

# 特集にあたって

山本 芳嗣 (静岡大学)

## 1. 線形計画法とは

オペレーションズ・リサーチの授業で開かれた最適化の扉の向こうで筆者が初めて出会ったのは、線形計画法 (Linear Programming) でした。動的計画法 (Dynamic Programming) のほうが言葉の響きがカッコいいなあと思っていた学部学生の筆者が、こんなにも長く線形計画法と遊んでもらえるとは思いませんでした。今号の特集ではこの線形計画法を取り上げ、その歴史に始まって、単体法入門から最新の多項式時間アルゴリズム、さらに各種ソルバの比較までを解説します。

さて、線形計画問題とは、たとえば

最小化	$u = -x_1 - x_2$
制約条件	$2x_1 + x_2 \leq 6$
	$x_1 + 3x_2 \leq 8$
	$x_1, x_2 \geq 0$

と表される問題です。制約条件の不等式を満たす変数  $(x_1, x_2)$  の取りうる値すべての中から、目的関数と呼ばれる関数  $u = -x_1 - x_2$  を最小にする値 (同じことですが、 $\gamma = x_1 + x_2$  を最大にする値) を求める問題です。図 1 に二つの変数  $x_1$  と  $x_2$  を軸に取って、制約条件を満たす点  $(x_1, x_2)$  の領域を示しました。実行可能領域と書かれた灰色の四角形がそれです。破線は  $u = -4, -5, -6, -7$  となる等高線です。図から斜めの 2 本の直線 ( $x_3 = 0$  と  $x_4 = 0$  が添えられている直線) の交わる点  $(x_1, x_2) = (2, 2)$  が求める点であることがわかります。多くの問題が線形計画問題に定式化されますので、当然のこととして非常に多数の変数と多数の制約条件からなる問題を解くための技術の開発が望まれてきました。

## 2. 特集の内容

今野浩氏には線形計画法の開発の歴史を、単体法の誕生から内点法の出現とアルゴリズム特許をめぐる攻防、ノーベル経済学賞の話など、氏のこれまでの研究を軸に書いていただきました。同氏の『ヒラノ教授の

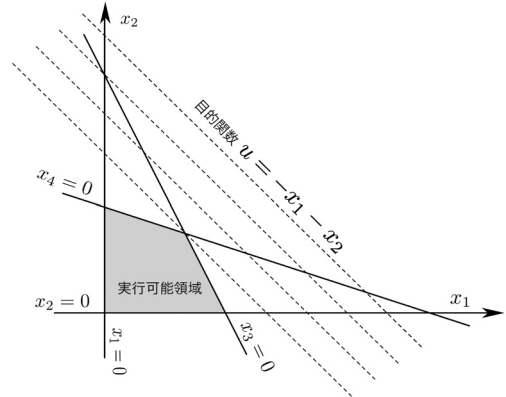


図 1 線形計画問題の例

線形計画法物語』をご覧ください。ここに書ききれなかった裏話を知ることができます。

水野眞治氏には単体法 (シンプレックス法) のやさしい解説を書いていただきました。前掲の問題は、その目的関数の符号を反転させて最大化問題にし、さらにスラック変数の助けを借りて制約条件を線形方程式系と変数の非負条件に変換すると

	最大化	$\gamma$		
	制約条件	$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$		
(P)		$x_1 + 3x_2 + x_4 = 8$		
		$x_1 + x_2 = \gamma$		
		$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$		

となります。 $\gamma$  は目的関数値を値として取る変数です。この線形方程式系を等価な線形方程式系に繰り返し書き換えることによって単体法は線形計画問題を解きます。水野氏の解説でも図 1 が参照されますので、そのときにはまた見てください。

内点法は単体法の弟分でありながら、兄貴を凌ぐスピードとその拡張性を誇っています。中田和秀氏には理論的にも美しい主双対内点法を解説していただきました。探索方向を求めるために解くべき線形方程式の構造をいかに利用するか、探索のステップサイズをどのように制御するかなど、理論的解析に加えて職人芸

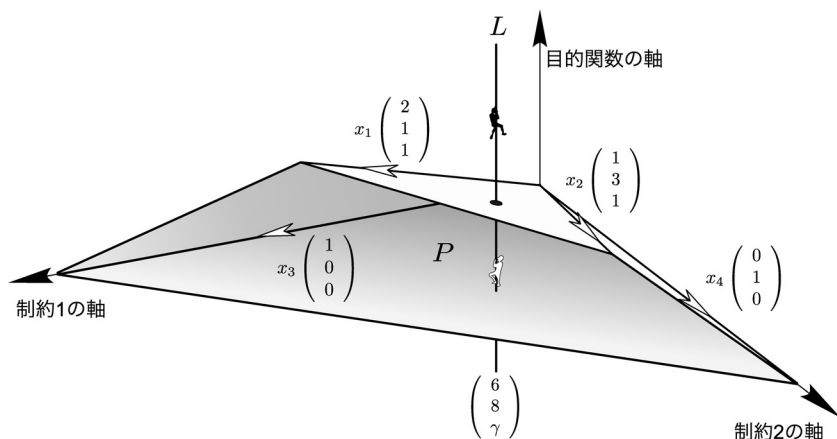


図2 LP-Newton 法  
多面錐を制約1の軸の値と制約2の軸の値の合計が20になる平面で切り取ってあります。

的要素も興味深い点です。

上の問題 ( $P$ ) の等式制約を係数ベクトルを使って書くと

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

となります。これは右辺の定数項  $(6, 8)^T$  と  $\gamma$  からなる3次元ベクトルを4本の3次元ベクトルの非負一次結合で表せと述べています。4本の3次元ベクトルの非負一次結合の全体で作る多面体を、第1軸と第2軸の座標値の合計が20となる平面で切り取った様子を図2に描きました。この問題は、図にある鉛直に垂れ下がったロープ ( $L$ ) をつたって降りてきた黒衣の人物が多面体 ( $P$ ) に初めて出会う点 (屋根の上の小さな黒丸) を求める問題に帰着されます (水野氏の解説にある単体法は、同じロープを下から登る白衣の人物が同じ黒丸にたどり着く方法です)。この見方に基づいた

LP-Newton 法を藤重悟氏に解説していただきました。今後の研究が待たれる分野です。

北原知就氏には最近にわかにも注目を集めている新しい多項式時間アルゴリズムである Chubanov のアルゴリズムを紹介していただきました。難解であるとの噂に怖気づいて読むのをためらっていた筆者などにはありがたい限りです。

最後に品野勇治氏と藤井浩一氏には日進月歩の線形計画ソルバについて解説していただきました。私が線形計画法を習った昔は、「えーっと、ここがピボットだから、この行をこれ分のこれ倍して足せばいいんだな」などと単体法を自分でプログラムする以外に線形計画問題を解く手立てはありませんでした。それが今では無料で利用できるソルバまであり、夢のようです。

明日と言わずぜひ今日から

「はじめよう線形計画法！」

最後に原稿に目を通してくださった繁野麻衣子、高野祐一両編集委員にお礼を申し述べたいと思います。