判定できることを示す．9 節と 10 節の議論をまとめることにより， 11 節で標準形の線形計画問題を解くための 2 段階単体法のアルゴリズムを一般的に述べる．

12 節では，本稿で解説できなかった単体法に関する重要な事柄，あるいはさらに深く単体法を学ぶときの指針などについて簡単に触れる．

2.　単体法で例題を解いてみよう

この節では，単体法の概略を理解してもらうために，例題を単体法で解いてみる．そのために，次の線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & u = -x_1 - x_2 \\
\text{制約条件} & 2x_1 + x_2 \le 6 \\
& x_1 + 3x_2 \le 8 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{array}
\tag{1}
$$

を使う．この問題を表した図が巻頭の「特集にあたって」にあるので，適宜参照していただきたい．上の問

みずの　しんじ
東京工業大学工学院
〒 152–8550 東京都目黒区大岡山 2–12–1 W9–58
mizuno.s.ab@m.titech.ac.jp

題で，u で表されている $-x_1-x_2$ を **目的関数**という．問題 (1) の不等式制約に **スラック変数** x_3 と x_4 を導入すれば

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u=-x_1-x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1+x_2+x_3=6 \\ & x_1+3x_2+x_4=8 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{array} \tag{2}$$

と書き換えることができる．単体法では，この問題のように，すべての変数に非負条件 $(x_i \geq 0)$ が付き，それ以外の制約式がすべて等式で表される最小化問題を対象とする．

まず，問題 (2) において，四つの変数から，制約条件に含まれる等式の数と等しい二つの変数を選ぶ．ここでは，x_3 と x_4 を選んでみる．等式条件から，選んだ変数を選ばれなかった変数の一次式（定数項を含む）で表し，その結果を目的関数に代入する（この場合には変化なし）と，問題 (2) は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u=-x_1-x_2 \\ \text{制約条件} & x_3=6-2x_1-x_2 \\ & x_4=8-x_1-3x_2 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{array} \tag{3}$$

と書き換えることができる．この問題は，元問題 (2) と同じである．ここで，選ばれた変数 x_3 と x_4 を **基底変数**，選ばれなかった x_1 と x_2 を **非基底変数**，問題 (3) を x_3 と x_4 を **基底変数**とする **辞書**という．また，基底変数の集合を **基底**と呼ぶ．辞書とは，元問題を書き換えて，基底変数と目的関数を非基底変数の一次式で表したものである．

上記の辞書 (3) において，非基底変数 x_1 と x_2 の値をすべて 0 とすると，等式制約を満たす解

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,6,8)$$

が簡単に得られ，その目的関数値 $u=0$ も得られる．この解を x_3 と x_4 を基底変数とする **基底解**という．この場合，基底解が不等式条件（変数の非負条件）も満たすので，問題 (2) の **実行可能な基底解**である．単体法は，このように実行可能な基底解を表す辞書からスタートする．初期の実行可能基底解と辞書の求め方については，9 節以降で説明する．

次に，上記の辞書 (3) において，目的関数 $u=-x_1-x_2$ をみると，x_1 と x_2 の係数が負となっている．すなわち，非基底変数 x_1 あるいは x_2 の値を増加させると，目的関数値が減少する．最小化問題を解くので，目的関数値が減少するように，係数が負となっている非基底変数の値を 0 から増加させることを考える．そのような一つの変数，たとえば x_1 を選ぶ．選んだ x_1 以外の非基底変数を 0 に固定して，x_1 の値を 0 から増加させると，目的関数の値と基底変数の値は，辞書 (3) から

$$\begin{aligned} u &= -x_1 \\ x_3 &= 6-2x_1 \\ x_4 &= 8-x_1 \end{aligned} \tag{4}$$

と変化する．したがって，x_1 の値を 0 から増加させると，目的関数 u の値が減少し，基底変数 x_3 と x_4 の値も減少する．上の式 (4) から，変数 x_3 が 0 以上であるためには $x_1 \leq 3$ を満たす必要があり，変数 x_4 が 0 以上であるためには $x_1 \leq 8$ を満たす必要がある．したがって，すべての基底変数の値が 0 以上という条件を満たすためには，$0 \leq x_1 \leq 3$ でなければならず，$x_1=3$ のときに $x_3=0$ となる．すなわち，$x_1=3$ となるときに，x_1 を基底に入れ，x_3 を基底から出す新しい実行可能基底解が得られる．この新しい基底解を表す辞書を次の手順で計算する．

(i) 現在の辞書 (3) において，基底から出る基底変数 x_3 を表す式を変形して，基底に入る変数 x_1 を非基底変数の一次式として表す．この例では，

$$x_1=3-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3$$

という関係式を得る．

(ii) 現在の辞書 (3) におけるほかの等式内の基底に入る変数 x_1 に上の (i) で得た関係式を代入することにより，ほかの基底変数を非基底変数の一次式で表す．この例では，次のようになる：

$$\begin{aligned} x_4 &= 8-x_1-3x_2 \\ &= 8-(3-\tfrac{1}{2}x_2-\tfrac{1}{2}x_3)-3x_2 \\ &= 5-\tfrac{5}{2}x_2+\tfrac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

(iii) 現在の辞書 (3) における目的関数内の基底に入る変数 x_1 に上の (i) で得た関係式を代入することにより，目的関数を非基底変数の一次式で表す．この例では，次のようになる：

$$\begin{aligned} u &= -x_1-x_2 \\ &= -(3-\tfrac{1}{2}x_2-\tfrac{1}{2}x_3)-x_2 \\ &= -3-\tfrac{1}{2}x_2+\tfrac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

上の手順を現在の辞書 (3) に実施すると，x_1 と x_4 を基底変数とする次の辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u = -3 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \text{制約条件} & x_1 = 3 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ & x_4 = 5 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{array} \tag{5}$$

が得られる．この辞書から，実行可能基底解 $(3,0,0,5)$ とその目的関数値 -3 が得られる．目的関数値が辞書 (3) における基底解の目的関数値 0 より減少していることが確認できる．辞書 (5) の目的関数をみると，x_2 の係数が負となっている．この x_2 を 0 から増加させると，$x_2 = 2$ のときに基底変数 x_4 の値が初めて 0 となる．したがって，$x_2 = 2$ となるときに，x_2 を基底に入れ，x_4 を基底から出す新しい実行可能基底解が得られる．このとき，x_1 と x_2 を基底変数とする新しい辞書は，辞書 (5) に上記の手順 (i), (ii), (iii) を適用することにより

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u = -4 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ \text{制約条件} & x_1 = 2 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ & x_2 = 2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{array} \tag{6}$$

となる．この辞書から，実行可能基底解 $(2,2,0,0)$ とその目的関数値 -4 が得られる．目的関数をみると，x_3 と x_4 の係数が正であり，$x_3 \geq 0$ と $x_4 \geq 0$ という条件から，u の値を -4 より小さくできないことがわかる．したがって，基底解 $(2,2,0,0)$ は問題 (6) の最適解，すなわち $(x_1, x_2) = (2,2)$ は元問題 (1) の最適解である．このことから，次の定理が成り立つ．

定理 2.1. 実行可能基底解を表す辞書で，目的関数における非基底変数の係数がすべて 0 以上ならば，その基底解は最適解である．

この定理の条件を満たす辞書を **最適な辞書**と呼ぶ．単体法は，最適な辞書を見つけた段階で終了する．

3. 標準形の線形計画問題

この節では，単体法が対象とする，標準形の線形計画問題について解説する．そのために，四つの変数 x_1, x_2, x_3, x_4 をもつ次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u = -x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{array} \tag{7}$$

を使う．これは，2 節で扱った問題 (2) と同じ問題である．問題 (7) において，最小化する関数 $-x_1 - x_2$ を **目的関数**という．**標準形の線形計画問題**とは，問題 (7) のように，変数がそれぞれ非負制約（0 以上という制約）を満たし，さらにいくつかの線形の等式制約を満たすという条件のもとで，線形の目的関数の値を最小化するように，すべての変数の値を求める問題である．ベクトル (a,b,c,d) は，$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (a,b,c,d)$ が問題 (7) のすべての制約条件を満たすときに **実行可能解**と呼ばれ，一部でも満たさないときに **実行不能解**と呼ばれる．実行可能解の集合を **実行可能領域**という．実行可能領域上で目的関数の値を最小にする解を **最適解**といい，最適解における目的関数値を **最適値**という．線形計画問題は，次の三つの場合に大別される．

- 実行可能解が存在し，さらに最適解も存在する．
- 実行可能解が存在するが，目的関数値に下界が存在しないために，最適解が存在しない．
- 実行可能解が存在しない．

線形計画問題を解くということは，その問題が上記のいずれの場合であるか判定し，さらに最適解をもつ場合には，少なくとも一つの最適解を求めることである．9 節以降で説明する 2 段階単体法を使うと，この意味で標準形の線形計画問題を解くことができる．

4. 基底解

この節では，単体法を理解するために不可欠な基底解について解説する．標準形の線形計画問題では，一般に変数の数が等式の数より多い．問題 (7) では，変数の数が 4，等式の数が 2 である．基底解を解説するうえで，まず最初に，四つの変数の中から等式の数 2 と等しい数の変数を選ぶ．たとえば，x_1 と x_2 を選ぶ．選ばれた変数 x_1 と x_2 を **基底変数**，選ばれなかった変数 x_3 と x_4 を **非基底変数**という．問題 (7) において，非基底変数の値に 0 を代入すると，二つの等式条件は

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

となる．この方程式系は，2 変数で二つの等式からなるので，ただ一つの解 $(x_1, x_2) = (2,2)$ をもつ．このとき，$x_3 = 0$ と $x_4 = 0$ を一緒にした解 $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2,2,0,0)$ を問題 (7) の x_1 と x_2 を基底変数とする **基底解**という．（もし，上のようにして求めた方程式系の解がただ一つに定まらない場合には，今回の変数の選び方では基底解が存在しないことになる．）この基底解を v^1 と名づける．同様に，四つの変数から二つの基底変数を選ぶことにより，表 1 に示した六つの基底解 v^1 か

表 1　問題 (7) のすべての基底解

記号	基底変数	基底解	関数値	実行性
v^1	x_1, x_2	$(2, 2, 0, 0)$	-4	○
v^2	x_1, x_3	$(8, 0, -10, 0)$	-8	×
v^3	x_1, x_4	$(3, 0, 0, 5)$	-3	○
v^4	x_2, x_3	$(0, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 0)$	$-\frac{8}{3}$	○
v^5	x_2, x_4	$(0, 6, 0, -10)$	-6	×
v^6	x_3, x_4	$(0, 0, 6, 8)$	0	○

ら v^6 を求めることができる．ちなみに，「特集にあたって」にある図をみると，これら六つの基底解の (x_1, x_2) 成分で表される点が，四つの直線（各変数 $x_i = 0$ となる直線）のうちの 2 本の直線の交点となっている．

基底解は，実行可能であれば **実行可能基底解**と呼ばれ，最適解であれば **最適基底解**と呼ばれる．また，基底解は，基底変数の値がすべて正ならば **非退化**であるといわれ，0 となるものが存在すれば **退化**しているといわれる．すべての実行可能基底解が非退化ならば線形計画問題が **非退化**であるといわれ，一つでも退化した基底解が存在すれば **退化**しているといわれる．本稿では，次の仮定をする．

仮定 4.1.　標準形の線形計画問題が非退化である．

問題 (7) は，表 1 よりすべての実行可能基底解の基底変数の値が正であるので，この仮定を満たす．

標準形の線形計画問題とその基底解に対して，次の定理が知られている．

定理 4.2.　標準形の線形計画問題では，実行可能解が存在すれば実行可能基底解が存在し，最適解が存在すれば最適基底解が存在する．

この定理から，線形計画問題の基底解のみを対象としても，問題を解くことができることがわかる．たとえば，問題 (7) は最適解をもつので，この定理から，表 1 に示した四つの実行可能基底解 v^1, v^3, v^4, v^6 の中で目的関数値が最も小さい v^1 が最適解となる．大きな問題では，基底解の数は膨大になるので，このようにすべての基底解を求めて最適解を定めることは現実的ではない．単体法は，線形計画問題の基底解を更新しながら，効率よく最適基底解を見つける方法である．

5.　辞書

この節では，標準形の線形計画問題の辞書について解説する．辞書とは元の線形計画問題を書き換えたものであり，各基底解に対応して一つの辞書がある．問題 (7) において，x_2 と x_3 を基底変数とする基底解を使って，辞書を説明する．問題 (7) の中の 2 番目の等式は，

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 8$$

である．この式から，基底変数 x_2 を非基底変数 x_1 と x_4 の一次式として

$$x_2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 \tag{8}$$

と表すことができる．この式を，問題 (7) の中の 1 番目の等式に代入すると

$$\frac{8}{3} + \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 + x_3 = 6$$

が得られ，これを変形すると基底変数 x_3 を非基底変数 x_1 と x_4 の一次式として

$$x_3 = \frac{10}{3} - \frac{5}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \tag{9}$$

と表すことができる．上の式 (8) と式 (9) を問題 (7) の目的関数に代入すると

$$u = -\frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4$$

が得られる．したがって，問題 (7) は，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u = -\frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \\ \text{制約条件} & x_2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 \\ & x_3 = \frac{10}{3} - \frac{5}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \tag{10}$$

と書き換えられる．これが，x_2 と x_3 を基底変数とする問題 (7) の辞書である． **線形計画問題の辞書**とは，元問題を書き換えて，目的関数と基底変数を非基底変数の一次式で表したものである．

線形計画問題の辞書をみると，次のことがわかる．

(i) 基底解とその目的関数値がすぐに得られ，実行可能であるか判定できる．

(ii) 基底解が最適解である場合を判定できる（定理 2.1 参照）．

(iii) 目的関数値に下界が存在しない場合を判定できる（定理 7.1 参照）．

(iv) 実行可能な基底解を表す辞書において，上記 (ii) あるいは (iii) 以外の場合には，一組の非基底変数と基底変数を入れ替えることにより，目的関数値が減少する新しい実行可能基底解を求められる．

たとえば，辞書 (10) をみると，基底解 $(0, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 0)$ とその目的関数値 $-\frac{8}{3}$ が得られ，その基底解は実行可

能と判定できる．この基底解は辞書から最適解とは判定できなく，目的関数値に下界が存在しないとも判定できないので，(iv) の場合である．このとき，辞書 (10) の目的関数において，非基底変数 x_1 の係数が負なので，これを基底に入れることにより目的関数値が減少し，$x_1 = 2$ のときに基底変数 $x_3 = 0$ となる実行可能基底解が得られる，つまり，非基底変数 x_1 を基底に入れ，基底変数 x_3 を基底から出すことにより，目的関数値が減少する新しい実行可能基底解が求められる．2 節で求めた辞書 (3) と (5) も同様に (iv) の場合である．一方，辞書 (6) は (ii) の場合であり，基底解が最適解となっていることが判定できる．(iii) の場合の辞書については，7 節で説明する．最初に 2 節を読み飛ばして，3 節から読み始めた場合には，ここで 2 節に戻ることを勧める．

6. 実行可能基底解のグラフ上における単体法

この節では，標準形の線形計画問題が最適解をもつ場合に，単体法で最適解が求められる理由を，グラフを使って説明する．頂点と枝からなるグラフについてあまりよく知らない場合には，この節をスキップして，次の節に進んで構わない．

標準形の線形計画問題の各実行可能基底解を頂点とし，その集合を V とする．V に含まれる二つの頂点 v と v' について，その基底変数の集合の要素がただ一つ異なり，目的関数値が異なる場合に，目的関数値が大きい頂点から小さい頂点へ有向枝をはり，そのような有向枝の集合を E とする．一つの実行可能基底解が得られているとき，そこから出ている有向枝は，辞書をみることにより，すべて求めることができる．たとえば，頂点 v^6 を表す基底解は，辞書 (3) で表されるが，これより非基底変数 x_1 を基底に入れると目的関数値が減少し，x_3 が基底から出るので，頂点 v^3 に向けて枝 (v^6, v^3) が存在することがわかる．同様にして，枝 (v^6, v^4) も存在する．つまり，各頂点から出ている有向枝の数は，辞書の目的関数において，負となっている係数の数に等しい．上で定義した頂点の集合 V と有向枝の集合 E から，グラフ $G = (V, E)$ を定義できる．線形計画問題 (7) では，$V = \{v^1, v^3, v^4, v^6\}$，$E = \{(v^6, v^3), (v^6, v^4), (v^3, v^1), (v^4, v^1)\}$ となり，グラフ G は図 1 のように表される．

このグラフは，次のような性質をもつ．

- 最適な基底解 v^1 の頂点には，入る枝のみで出る枝がない．
- 最適な基底解以外の頂点には，出る枝が必ず一つ以上ある．
- 有向なループ（閉路）は存在しない．

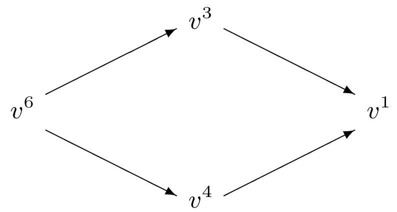

図 1　線形計画問題 (7) から得られるグラフ G

上記の性質は，仮定 4.1 を満たし，最適解をもつ任意の標準形の線形計画問題に対するグラフ G において成り立つ．グラフ G が上記の特徴をもつので，グラフ上の任意の頂点において，最適解でなければその頂点から有向枝を一つ選んで隣の頂点に移ることができ，それを繰り返すことにより，最適解となっている頂点に達する有向路を生成することができる．そのとき，有向枝の定義から，有向路上の頂点では，目的関数値が単調に減少する．たとえば，図 1 のグラフにおいて，頂点 v^6 から，有向枝 (v^6, v^3)，頂点 v^3，有向枝 (v^3, v^1) と生成して，最適解を表す頂点 v^1 に達することができる．実際，2 節で解説した単体法により，上で述べた有向路が生成されているので，それを確かめてみるとよい．単体法とは，標準形の線形計画問題の一つの実行可能基底解がわかっているときに，それを初期点として，グラフ G 上の有向路を最適基底解を見つけるまで生成する方法である．言い換えると，初期の実行可能基底解から出発し，目的関数値が減少するように基底変数と非基底変数を一組入れ替えた新しい実行可能基底解を生成する操作を，最適解が存在しないことを判定するか，最適解を見つけるまで繰り返す方法である．

7. 実行可能であるが最適解をもたない場合

前節までは，最適解をもつ線形計画問題を扱ってきた．しかし，問題によっては，最適解をもたないこともある．この節では，そのような問題に単体法を適用すると，最適解をもたないことが判定できることを示す．

次の線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & u = -x_1 - x_2 \\
\text{制約条件} & x_1 - x_2 \leq 2 \\
 & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{array}
\tag{11}
$$

を単体法により実際に解いてみる．この問題にスラッ

ク変数 x_3 と x_4 を導入して，標準形に書き換えると

$$\begin{aligned} &\text{最小化} && u = -x_1 - x_2 \\ &\text{制約条件} && x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ &&& -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ &&& x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{aligned} \tag{12}$$

となる．

問題 (12) において，四つの変数から，等式の数と等しい二つの変数 x_3 と x_4 を選んで，基底変数とする．その辞書は，

$$\begin{aligned} &\text{最小化} && u = -x_1 - x_2 \\ &\text{制約条件} && x_3 = 2 - x_1 + x_2 \\ &&& x_4 = 2 + 2x_1 - x_2 \\ &&& x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{aligned} \tag{13}$$

となる．この辞書 (13) において，非基底変数 x_1 と x_2 の値を 0 とすると，実行可能基底解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 2, 2)$ が得られ，その目的関数値は 0 である．

次に，上の辞書 (13) において，目的関数 u をみると，x_1 と x_2 の係数が負となっているので，最適な辞書ではない．非基底変数 x_1 を選んで，0 から増加させると，$x_1 = 2$ のときに $x_3 = 0$ となる．したがって，x_1 を基底に入れ，x_3 を基底から出すことにより，新しい実行可能基底解が得られる．そのときの辞書は，辞書 (13) から 2 節で解説した手順により

$$\begin{aligned} &\text{最小化} && u = -2 - 2x_2 + x_3 \\ &\text{制約条件} && x_1 = 2 + x_2 - x_3 \\ &&& x_4 = 6 + x_2 - 2x_3 \\ &&& x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{aligned} \tag{14}$$

となる．この辞書から，実行可能基底解 $(2, 0, 0, 6)$ とその目的関数値 -2 が得られる．この辞書の目的関数をみると，x_2 の係数が負となっている．非基底変数 x_3 を 0 として，この x_2 のみを 0 から増加させると，x_1 と x_4 の値が増加する．このことから，任意の $x_2 = t \geq 0$ に対して，実行可能解 $(2+t, t, 0, 6+t)$ とその目的関数値 $-2-2t$ が得られる．したがって，辞書 (14) の目的関数値に下界が存在しない．このような場合には，基底解から実行可能領域内に目的関数値が減少する方向に半直線が伸びているといい，問題 (11) と (12) には，最適解が存在しない．一般に，次の定理が成り立つ．

定理 7.1. 標準形の線形計画問題の実行可能基底解を表す辞書において，ある非基底変数に対して，目的関数における係数が負であり，制約式における係数がすべて非負ならば，その問題の目的関数値に下界が存在しない，つまり，問題に最適解が存在しない．

表 2 問題 (12) のすべての基底解

記号	基底変数	基底解	関数値	実行性
v^1	x_1, x_2	$(-4, -6, 0, 0)$	10	×
v^2	x_1, x_3	$(-1, 0, 3, 0)$	1	×
v^3	x_1, x_4	$(2, 0, 0, 6)$	-2	○
v^4	x_2, x_3	$(0, 2, 4, 0)$	-2	○
v^5	x_2, x_4	$(0, -2, 0, 4)$	2	×
v^6	x_3, x_4	$(0, 0, 2, 2)$	0	○

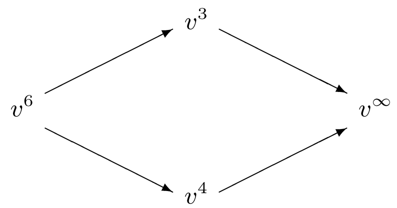

図 2 線形計画問題 (12) から得られるグラフ G

問題 (12) のすべての基底解を求めると，表 2 のようになり，三つの実行可能基底解 v^3, v^4, v^6 がある．この場合に，6 節と同じようにグラフを作るときには，頂点の集合に無限頂点 v^∞ を加えて $V = \{v^3, v^4, v^6, v^\infty\}$ とする．また，頂点 v を表す基底解から目的関数値が減少する方向に半直線が伸びている場合には，有向枝の集合に (v, v^∞) を加える．そのようにすると，$E = \{(v^6, v^3), (v^6, v^4), (v^3, v^\infty), (v^4, v^\infty)\}$ となり，問題 (12) から得られるグラフ $G = (V, E)$ は，図 2 のようになる．上記の単体法では，頂点 v^6 から，有向枝 (v^6, v^3)，頂点 v^3，有向枝 (v^3, v^∞) を生成して，無限頂点 v^∞ に達している．無限頂点に到達したということは，問題に最適解が存在しないことを意味する．

8. 単体法のアルゴリズム

前節までの議論をまとめると，初期実行可能基底解が得られる場合に，標準形の線形計画問題を解く単体法を次のように記述することができる．

アルゴリズム 8.1. 単体法は，次のステップからなる．

- **ステップ 0** 初期実行可能基底解における辞書を求める．
- **ステップ 1** 辞書の目的関数において，非基底変数の係数がすべて 0 以上ならば，最適基底解が得られているので，終了する．
- **ステップ 2** 目的関数において，係数が負となる非

基底変数を一つ選ぶ．

ステップ 3　制約式において選んだ非基底変数の係数がすべて非負ならば，問題に最適解が存在しないので，終了する．

ステップ 4　選んだ非基底変数を 0 から増加させるとき，最初に 0 となる基底変数を選ぶ．

ステップ 5　ステップ 2 で選んだ非基底変数を基底に入れ，ステップ 4 で選んだ基底変数を基底から出し，新しい基底における辞書を求め，ステップ 1 へ戻る．

このアルゴリズムを初期実行可能基底解が得られる線形計画問題に適用すると，線形計画問題が最適解をもたない場合が判定でき，最適解をもつ場合には一つの最適解を求めることができる．

9.　初期の実行可能基底解がわからない場合

大規模な線形計画問題に対して，実行可能基底解を求めることは，一般に簡単ではない．そのような問題に対して，初期実行可能基底解を求めてから問題を解く方法に，**2 段階単体法**がある．2 段階単体法は，次のように第 1 段階と第 2 段階からなる．

- 第 1 段階：実行可能基底解をもつ人工的な線形計画問題を作り，それを単体法で解くことにより，元問題が実行不能であることを判定できるか，あるいは元問題の実行可能基底解とその辞書を求める．後者の場合には，第 2 段階に進む．
- 第 2 段階：第 1 段階で求めた基底解を初期解として，元問題に単体法を適用し，最適解が存在しないことを判定できるか，あるいは最適解を求める．

この節では，例題を用いて 2 段階単体法を解説するが，11 節において，一般の線形計画問題に対する 2 段階単体法を示す．

次の標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{制約条件} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{array} \tag{15}$$

を使い，2 段階単体法を解説する．このとき，等式条件の右辺の定数項が必ず 0 以上である必要がある．もし負の定数がある場合には，両辺に -1 を乗じて，右辺の定数を正にする．まず，問題の各等式条件に一つの **人工変数**を導入し，その人工変数に 0 以上という条件を加え，導入したすべての人工変数の和を目的関数とする **人工問題**を作成する．問題 (15) では，二つの等式に人工変数 x_5 と x_6 をそれぞれ導入し，次のように人工問題を作る．

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & w = x_5 + x_6 \\ \text{制約条件} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 10 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4,5,6\} \end{array} \tag{16}$$

この人工問題は，目的関数値が 0 以上で，実行可能なので，必ず最適解をもち，仮定 4.1 を満たせば，単体法で最適解を求められる．各人工変数が一つの等式制約のみに現れるので，人工変数 x_5 と x_6 を基底変数とする辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & w = 16 - 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 \\ \text{制約条件} & x_5 = 6 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \\ & x_6 = 10 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4,5,6\} \end{array}$$

が簡単に得られる．このとき，基底解 $(0,0,0,0,6,10)$ は，実行可能である．これは最適な辞書ではないので，目的関数における係数が負となる非基底変数，ここでは x_3 を選ぶ．非基底変数 x_3 のみを 0 から増加させたとき，初めて 0 になる基底変数，この場合 x_5 を定め，それを基底から出す．基底変数 x_5 と x_3 を入れ替えた辞書は，2 節で解説した手順により

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & w = 8 - \frac{8}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5 \\ \text{制約条件} & x_3 = 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ & x_6 = 8 - \frac{8}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4,5,6\} \end{array}$$

となる．この辞書も最適ではないので，目的関数における係数が負となる非基底変数 x_4 を選ぶ．等式制約で x_4 の係数が負となっているのは 2 番目のみであるから，x_6 を基底から出す．そのときの新しい辞書は，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & w = x_5 + x_6 \\ \text{制約条件} & x_3 = 4 - x_1 - x_2 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 \\ & x_4 = 6 - 2x_1 - x_2 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{3}{4}x_6 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4,5,6\} \end{array}$$

となる．この辞書では，目的関数における非基底変数の係数がすべて 0 以上なので，人工問題 (16) の最適解が得られている．最適値が 0 であり，基底変数に人工変数が含まれていないので，この辞書から元問題 (15) の実行可能基底解とその辞書が求められることを次に示す．

上の辞書から実行可能基底解 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (0,0,4,6,0,0)$ が得られるが，人工変数の値が 0 なので，それを除いた $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,4,6)$ は元問題 (15) の実行可能基底解となる．また，等式制約から人工変数 x_5 と x_6 に関する項をすべて消去すると

$$x_3 = 4 - x_1 - x_2$$
$$x_4 = 6 - 2x_1 - x_2$$

が得られる．この等式制約は，元問題 (15) の等式制約を書き換えたものとなっている．上の関係式を問題 (15) の目的関数に代入すると

$$\begin{aligned} u &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ &= 3x_1 + x_2 + 2(4 - x_1 - x_2) \\ &= 8 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

となる．上で求めた目的関数と等式制約を使うと，x_3 と x_4 を基底変数とする問題 (15) の辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u = 8 + x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & x_3 = 4 - x_1 - x_2 \\ & x_4 = 6 - 2x_1 - x_2 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{array} \tag{17}$$

が得られる．ここまでが，2 段階単体法の第 1 段階である．

第 2 段階として，上の辞書 (17) から単体法を適用する．辞書 (17) は最適ではないので，目的関数における係数が負である非基底変数 x_2 を選び，これを基底に入れる．このとき，x_2 のみを 0 から増加させたときに初めて 0 となる基底変数は x_3 である．基底変数 x_3 と x_2 を入れ替え，新しい辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u = 4 + 2x_1 + x_3 \\ \text{制約条件} & x_2 = 4 - x_1 - x_3 \\ & x_4 = 2 - x_1 + x_3 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{array}$$

を求める．この辞書では，目的関数における非基底変数の係数がすべて 0 以上なので，最適解 $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,4,0,2)$ と最適値 4 を得る．以上のように，2 段階単体法により，元の線形計画問題 (15) を解くことができる．

10. 実行不能な問題の場合

前節では，2 段階単体法によって，実行可能な線形計画問題が解けることを示した．この節では，問題が実行不能な場合には，2 段階単体法を使うことによって，実行不能であることが判定できることを示す．

標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u = x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{制約条件} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4\} \end{array} \tag{18}$$

を使って説明する．この問題の実行可能解は簡単に得られないので，2 段階単体法を適用する．そのために，問題の等式条件に人工変数 x_5 と x_6 をそれぞれ導入し，それらに 0 以上という条件を加え，人工変数の和を目的関数とする人工問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & w = x_5 + x_6 \\ \text{制約条件} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4,5,6\} \end{array} \tag{19}$$

を作る．この人工問題を単体法で解くために，人工変数 x_5 と x_6 を基底変数とする辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & w = 6 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 \\ \text{制約条件} & x_5 = 2 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ & x_6 = 4 + x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4,5,6\} \end{array}$$

を求める．この辞書は最適ではないので，目的関数における係数が負となる非基底変数 x_3 を選ぶ．非基底変数 x_3 のみを 0 から増加させたとき，初めて 0 になる基底変数，この場合 x_5 を定め，それを基底から出す．基底変数 x_5 と x_3 を入れ替えた辞書は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & w = 2 + 2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 \\ \text{制約条件} & x_3 = 2 - x_1 - 2x_2 - x_5 \\ & x_6 = 2 + 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i \in \{1,2,3,4,5,6\} \end{array}$$

となる．目的関数における非基底変数の係数がすべて 0 以上なので，これは最適な辞書である．最適解は $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (0,0,2,0,0,2)$ であり，最適値は 2 である．もし，元の線形計画問題 (18) に実行可能解が存在するならば，その解と $(x_5,x_6)=(0,0)$ が人工問題 (19) の実行可能解となり，そのときの目的関数値が 0 となるので，最適値が 2 であることに矛盾する．したがって，元の線形計画問題 (18) には実行可能解が存在しないことがわかる．

11. 2 段階単体法のアルゴリズム

9 節と 10 節の議論をまとめると，標準形の線形計画

問題を解く2段階単体法を次のように記述することができる．

アルゴリズム 11.1. 2段階単体法は，次のステップからなる．

ステップ 1 標準形の線形計画問題の各等式に一つの人工変数を導入し，その人工変数に非負制約を加え，人工変数の和を目的関数とする人工的な線形計画問題を作り，人工変数を基底変数とする辞書を求める．

ステップ 2 その辞書から単体法を適用することにより人工問題を解き，最適基底解とその辞書を求める．その結果，人工問題の最適値が正ならば，元問題は実行不能であり，終了する．

ステップ 3 辞書から人工変数を削除し，元問題の目的関数を非基底変数で表すことにより，元問題の辞書を得る．

ステップ 4 ステップ3で求めた辞書から，単体法を適用することにより，最適解を得るか，最適解が存在しないことがわかる．

2段階単体法について，次の結果が得られる．

定理 11.2. 標準形の線形計画問題に2段階単体法を適用すれば，問題が実行不能である場合が判定でき，実行可能であるが最適解をもたない場合も判定できる．そして，問題が最適解をもつ場合には，一つの最適解と最適値を求めることができる．

12. おわりに

本稿では，線形計画問題を解く単体法について主に例題を用いて解説した．ページ数の関係から，単体法に関して，説明できなかったこともある．特に次に挙げることは，単体法をより深く理解するうえで重要であるが，本稿ではほとんど説明できなかった．

- 任意の線形計画問題が等価な標準形の線形計画問題に書き換えられる．
- 辞書において基底に入れる非基底変数を決めるときに，複数の候補がある場合にどれを選ぶか，あるいは基底から出る変数の候補が複数ある場合にどれを選ぶか，その決め方をピボット（選択）規則という．単体法の計算効率は，解くべき問題とピボット規則によって大きく異なる．どの問題にも優れているようなピボット規則は存在しないが，よく知られている規則として，最小係数規則，最良改善規則，最小添え字規則などがある．
- 本稿では，線形計画問題が非退化の仮定4.1を満たすという条件のもとで解説した．しかし，実際の問題では，この仮定を満たさないことがある．その場合には，単体法において，同じ基底解が繰り返し生成される巡回現象が起きることもある．ピボット規則には，巡回を起こさないものと，起こすものがあり，巡回を起こさないピボット規則として，Bland の規則 [2] などがある．
- すべての線形計画問題には，それと対をなす問題（双対問題）が存在する．元問題と双対問題の間には，双対定理などが成り立ち，線形計画問題の最適条件を得ることができる．
- 本稿では，単体法で必要となる計算量について，全く解説していない．線形計画問題を解く楕円体法と内点法は多項式時間解法であることが知られているが，多項式時間解法となる単体法が存在するかどうかについてはまだわかっていない．

上記のことについて興味があり，より深く学ぶ場合には，たとえば Chvatal [3]，Luenberger and Ye [4]，今野 [5]，あるいはインターネット上の学習資料 [6] を参照することを勧める．また，単体法の計算量に関する最近の結果については，北原と水野 [7] が参考となる．そこでは，単体法で生成される異なった基底解の数が，標準形の線形計画問題の変数の数，等式制約の数ならびにすべての基底解の正の要素の最大値と最小値の比に関する多項式で抑えられることが示されている．

謝辞 本稿の執筆を勧めてくださり，初稿にも目を通して，コメントをくださった山本芳嗣先生，繁野麻衣子先生，高野祐一先生に感謝いたします．本研究は，部分的に科学研究費基盤研究 (A)(26242027) の補助を受け行われた．

参考文献

[1] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, 1963.
[2] R. G. Bland, "New finite pivoting rules for the simplex method," *Mathematics of Operations Research*, **2**, pp. 103–107, 1977.
[3] V. Chvátal, *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company, 1983.
[4] D. G. Luenberger and Y. Ye, *Linear and Nonlinear Programming*, 3rd edition, Springer, 2008.
[5] 今野浩，『線形計画法』，日科技連出版社，1987.
[6] 水野眞治,「学習用テキスト　線形計画法 (3) シンプレックス法」, http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text.html
[7] 北原知就，水野眞治，"単体法の計算量の新評価，" 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，**55**, pp. 66–83, 2012.