© オペレーションズ・リサーチ

論文・研究レポート

乗数形式2段階DEA比率尺度モデルの改訂と動的DEAへの展開

岡部　誠，甲斐　充彦，嶋田　陽子，関谷　和之

1. はじめに

Data Envelopment Analysis (DEA) は組織活動を入力から出力への変換過程とみなし，その変換効率を効率値として与える効率性分析である．DEA の長所の一つは複数の入出力をもつ組織活動を分析できることである．この長所は入出力項目に対する可変ウエイトを最適化することで実現される．可変ウエイトによる入力項目の加重和と出力項目の加重和との比を仮想入出力比と呼ぶ．可変ウエイトの最適化では，組織それぞれに対して仮想入出力比を可能な限り大きくする可変ウエイトを求める．

いくつかの部門からなる組織では，それらの部門間で財を入出力としてやり取りすることがある．ある部門の出力がほかの部門への入力でもある入出力項目は中間財と呼ばれる．二つの部門からなる組織の効率性を分析する DEA は 2 段階 DEA と呼ばれる．2 段階 DEA は組織全体の効率性だけでなく各部門の効率性も分析が可能であるため，多くの事例研究の報告 [1, 2] がある．

2 段階 DEA はさまざまな数理計画問題としてモデル化されている．それらのモデルの一つである乗数形式 2 段階 DEA 比率尺度モデルは，仮想入出力比に関する分数計画問題である．乗数形式 2 段階 DEA 比率尺度モデルの研究では，二つの部門の仮想入出力比に対するゲーム理論アプローチ [1, 3–5] が盛んである．ゲーム理論アプローチによるモデルは組織全体での仮想入出力比の最大化を目指す協力ゲームと二つの部門それぞれが自身の仮想入出力比を独自に最大化する非協力ゲームに大別される．

2 段階 DEA の既存研究 [3] は中間財が 1 個であれば協力ゲームと非協力ゲームとの解が一致することを主張するが，この主張は必ずしも成立しないことを本研究が明らかにする．この主張が正しければ，部門個別の効率性評価最適化は組織全体での効率性評価最適化をもたらすという解釈が成り立つ．さらに，非協力ゲームに対する求解は協力ゲームのそれより簡単であること [2] から，解の計算においても有用である．

以降では，文献 [3] の主張が成立しない数値例を示す．さらに，協力ゲームによる乗数形式 2 段階 DEA 比率尺度モデルを改訂し，改訂版であれば文献 [3] の主張が成立することを保証する．最後に，提案する改訂モデルが多期間にわたる組織活動の効率性を分析する動的 DEA へ拡張可能であることを示す．

2. 乗数形式 2 段階 DEA 比率尺度モデル

DEA は評価する組織を DMU (Decision Making Units) と呼び，DMU の個数を n 個とする．本研究の 2 段階 DEA では，第 1 部門から第 2 部門への中間財の項目数が 1 個である場合を考える．第 1 部門を 1S，第 2 部門を 2S と書く．文献 [3] の 2 段階 DEA の設定に準じた各部門の入出力を考える．1S では入力項目数は m_1 とし，中間財以外の出力項目はない．2S は中間財以外の入力項目数を m_2 とし，出力項目数は s_2 とする．第 j 番目の DMU の 1S の第 i 番目の入力を x^1_{ij}，中間財を z_j，2S の第 i 番目の入力を x^2_{ij}，2S の第 r 番目の出力を y^2_{rj} とする．第 j 番目の DMU を DMU$_j$ とする．DMU$_j$ の二つの部門の入出力と中間財のやり取りを図 1 に示す．図 1 の入出力構造に注目した DEA 研究は，中国 30 地域における研究開発政策

おかべ　まこと，かい　あつひこ
静岡大学工学領域
okabe.makoto@shizuoka.ac.jp
kai.atsuhiko@shizuoka.ac.jp
しまだ　ようこ
静岡大学技術部
shimada.yoko@shizuoka.ac.jp
せきたに　かずゆき
東京理科大学経営学部経営学科
〒 102–0071 東京都千代田区富士見 1–11–2
sekitani.kazuyuki@shizuoka.ac.jp
受付 17.12.19　採択 18.3.5

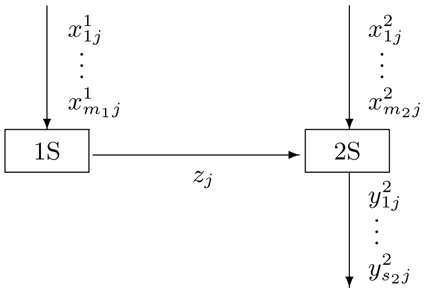

図 1　DMU_j の二つの部門の入出力と中間財

の検証 [3]，購買販売部門からなるサプライチェインの効率性分析 [4]，2 ステージ制コンテストにおける敢闘賞決定 [6] がある．

図 1 の 2 段階 DEA を考える．DMU_k ($k=1,\ldots,n$) に対する 1S と 2S の非協力ゲーム型モデル [3] それぞれを，標準的な DEA モデルである CCR [7] と等価な乗数形式比率尺度モデル

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \frac{w^1 z_k}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ik}^1} \\
\text{s.t.}\quad & \frac{w^1 z_j}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ij}^1} \leq 1 \qquad (j=1,\ldots,n) \\
& w^1 \geq 0, v_i^1 \geq 0\,, \qquad (i=1,\ldots,m_1), \quad (1)
\end{aligned}
$$

と

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \frac{\sum_{r=1}^{s_2} u_r^2 y_{rk}^2}{w^2 z_k + \sum_{i=1}^{m_2} v_i^2 x_{ik}^2} \\
\text{s.t.}\quad & \frac{\sum_{r=1}^{s_2} u_r^2 y_{rj}^2}{w^2 z_j + \sum_{i=1}^{m_2} v_i^2 x_{ij}^2} \leq 1 \quad (j=1,\ldots,n) \\
& w^2 \geq 0, u_r^2 \geq 0\,, \qquad (r=1,\ldots,s_2) \\
& v_i^2 \geq 0\,, \qquad (i=1,\ldots,m_2) \quad (2)
\end{aligned}
$$

とする．$x_{ij}^1>0$, $x_{ij}^2>0$, $y_{rj}^2>0$, $z_j>0$, $\frac{0}{0}=0$ を仮定する．このとき，最大化問題 (1) と (2) それぞれには最適解が存在する．

各 $k=1,\ldots,n$ に対して，モデル (1) の最適値と最適解それぞれを θ_k^{1*} と $(\boldsymbol{v}^{1*}, w^{1*})$，モデル (2) の最適値と最適解それぞれを θ_k^{2*} と $(w^{2*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*})$ とする．DMU_k の 1S の部門効率値は θ_k^{1*}, 2S の部門効率値は θ_k^{2*} とする．

DMU_k ($k=1,\ldots,n$) に対する協力ゲーム型モデルを以下の (3) とする．

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \frac{w z_k}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ik}^1} \times \frac{\sum_{r=1}^{s_2} u_r^2 y_{rk}^2}{w z_k + \sum_{i=1}^{m_2} v_i^2 x_{ik}^2} \qquad (3) \\
\text{s.t.}\quad & \text{(1) と (2) の制約条件すべて}
\end{aligned}
$$

表 1　主張 1 への反例

	観測値				部門効率値		$\theta_k^\#$
	x_1^1	z_j	x_1^2	y_1^2	1S	2S	
DMU_1	2	2	1	1	1	1	無
DMU_2	1	1	1	1	1	1	1

（「無」は問題 (3) に最適解存在なしを意味する）

協力ゲーム型モデル (3) の最適値を $\theta_k^\#$，最適解を $(\boldsymbol{v}^{1\#}, w^\#, \boldsymbol{v}^{2\#}, \boldsymbol{u}^{2\#})$ とする．文献 [3] は $\theta_k^\#$ を DMU_k の全体効率値とし，その定理 3 （文献 [3] の p. 614）では全体効率値に関する部門効率値分解の主張を次のように与えた．

主張 1.　中間財が 1 個であれば，$\theta_k^\# = \theta_k^{1*} \cdot \theta_k^{2*}$ である．

この主張 1 に対する反例を表 1 に与える．

DMU_1 の各部門別効率値を与える最大化問題 (1) と (2) を考える．このとき，最大化問題 (1) と (2) の最適値はともに 1 である．つまり，$\theta_1^{1*} \cdot \theta_1^{2*} = 1$ である．

DMU_1 の全体効率値を与える問題 (3) の制約条件は

$$
\begin{aligned}
& \frac{2w}{2v_1^1} \leq 1\,, && \frac{w}{v_1^1} \leq 1 && (4) \\
& \frac{u_1^2}{2w+v_1^2} \leq 1\,, && \frac{u_1^2}{w+v_1^2} \leq 1 && (5) \\
& v_1^1 \geq 0\,, w \geq 0\,, && v_1^2 \geq 0, u_1^2 \geq 0 && (6)
\end{aligned}
$$

である．式 (5) と (6) から，

$$
\frac{u_1^2}{2w+v_1^2} \leq \frac{u_1^2}{w+v_1^2} \leq 1
$$

である．したがって，$\frac{u_1^2}{2w+v_1^2}=1$ であれば $w=0$ である．$w=0$ であれば仮定 $\frac{0}{0}=0$ から $\frac{2w}{2v_1^1}<1$ である．逆に，$\frac{2w}{2v_1^1}=1$ であれば $w>0$ である．このとき，

$$
\frac{u_1^2}{2w+v_1^2} < \frac{w}{v_1^1} \leq 1
$$

である．DMU_1 の問題 (3) の任意の実行可能解 (v_1^1, w, v_1^2, u_1^2) に対する目的関数値は

$$
\frac{w z_1}{v_1^1 x_{11}^1} \times \frac{u_1^2 y_{11}^2}{w z_1 + v_1^2 x_{11}^2} < 1
$$

である．主張 1 は成立しない．

3.　2 種類のゲーム型モデルの解の一致

DMU_1 の各部門別効率値を与える最大化問題 (1) と

(2) それぞれの一つの最適解は $(v_1^{1*}, w^{1*}) = (1, 1)$ と $(w^{2*}, v_1^{2*}, u_1^{2*}) = (0, 1, 1)$ である．ここで，自然数 t に対して $(v_1^1(t), w(t), v_1^2(t), u_1^2(t))$ を

$$\frac{1}{t}(v_1^{1*}, w^{1*}, 0, 0) + (0, w^{2*}, v_1^{2*}, u_1^{2*}) \tag{7}$$

とすると，$(v_1^1(t), w(t), v_1^2(t), u_1^2(t)) = (1/t, 1/t, 1, 1)$ である．$(1/t, 1/t, 1, 1)$ は問題 (3) の実行可能解である．さらに，DMU_1 に対する問題 (3) の目的関数値は

$$\frac{w(t)z_1}{v_1^1(t)x_{11}^1} \times \frac{u_1^2(t)y_{11}^2}{w(t)z_1 + v_1^2(t)x_{11}^2} = \frac{2/t}{2/t} \times \frac{1}{2/t+1} < 1 = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{2} \times \frac{1}{2/t+1}$$

である．つまり，問題 (3) の上限は 1 である．この上限は，$\theta_1^{1*} \cdot \theta_1^{2*} = 1$ に一致する．

本研究では，問題 (3) の max を sup に代えた問題

$$\sup \quad \frac{wz_k}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ik}^1} \times \frac{\sum_{r=1}^{s_2} u_r^2 y_{rk}^2}{wz_k + \sum_{i=1}^{m_2} v_i^2 x_{ik}^2}$$
$$\text{s.t.} \quad (1) \text{ と } (2) \text{ の制約条件すべて} \tag{8}$$

を協力ゲーム型モデルとする．この上限を全体効率値とし，ϕ_k^* と記す．このとき，全体効率値が個別部門効率値に分解できることを以下の定理は保証する．

定理 1. 中間財が 1 個であれば，$\phi_k^* = \theta_k^{1*} \cdot \theta_k^{2*}$ である．

定理 1 の証明には以下の四つの補助定理を用いる．

補助定理 1. $\phi_k^* \leq \theta_k^{1*} \cdot \theta_k^{2*}$ である．

補助定理 2. 問題 (1) の最適な w^1 は $w^{1*} > 0$ である．

補助定理 3. 問題 (2) の最適な w^2 が $w^{2*} > 0$ ならば，

$$\frac{w^{2*}}{w^{1*}}(\boldsymbol{v}^{1*}, w^{1*}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) + (\boldsymbol{0}, 0, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*}) \tag{9}$$

は問題 (8) の最適解である．さらに，問題 (8) の最適値は $\theta_k^{1*} \cdot \theta_k^{2*}$ である．

補助定理 4. 問題 (2) の最適な w^2 は $w^{2*} = 0$ とする．任意の自然数 t に対して $(\boldsymbol{v}^1(t), w(t), \boldsymbol{v}^2(t), \boldsymbol{u}^2(t))$ を

$$\frac{1}{t}(\boldsymbol{v}^{1*}, w^{1*}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) + (\boldsymbol{0}, w^{2*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*}) \tag{10}$$

とする．このとき，任意の自然数 t に対して (10) は問題 (8) の実行可能解である．さらに，以下が成立する．

$$\theta_k^{1*} \cdot \theta_k^{2*} = \lim_{t\to\infty} \frac{w(t)z_k}{\boldsymbol{v}^1(t)^\top \boldsymbol{x}_k^1} \cdot \frac{\boldsymbol{u}^2(t)^\top \boldsymbol{y}_k^2}{w(t)z_k + \boldsymbol{v}^2(t)^\top \boldsymbol{x}_k^2}. \tag{11}$$

各補助定理の証明は付録に記載する．

定理 1 を証明する．問題 (2) の最適な w^2 の値が $w^{2*} > 0$ と $w^{2*} = 0$ で場合分けする．

$w^{2*} > 0$ の場合を考える．このとき，補助定理 3 と補助定理 1 から，$\phi_k^* = \theta_k^{1*} \cdot \theta_k^{2*}$ である．

$w^{2*} = 0$ の場合を考える．補助定理 4 は，問題 (8) の実行可能解 (10) の目的関数値が $t \to \infty$ に対して $\theta_k^{1*} \cdot \theta_k^{2*}$ に収束することを意味する．したがって，補助定理 1 から，$\phi_k^* = \theta_k^{1*} \cdot \theta_k^{2*}$ である．$w^{2*} > 0$ と $w^{2*} = 0$ のいずれの場合でも，$\phi_k^* = \theta_k^{1*} \cdot \theta_k^{2*}$ である．

4. 動的 DEA への展開

動的 DEA は多期間にわたる組織活動の効率性を分析するために開発された．分析する対象期間を L 期間とする．期間 $l = 1, \ldots, L$ では，DMU_j が m 個の入力 $\boldsymbol{x}_j^l$ と前期 $l-1$ から繰越した財 z_j^{l-1} を用いて s 個の出力 $\boldsymbol{y}_j^l$ と次期 $l+1$ への繰越した財 z_j^l を産出すると考える．この z_j^{l-1} を準固定入力と呼び，l 期で調整できない財として定義すること [8] がある．たとえば，事例研究 [9] は $l-1$ 期までの物的資本ストックを z_j^{l-1} とする．問題 (8) は中間財 z_j を 2S では調整できない財として扱うことが可能である．そこで，準固定入力 z_j^{l-1} をもつ動的 DEA に対して問題 (8) を拡張する．本研究では，繰越した財の項目数は 1 個とする．なお，初期 $l = 1$ では，DMU_j の入力の一部に z_j^0 が含まれていることに注意する．動的 DEA が分析対象とする DMU_j の組織活動を図 2 に与える．

期間を部門とみなすと 2 期間 $(L = 2)$ の動的 DEA は 2 段階 DEA である．具体的には，DMU_j に対して，中間財は $z_j = z_j^1$，1S の入力は $m_1(= m + 1)$ 個の $(\boldsymbol{x}_j^1, z_j^0)$，1S の出力は $s_1(= s)$ 個の $\boldsymbol{y}_j^1$，2S の入力

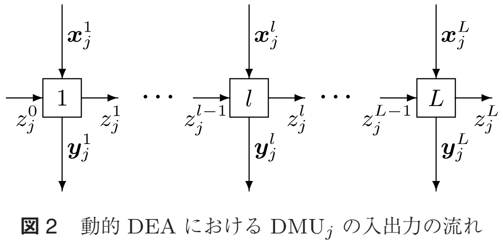

図 2 動的 DEA における DMU_j の入出力の流れ

は $m_2(=m)$ 個の $\boldsymbol{x}_j^1$，2S の出力は $s_2(=s+1)$ 個の $(\boldsymbol{y}_j^2, z_j^2)$ である．$x_{m_1 j}^1 = z_j^0$, $y_{s_2 j}^2 = z_j^2$ とする．このとき，協力ゲーム型の乗数形式 2 段階比率尺度モデルは問題 (12) とする．

$$
\begin{aligned}
\sup \quad & \frac{wz_k + \sum_{r=1}^{s_1} u_r^1 y_{rk}^1}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ik}^1} \times \frac{\sum_{r=1}^{s_2} u_r^2 y_{rk}^2}{wz_k + \sum_{i=1}^{m_2} v_i^2 x_{ik}^2} \\
\text{s.t.} \quad & \frac{wz_j + \sum_{r=1}^{s_1} u_r^1 y_{rk}^1}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ij}^1} \leq 1 \ (j=1,\ldots,n) \\
& (2) \text{ の制約条件すべて} \\
& u_r^1 \geq 0 \qquad (r=1,\ldots,s_1) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

問題 (12) は問題 (8) の一般化である．問題 (12) の sup を max に置き換えた最大化問題を用いて文献 [5] は国別オリンピックメダル獲得効率性を検討した．DMU_k に対して，全体効率値を問題 (12) の上限とし，1 期のターム効率値を

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \frac{w^1 z_k + \sum_{r=1}^{s_1} u_r^1 y_{rk}^1}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ik}^1} \\
\text{s.t.} \quad & \frac{w^1 z_j + \sum_{r=1}^{s_1} u_r^1 y_{rj}^1}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ij}^1} \leq 1 \ (j=1,\ldots,n) \\
& w^1 \geq 0, v_i^1 \geq 0 \ (i=1,\ldots,m_1) \\
& u_r^1 \geq 0 \ (r=1,\ldots,s_1) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

の最大値，2 期の部門効率値を問題 (2) の最大値とする．l 期のターム効率値を θ_k^l，全体効率値を ϕ_k と記す．前節の 2 段階 DEA に $\boldsymbol{y}_j^1$ を追加した 2 期間の動的 DEA では，前節の結果と同じように全体効率値に対するターム効率値分解に関する性質が成り立つ．

定理 2. 中間財が 1 個であれば，$\phi_k = \prod_{l=1}^2 \theta_k^l$ である．

以下の補助定理を用いて定理 2 を示す．なお，各補助定理の証明は付録に記す．

補助定理 5. $\phi_k \leq \theta_k^1 \cdot \theta_k^2$ である．

問題 (13) の最適な w^{1*} は正値とは限らない．

補助定理 6. 問題 (13) の最適解を $(\boldsymbol{v}^{1*}, \boldsymbol{u}^{1*}, w^{1*})$ とする．もし $w^{1*} > 0$ であれば，$\phi_k = \theta_k^1 \cdot \theta_k^2$ である．

補助定理 7. 問題 (13) の最適解を $(\boldsymbol{v}^{1*}, \boldsymbol{u}^{1*}, w^{1*})$，問題 (2) の最適解を $(w^{2*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*})$ とする．$w^{1*} = 0$ かつ $w^{2*} > 0$ ならば，$w^1 = w^{2*}$ を満たす問題 (13) の実行可能解は存在し，$(\hat{\boldsymbol{v}}^1, \hat{\boldsymbol{u}}^1, w^{2*})$ とする．任意の自然数 t に対して $(\boldsymbol{v}^1(t), \boldsymbol{u}^1(t), w(t), \boldsymbol{v}^2(t), \boldsymbol{u}^2(t))$ を

$$
(\boldsymbol{v}^{1*}, \boldsymbol{u}^{1*}, w^{1*}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + \frac{1}{t}(\hat{\boldsymbol{v}}^1, \hat{\boldsymbol{u}}^1, w^{2*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*}) \qquad (14)
$$

とする．任意の自然数 t に対して (14) は問題 (12) の実行可能解である．さらに，以下が成立する．

$$
\theta_k^1 \cdot \theta_k^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{w(t) z_k + \boldsymbol{u}^1(t)^\top \boldsymbol{y}_k^1}{\boldsymbol{v}^1(t)^\top \boldsymbol{x}_k^1} \cdot \frac{\boldsymbol{u}^2(t)^\top \boldsymbol{y}_k^2}{w(t) z_k + \boldsymbol{v}^2(t)^\top \boldsymbol{x}_k^2}. \qquad (15)
$$

補助定理 8. 問題 (13) の最適解を $(\boldsymbol{v}^{1*}, \boldsymbol{u}^{1*}, w^{1*})$，問題 (2) の最適解を $(w^{2*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*})$ とする．$w^{1*} + w^{2*} = 0$ ならば，$(\boldsymbol{v}^{1*}, \boldsymbol{u}^{1*}, 0, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*})$ は問題 (12) の最適解である．問題 (12) の最適値は $\theta_k^1 \cdot \theta_k^2$ である．

$w^{1*} + w^{2*} > 0$ であれば補助定理 6 と 7 から，$w^{1*} + w^{2*} = 0$ であれば補助定理 8 から，定理 2 は成り立つ．

L 期間に対する協力ゲーム型の乗数形式 2 段階比率尺度モデルを問題 (16) とする．

$$
\begin{aligned}
\sup \quad & \prod_{l=1}^{L} \frac{w^l z_k^l + \sum_{r=1}^{s} u_r^l y_{rk}^l}{w^{l-1} z_k^{l-1} + \sum_{i=1}^{m} v_i^l x_{ik}^l} \\
\text{s.t.} \quad & \frac{w^l z_j^l + \sum_{r=1}^{s} u_r^l y_{rj}^l}{w^{l-1} z_j^{l-1} + \sum_{i=1}^{m} v_i^l x_{ij}^l} \leq 1 \begin{pmatrix} j=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,L \end{pmatrix} \\
& w^l \geq 0 \ (l=0,\ldots,L) \\
& v_i^l \geq 0 \ (i=1,\ldots,m, l=1,\ldots,L) \\
& u_r^l \geq 0 \ (r=1,\ldots,s, l=1,\ldots,L) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

問題 (16) の上限を DMU_k の全体効率値 ϕ_k とする．l 期のターム効率値 θ_k^l を問題 (17) の最大値とする．

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \frac{w^l z_k^l + \sum_{r=1}^{s} u_r^l y_{rk}^l}{w^{l-1} z_k^{l-1} + \sum_{i=1}^{m} v_i^l x_{ik}^l} \\
\text{s.t.} \quad & \frac{w^l z_j^l + \sum_{r=1}^{s} u_r^l y_{rj}^l}{w^{l-1} z_j^{l-1} + \sum_{i=1}^{m} v_i^l x_{ij}^l} \leq 1 \ (j=1,\ldots,n) \\
& w^{l-1} \geq 0, v_i^l \geq 0 \ (i=1,\ldots,m) \\
& u_r^l \geq 0 \ (r=1,\ldots,s),\ w^l \geq 0 \qquad (17)
\end{aligned}
$$

このとき，動的 DEA の全体効率値のターム効率値分解を以下の定理は保証する．

定理 3. 中間財が 1 個であれば，$\phi_k = \prod_{l=1}^{L} \theta_k^l$ である．

5. おわりに

乗数形式 2 段階 DEA 比率尺度モデルに対して max を sup に変更することを提案した．中間財が 1 個であれば，乗数形式 2 段階 DEA 比率尺度モデルの非協力ゲームの解と協力ゲームの解が一致することを示した．これは，全体効率値は部門効率値に分解可能であること（定理 1, 2）を意味する．この分解可能性は動的 DEA に対しても成立し，全体効率値がターム効率値に分解可能であること（定理 3）が導かれる．これらの定理により，部門効率値またはターム効率値を累積することで全体効率値が計算可能である．なお，部門効率値またはターム効率値を定義する分数計画問題 (1), (2), (13) と (17) は Charnes–Cooper 変換によりすべて線形計画問題に帰着できることに注意されたい．

文献 [7] の表 6 には 88 件の動的 DEA の適用報告が挙げられており，中間財が 1 個である適用例は 48 件であった．それら適用例 48 件において，データセット 4 個が入手可能であった．全体効率値を達成する最適解が存在しない DMU があることを 4 個のデータセット全てで確認した．最適解が存在しない現象は仮想入出力比のウエイト最適化における経験則「出力として高い評価を受ける中間財を入力では低く評価する」によるものと考える．

全体効率値のターム効率値分解は，ターム効率値を CCR でなく BCC [7] で決定しても，また，全体効率値を部門仮想入出力比の累積から総和に変更しても，成立する．既存の動的 DEA モデルとの理論と実践の両面における比較は今後の課題である．

参考文献

[1] W. D. Cook, L. Liang and J. Zhu, "Measuring performance of two-stage network structures by DEA: A review and future perspective," *Omega*, **38**, pp. 423–430, 2010.

[2] G. E. Halkos, N. G. Tzeremes and S. A. Kourtzidis, "A unified classification of two-stage DEA models," *Surveys in Operations Research and Management Science*, **19**, pp. 1–16, 2014.

[3] Y. Li, Y. Chen, L. Liang and J. Xie, "DEA models for extended two-stage network structures," *Omega*, **40**, pp. 611–618, 2012.

[4] L. Liang, F. Yang, W. D. Cook and J. Zhu, "DEA models for supply chain efficiency evaluation," *Annals of Operations Research*, **145**, pp. 35–49, 2006.

[5] Y. Li, X. Lei, Q. Dai and L. Liang, "Performance evaluation of participating nations at the 2012 London Summer Olympics by a two-stage data envelopment analysis," *European Journal of Operational Research*, **243**, pp. 964–973, 2015.

[6] 関谷和之"プログラミングコンテストへの敢闘賞の導入と DEA による候補選定，"オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**63**(5), pp. 267–273, 2018.

[7] W. D. Cook and J. Zhu（森田浩訳），『データ包絡分析法 DEA』，静岡学術出版，2014.

[8] F. B. Mariz, M. R. Almeida and D. Aloise, "A review of Dynamic Data Envelopment Analysis: State of the art and applications," *International Transactions in Operational Research*, **25**, pp. 469–505, 2018.

[9] 橋本敦夫，福山博文，"温室効果ガス排出量の抑制を考慮した都道府県の生産性評価，"日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，**60**, pp. 1–19, 2017.

付録

補助定理 1 の証明． 以下の問題を考える．

$$\sup \quad \frac{w^1 z_k}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ik}^1} \cdot \frac{\sum_{r=1}^{s_1} u_r^2 y_{rk}^2}{w z_k + \sum_{i=1}^{m_2} v_i^2 x_{ik}^2} \tag{18}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{w^1 z_j}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ij}^1} \leq 1 \ (\forall j) \tag{19}$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s_2} u_r^2 y_{rj}^2}{w^2 z_j + \sum_{i=1}^{m_2} v_i^2 x_{ij}^2} \leq 1 \ (\forall j) \tag{20}$$

$$w^1 \geq 0, v_i^1 \geq 0 \ (\forall i) \tag{21}$$

$$w^2 \geq 0, u_r^2 \geq 0 \ (\forall r), v_i^2 \geq 0 \ (\forall i) \tag{22}$$

等式条件 $w^1 = w^2$ を追加した問題 (18)〜(22) は問題 (8) なので，問題 (8) の上限 ϕ_k^* は問題 (18)〜(22) の上限以下である．問題 (18)〜(22) の上限は二つの問題，

$$\sup \left\{ \frac{w^1 z_k}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^1 x_{ik}^1} \ \middle| \ \text{制約式 (19), (21)} \right\} \tag{23}$$

の上限と

$$\sup \left\{ \frac{\sum_{r=1}^{s_1} u_r^2 y_{rk}^2}{w z_k + \sum_{i=1}^{m_2} v_i^2 x_{ik}^2} \ \middle| \ \text{制約式 (20), (22)} \right\} \tag{24}$$

の上限との積に等しい．さらに，$\frac{0}{0} = 0$ なので二つの問題 (23) と (24) は最適解をもち，それぞれの sup は max に等価に置き換えることができる．したがって，問題 (18)〜(22) の上限は $\theta_k^{1*} \times \theta_k^{2*}$ に等しい．ϕ_k^* は問題 (18)〜(22) の上限以下なので，$\phi_k^* \leq \theta_k^{1*} \times \theta_k^{2*}$ である．

補助定理 2 の証明． $\bar{w}^1 = \min \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{m_1} x_{ij}^1}{z_j} \right\}$ とすると，$\bar{w}^1 > 0$ であり，

$$\max_{j=1,\ldots,n} \frac{\bar{w}^1 z_j}{\sum_{i=1}^{m_1} x_{ij}^1} \leq 1$$

である．$\boldsymbol{e}$ を各成分が 1 である m_1 次元ベクトルとす

ると，$(\boldsymbol{e}, \bar{w}^1)$ は問題 (1) の実行可能解である．さらに，$(\boldsymbol{e}, \bar{w}^1)$ に対する問題 (1) の目的関数値は $\frac{\bar{w}^1 z_k}{\sum_{i=1}^{m_1} x_{ik}^1} > 0$ を満たす．したがって，問題 (1) の最適値は正である．問題 (1) の最適解 $(\boldsymbol{v}^{1*}, w^{1*})$ は $w^{1*} > 0$ を満たす．

補助定理 3 の証明. 問題 (1) の最適解 $(\boldsymbol{v}^{1*}, w^{1*})$ と問題 (2) の最適解 $(w^{2*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*})$ に対して，

$$w^{2*}(\boldsymbol{v}^{1*}, w^{1*}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) + w^{1*}(\boldsymbol{0}, 0, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*}) \quad (25)$$

を考える．このとき，

$$(w^{2*}\boldsymbol{v}^{1*}, w^{1*}w^{2*}, w^{1*}\boldsymbol{v}^{2*}, w^{1*}\boldsymbol{u}^{2*}) \geq \boldsymbol{0}$$
$$\frac{w^{2*}w^{1*}z_j}{\sum_{i=1}^{m_1} w^{2*}v_i^{1*}x_{ij}^1} \leq 1 \ (\forall j)$$
$$\frac{\sum_{r=1}^{s_2} w^{1*}u_r^{2*}y_{rj}^2}{w^{1*}w^{2*}z_j + \sum_{i=1}^{m_2} w^{1*}v_i^{2*}x_{ij}^2} \leq 1 \ (\forall j)$$

を満たすので，(25) は問題 (8) の実行可能解である．補助定理 2 から $1/w^{1*} > 0$ である．(25) を $1/w^{1*}$ 倍した (9) は問題 (8) の実行可能解である．問題 (8) の実行可能解 (9) に対する目的関数値は以下を満たす．

$$\frac{w^{2*}z_k}{\frac{w^{2*}}{w^{1*}}\boldsymbol{v}^{1*\top}\boldsymbol{x}_k^1} \cdot \frac{\boldsymbol{u}^{2*\top}\boldsymbol{y}_k^2}{w^{2*}z_k + \boldsymbol{v}^{2*\top}\boldsymbol{x}_k^2}$$
$$= \frac{w^{1*}z_k}{\boldsymbol{v}^{1*}\boldsymbol{x}_k^1} \cdot \frac{\boldsymbol{u}^{2*\top}\boldsymbol{y}_k^2}{w^{2*}z_k + \boldsymbol{v}^{2*\top}\boldsymbol{x}_k^2} = \theta_k^{1*} \cdot \theta_k^{2*}$$

補助定理 1 から，(9) は問題 (8) の最適解である．

補助定理 4 の証明. 自然数 t を任意に選ぶ．(10) は

$$\left(\frac{1}{t}\boldsymbol{v}^{1*}, \frac{1}{t}w^{1*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*}\right) \quad (26)$$

である．$(\boldsymbol{v}^{1*}, w^{1*})$ と $(w^{2*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*})$ それぞれは問題 (1) の最適解と問題 (2) の最適解であり，$\frac{1}{t}w^{1*}z_j > 0$ から，(26) は

$$\left(\frac{1}{t}\boldsymbol{v}^{1*}, \frac{1}{t}w^{1*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*}\right) \geq \boldsymbol{0}$$
$$\frac{\frac{1}{t}w^{1*}z_j}{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m_1} v_i^{1*}x_{ij}^1} = \frac{w^{1*}z_j}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^{1*}x_{ij}^1} \leq 1 \ (\forall j)$$
$$\frac{\sum_{r=1}^{s_2} u_r^{2*}y_{rj}^2}{\frac{1}{t}w^{1*}z_j + \sum_{i=1}^{m_2} v_i^{2*}x_{ij}^2} < \frac{\sum_{r=1}^{s_2} u_r^{2*}y_{rj}^2}{\sum_{i=1}^{m_2} v_i^{2*}x_{ij}^2} \leq 1 \ (\forall j)$$

を満たす．(10) は問題 (8) の実行可能解である．

任意の自然数 t に対する実行可能解 (26) による点列は以下の極限をもつ．

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t}w^{1*}z_k}{\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m_1} v_i^{1*}x_{ik}^1} = \frac{w^{1*}z_k}{\sum_{i=1}^{m_1} v_i^{1*}x_{ik}^1} = \theta_k^{1*}$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{s_2} u_r^{2*}y_{rk}^2}{\frac{1}{t}w^{1*}z_k + \sum_{i=1}^{m_2} v_i^{2*}x_{ik}^2} = \frac{\sum_{r=1}^{s_2} u_r^{2*}y_{rk}^2}{\sum_{i=1}^{m_2} v_i^{2*}x_{ik}^2} = \theta_k^{2*}$$

したがって，(11) は成り立つ．

補助定理 5 の証明. 補助定理 1 と同様な証明で示すことができる．

補助定理 6 の証明. $w^{2*} > 0$ のとき，

$$\frac{w^{2*}}{w^{1*}}\left(\boldsymbol{v}^{1*}, \boldsymbol{u}^{1*}, w^{1*}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\right) + \left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, 0, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*}\right)$$

が問題 (12) の最適解であること，さらに，その最適値が $\theta_k^1 \cdot, \theta_k^2$ であることは補助定理 3 と同様な証明で示すことができる．

$w^{2*} = 0$ のとき，任意の自然数 t に対して $(\boldsymbol{v}^1(t), \boldsymbol{u}^1(t), w(t), \boldsymbol{v}^2(t), \boldsymbol{u}^2(t))$ を

$$\frac{1}{t}\left(\boldsymbol{v}^{1*}, \boldsymbol{u}^{1*}, w^{1*}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\right) + \left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, 0, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*}\right)$$

とすると，$(\boldsymbol{v}^1(t), \boldsymbol{u}^1(t), w(t), \boldsymbol{v}^2(t), \boldsymbol{u}^2(t))$ が問題 (12) の実行可能解であること，さらに，

$$\theta_k^1 \cdot \theta_k^2 =$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{w(t)z_k + \boldsymbol{u}^1(t)^\top \boldsymbol{y}_k^1}{\boldsymbol{v}^1(t)^\top \boldsymbol{x}_k^1} \cdot \frac{\boldsymbol{u}^2(t)^\top \boldsymbol{y}_k^2}{w(t)z_k + \boldsymbol{v}^2(t)^\top \boldsymbol{x}_k^2}$$

を補助定理 4 と同様な証明で示すことができる．

補助定理 7 の証明. $w^1 = w^{2*}$ を満たす問題 (13) の実行可能解が存在することを示す．$\alpha = \min_{j=1,\ldots,n} \frac{\sum_{i=1}^{m_1} x_{ij}^1}{w^{2*}z_j}$ とする．各成分が 1 である m_1 次元ベクトルを $\boldsymbol{e}$ とする．$\hat{\boldsymbol{v}}^1 = \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{e}$ とすると，$\hat{\boldsymbol{v}}^1 \geq \boldsymbol{0}$ である．さらに，

$$\frac{w^{2*}z_j}{\sum_{i=1}^{m_1} \hat{v}_i^1 x_{ij}^1} = \alpha \frac{w^{2*}z_j}{\sum_{i=1}^{m_1} x_{ij}^1} \leq 1 \ (\forall j)$$

である．$(\hat{\boldsymbol{v}}^1, \boldsymbol{0}, w^{2*})$ は問題 (13) の実行可能解である．

$w^{1*} = 0$，$(\boldsymbol{v}^{1*}, \boldsymbol{u}^{1*}, w^{1*})$ が問題 (13) の最適解，$(w^{2*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*})$ が問題 (2) の最適解なので，(14) の $(\boldsymbol{v}^1(t), \boldsymbol{u}^1(t), w(t), \boldsymbol{v}^2(t), \boldsymbol{u}^2(t))$ は任意の j に対して

$$\frac{w(t)z_j + \boldsymbol{u}^1(t)^\top \boldsymbol{y}_j^1}{\boldsymbol{v}^1(t)^\top \boldsymbol{x}_j^1} = \frac{\boldsymbol{u}^{1*\top}\boldsymbol{y}_j^1 + \frac{1}{t}\left(w^{2*}z_j + \hat{\boldsymbol{u}}^{1\top}\boldsymbol{y}_j^1\right)}{\boldsymbol{v}^{1*\top}\boldsymbol{x}_j^1 + \frac{1}{t}\hat{\boldsymbol{v}}^{1\top}\boldsymbol{x}_j^1}$$
$$\leq 1$$

と

$$\frac{\boldsymbol{u}^2(t)^\top \boldsymbol{y}_j^2}{w(t)z_j + \boldsymbol{v}^2(t)^\top \boldsymbol{x}_j^2} = \frac{\frac{1}{t}\boldsymbol{u}^{2*\top}\boldsymbol{y}_j^2}{\frac{1}{t}\left(w^{2*}z_j + \boldsymbol{v}^{2*\top}\boldsymbol{x}_j^2\right)} \leq 1$$

を満たす．さらに，任意の自然数 t に対して $(\boldsymbol{v}^1(t), \boldsymbol{u}^1(t), w(t), \boldsymbol{v}^2(t), \boldsymbol{u}^2(t)) \geq \boldsymbol{0}$ が成り立つので，(14) は問題 (12) の実行可能解である．

任意の自然数 t に対する実行可能解 (14) による点列は以下の二つの極限値をもつ．

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \frac{w(t)z_k + \boldsymbol{u}^1(t)^\top \boldsymbol{y}_k^1}{\boldsymbol{v}^1(t)^\top \boldsymbol{x}_k^1} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{u}^{1*\top}\boldsymbol{y}_k^1 + \frac{1}{t}\left(w^{2*}z_k + \hat{\boldsymbol{u}}^{1\top}\boldsymbol{y}_k^1\right)}{\boldsymbol{v}^{1*\top}\boldsymbol{x}_j^1 + \frac{1}{t}\hat{\boldsymbol{v}}^{1\top}\boldsymbol{x}_j^1} \\
&= \frac{\boldsymbol{u}^{1*\top}\boldsymbol{y}_k^1}{w^{2*}z_k + \hat{\boldsymbol{u}}^{1\top}\boldsymbol{y}_k^1} = \theta_k^1, \\
&\lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{u}^2(t)^\top \boldsymbol{y}_k^2}{w(t)z_j + \boldsymbol{v}^2(t)^\top \boldsymbol{x}_k^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t}\boldsymbol{u}^{2*\top}\boldsymbol{y}_k^2}{\frac{1}{t}\left(w^{2*}z_k + \boldsymbol{v}^{2*\top}\boldsymbol{x}_k^2\right)} \\
&= \theta_k^2.
\end{aligned}$$

したがって，(15) は成り立つ．

補助定理 8 の証明． 問題 (13) の最適解 $(\boldsymbol{v}^{1*}, \boldsymbol{u}^{1*}, w^{1*})$ と問題 (2) の最適解 $(w^{2*}, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*},)$ に対して $w^{1*} = w^{2*} = 0$ が成り立つので，$(\boldsymbol{v}^{1*}, \boldsymbol{u}^{1*}, 0, \boldsymbol{v}^{2*}, \boldsymbol{u}^{2*})$ は問題 (12) の最適解であり，$\theta_k^1 \cdot \theta_k^2$ がその最適値である．

定理 3 の証明． 定理 3 は帰納法で証明する．任意の $h \in \{1, \ldots, L\}$ に対して問題 (27) を $Q(h)$ とする．

$$\begin{aligned}
\sup \quad & \prod_{l=1}^{h} \frac{w^l z_k^l + \sum_{r=1}^{s} u_r^l y_{rk}^l}{w^{l-1} z_k^{l-1} + \sum_{i=1}^{m} v_i^l x_{ik}^l} \\
\text{s.t.} \quad & \frac{w^l z_j^l + \sum_{r=1}^{s} u_r^l y_{rj}^l}{w^{l-1} z_j^{l-1} + \sum_{i=1}^{m} v_i^l x_{ij}^l} \leq 1 \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, n \\ l = 1, \ldots, h \end{pmatrix} \\
& w^l \geq 0 \ (l = 0, \ldots, h) \\
& v_i^l \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m, l = 1, \ldots, h) \\
& u_r^l \geq 0 \ (r = 1, \ldots, s, l = 1, \ldots, h) \qquad (27)
\end{aligned}$$

問題 (27) の上限を $\phi_k(h)$ とする．h 期ターム効率値 θ_k^h は問題 (17) の最適値なので，$\phi_k(h)$ の上界を以下のように評価できる．

補助定理 9. 自然数 $h \leq L$ ならば $\phi_k(h) \leq \prod_{l=1}^{h} \theta_k^l$.

帰納法の仮定として，「h 期の問題 (27) に対して実行可能な点列 $\{\boldsymbol{p}(t) | t = 1, 2, \ldots\}$ が存在し，その点列の問題 (27) の目的関数値は問題 (27) の上限 $\phi_k(h)$ に収束する．ここで，$\boldsymbol{q}(t)$ を $(w^0(t), \boldsymbol{v}^1(t), \boldsymbol{u}^1(t), \ldots, w^{h-1}(t), \boldsymbol{v}^h(t), \boldsymbol{u}^h(t))$ とし，$\boldsymbol{p}(t)$ を $(\boldsymbol{q}(t), w^h(t))$ とする．さらに，$\phi_k(h) = \prod_{l=1}^{h} \theta_k^l$ が成り立つ」を仮定する．この仮定では，数列 $\left\{w^h(t)\,|t = 1, 2, \ldots\right\}$ も収束し，その収束先を $\bar{w}^h = \lim_{t\to\infty} w^h(t)$ とする．

$h = 1$ の場合を考える．問題 $Q(1)$ は最大値 ϕ_k をもち，問題 (13) と等価である．したがって，その最大値では $\phi_k = \theta_k^1$ が成り立つ．問題 $Q(1)$ の最適解を $(w^0, \boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{u}^1, w^1)$ とし，任意の自然数 t に対して $\boldsymbol{p}(t) = (w^0, \boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{u}^1, w^1)$ とする．このとき，この点列は問題 $Q(1)$ の実行可能領域内に常に存在し，その目的関数値は最大値 $\phi_k = \theta_k^1$ である．

$h \geq 2$ で，帰納法の仮定が成り立つとする．つまり，ある点列 $\{\boldsymbol{p}(t) | t = 1, 2, \ldots\}$ が存在し，各点は問題 $Q(h)$ で実行可能であり，

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{l=1}^{h} \frac{w^l(t) z_k^l + \sum_{r=1}^{s} u_r^l(t) y_{rk}^l}{w^{l-1}(t) z_k^{l-1} + \sum_{i=1}^{m} v_i^l(t) x_{ik}^l} = \phi_k(h) \quad (28)$$

が成り立つと仮定する．さらに，(29) を仮定する．

$$\phi_k(h) = \prod_{l=1}^{h} \theta_k^l \quad (29)$$

$h+1$ 期の場合を考える．このとき，問題 (17) の最適解を $(\underline{w}^h, \boldsymbol{v}^{h+1}, \boldsymbol{u}^{h+1}, w^{h+1})$ とし，最大値を θ_k^{h+1} とする．$\boldsymbol{p}(t)$ の最終要素 $w^h(t)$ の収束先 $\bar{w}^h$ と $\underline{w}^h$ とのペアは「$\bar{w}^h + \underline{w}^h = 0$」，「$\bar{w}^h \cdot \underline{w}^h > 0$」，「$\bar{w}^h > $ かつ $\underline{w}^h = 0$」，「$\bar{w}^h = 0$ かつ $\underline{w}^h > 0$」に分類できる．

$\bar{w}^h + \underline{w}_h = 0$ の場合：任意の自然数 t に対して

$$(\boldsymbol{q}(t), 0, \boldsymbol{v}^{h+1}, \boldsymbol{u}^{h+1}, w^{h+1}) \quad (30)$$

は問題 $Q(h+1)$ の実行可能解である．さらに，その目的関数値は常に ϕ_k^{h+1} 以下であり，その極限値は

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \prod_{l=1}^{h} \frac{w^l(t) z_k^l + \sum_{r=1}^{s} u_r^l(t) y_{rk}^l}{w^{l-1}(t) z_k^{l-1} + \sum_{i=1}^{m} v_i^l(t) x_{ik}^l} \\
&\qquad \times \frac{w^{h+1} z_k^{h+1} + \sum_{r=1}^{s} u_r^{h+1} y_{rk}^{h+1}}{0 + \sum_{i=1}^{m} v_i^{h+1} x_{ik}^{h+1}} \\
&= \phi_k(h) \times \theta_k^{h+1} = \prod_{l=1}^{h+1} \theta_k^l
\end{aligned}$$

である．補助定理 9 から，$\phi_k^{h+1} = \prod_{l=1}^{h+1} \theta_k^l$ である．(30) を新しい $\boldsymbol{p}(t)$ とすることで，この場合の $h+1$ 期でも帰納法の仮定は成り立つ．

$\bar{w}^h \cdot \underline{w}^h > 0$ の場合：任意の自然数 t に対して

$$\left(\boldsymbol{q}(t), w^h(t), \frac{w^h(t)}{\underline{w}^h}\boldsymbol{v}^{h+1}, \frac{w^h(t)}{\underline{w}^h}\boldsymbol{u}^{h+1}, \frac{w^h(t)}{\underline{w}^h}w^{h+1}\right) \times \underline{w}^h \tag{31}$$

は問題 $Q(h+1)$ の実行可能解である．さらに，その目的関数値は常に ϕ_k^{h+1} 以下であり，その極限値は

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\prod_{l=1}^{h}\frac{\underline{w}^h\left(w^l(t)z_k^l+\sum_{r=1}^s u_r^l(t)y_{rk}^l\right)}{\underline{w}^h\left(w^{l-1}(t)z_k^{l-1}+\sum_{i=1}^m v_i^l(t)x_{ik}^l\right)} \\
&\quad\times\frac{w^h(t)\left(w^{h+1}z_k^{h+1}+\sum_{r=1}^s u_r^{h+1}y_{rk}^{h+1}\right)}{w^h(t)\left(\underline{w}^h+z_k^h+\sum_{i=1}^m v_i^{h+1}x_{ik}^{h+1}\right)} \\
&=\phi_k(h)\times\frac{w^{h+1}z_k^{h+1}+\sum_{r=1}^s u_r^{h+1}y_{rk}^{h+1}}{\underline{w}^h z_k^h+\sum_{i=1}^m v_i^{h+1}x_{ik}^{h+1}} \\
&=\phi_k(h)\cdot\theta_k^{h+1}=\prod_{l=1}^{h+1}\theta_k^l
\end{aligned}$$

である．補助定理 9 から，$\phi_k^{h+1}=\prod_{l=1}^{h+1}\theta_k^l$ である．(31) を新しい $\boldsymbol{p}(t)$ とすることで，この場合の $h+1$ 期でも帰納法の仮定は成り立つ．

$\bar{w}^h=0$ かつ $\underline{w}^h>0$ の場合：$w^h=\underline{w}^h$ を満たす問題 $Q(h)$ の実行可能解 $(\hat{\boldsymbol{q}}, \underline{w}^h)$ は存在する．ここで，$\hat{\boldsymbol{q}}=\left(\hat{w}^0, \hat{\boldsymbol{v}}^1, \hat{\boldsymbol{u}}^1, \ldots, \hat{w}^{h-1}, \hat{\boldsymbol{v}}^h, \hat{\boldsymbol{u}}^h\right)$ である．$h+1$ 期に対する問題 (17) の最適解は $(\underline{w}^h, \boldsymbol{v}^{h+1}, \boldsymbol{u}^{h+1}, w^{h+1})$ であるから，任意の自然数 t に対して

$$\left(\boldsymbol{q}(t)+\frac{1}{t}\hat{\boldsymbol{q}}, \frac{1}{t}\underline{w}^h, \frac{1}{t}\boldsymbol{v}^{h+1}, \frac{1}{t}\boldsymbol{u}^{h+1}, \frac{1}{t}w^{h+1}\right) \tag{32}$$

は問題 $Q(h+1)$ の実行可能解である．さらに，その目的関数値は常に ϕ_k^{h+1} 以下であり，その極限値は

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\prod_{l=1}^{h}\frac{\left(w^l(t)+\frac{\hat{w}^l}{t}\right)z_k^l+\boldsymbol{u}^l(t)^\top\boldsymbol{y}_k^l+\frac{1}{t}\hat{\boldsymbol{u}}^{l\top}\boldsymbol{y}_k^l}{\left(w^{l-1}(t)+\frac{\hat{w}^{l-1}}{t}\right)z_k^{l-1}+\boldsymbol{v}^l(t)^\top\boldsymbol{x}_k^l+\frac{1}{t}\hat{\boldsymbol{v}}^{l\top}\boldsymbol{x}_k^l} \\
&\quad\times\frac{\frac{1}{t}\left(w^{h+1}z_k^{h+1}+\boldsymbol{u}^{h+1\top}\boldsymbol{y}_k^{h+1}\right)}{\frac{1}{t}\left(\underline{w}^h z_k^h+\boldsymbol{v}^{h+1\top}\boldsymbol{x}_k^{h+1}\right)} \\
&=\phi_k(h)\times\frac{w^{h+1}z_k^{h+1}+\boldsymbol{u}^{h+1\top}\boldsymbol{y}_k^{h+1}}{\underline{w}^h z_k^h+\boldsymbol{v}^{h+1\top}\boldsymbol{x}_k^{h+1}} \\
&=\phi_k(h)\cdot\theta_k^{h+1}=\prod_{l=1}^{h+1}\theta_k^l
\end{aligned}$$

である．補助定理 9 から，$\phi_k^{h+1}=\prod_{l=1}^{h+1}\theta_k^l$ である．(32) を新しい $\boldsymbol{p}(t)$ とすることで，この場合の $h+1$ 期でも帰納法の仮定は成り立つ．

$\bar{w}^h>0$ かつ $\underline{w}^h=0$ の場合：任意の自然数 t に対して $(w^h(t), \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0)$ は $h+1$ 期に対する問題 (17) の実行可能解である．$h+1$ 期に対する問題 (17) の最適解は $(\underline{w}^h, \boldsymbol{v}^{h+1}, \boldsymbol{u}^{h+1}, w^{h+1})$ であるから，

$$\left(\frac{1}{t}\boldsymbol{q}(t), \frac{1}{t}w^h(t), \boldsymbol{v}^{h+1}, \boldsymbol{u}^{h+1}, w^{h+1}\right) \tag{33}$$

は問題 $Q(h+1)$ の実行可能解である．さらに，その目的関数値は常に ϕ_k^{h+1} 以下であり，その極限値は

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\prod_{l=1}^{h}\frac{\frac{1}{t}\left(w^l(t)z_k^l+\sum_{r=1}^s u_r^l(t)y_{rk}^l\right)}{\frac{1}{t}\left(w^{l-1}(t)z_k^{l-1}+\sum_{i=1}^m v_i^l(t)x_{ik}^l\right)} \\
&\quad\times\frac{w^{h+1}z_k^{h+1}+\sum_{r=1}^s u_r^{h+1}y_{rk}^{h+1}}{\frac{1}{t}w^h(t)z_k^h+\sum_{i=1}^m v_i^{h+1}x_{ik}^{h+1}} \\
&=\phi_k(h)\times\frac{w^{h+1}z_k^{h+1}+\sum_{r=1}^s u_r^{h+1}y_{rk}^{h+1}}{\sum_{i=1}^m v_i^{h+1}x_{ik}^{h+1}} \\
&=\phi_k(h)\cdot\theta_k^{h+1}=\prod_{l=1}^{h+1}\theta_k^l
\end{aligned}$$

である．補助定理 9 から，$\phi_k^{h+1}=\prod_{l=1}^{h+1}\theta_k^l$ である．(33) を新しい $\boldsymbol{p}(t)$ とすることで，この場合の $h+1$ 期でも帰納法の仮定は成り立つ．

