

複雑系ネットワークの可視化

—社会ネットワークを中心に—

脇田 建

社会ネットワークは人間の活動とその関わりを表すものである。本稿では、社会ネットワークの可視化の一般的な課題について概観したのち、そのうちの巨大な毛玉問題への解決手段として、社会ネットワークの高次元可視化手法とその対話手法について紹介する。高次元可視化技術が提供する簡単な対話操作を通して、いったんは毛玉のように見えるネットワークも、見る間にそれを構成するクラスターへと分離される。

キーワード：社会ネットワーク、対話的可視化、高次元可視化、視覚的分析、コミュニティ構造分析

1. はじめに

社会ネットワークは人間の活動とその関わりを抽象化したものである。社会ネットワークは長年、社会科学の研究対象となっている。近年のITシステムが社会に密接に関わるようになるにつれ、従来、膨大な手作業を経て得られた人間活動の様子をビッグデータとして比較的容易に入手できるようになりつつある。このように入手したネットワークデータやネットワークの変化を特徴づける解析技術は過去目覚ましい発展を遂げた。社会ネットワークの可視化技術は、未知のネットワーク全体を一望し、その概略を捉えるための巨視的な視点を与える。さらに対話的可視化技術を利用できる場合は、巨視的な視点から見えてきた部分構造を徐々に詳しく調査し、段階的に調査を精緻化する手段 [1] を提供する。

社会ネットワークの可視化にあたっては主にグラフ可視化のアルゴリズムが利用されることが多い。社会ネットワークのグラフ表現では人やモノを頂点として、そこにおける「関わり」を辺とするグラフを用いた数学的な表現に変換することで、社会ネットワークの機械的な処理が可能となる。このようなグラフ表現を社会グラフ (Social Graph) と呼ぶ。社会ネットワークの可視化においては、社会グラフを構成する頂点と辺を画面上の点と線分として目に見える形で表現する。社会グラフを二次元平面、あるいは三次元空間に配置することでわかりやすい絵を見せることは重要な課題の一つである。見栄えについてのわかりやすさの基準については、線分が交差しないでほしい、交差する場

合にはできれば直交してほしい、なるべく点は画面全体を一様に覆ってほしい (1カ所に窮屈に固まらないでほしい)、関係性の強い点は1カ所に集まってほしいが、そこに無関係な点が混ざらないでほしい、二つの点を選んだときに、それらを結ぶ最短経路をすぐに見つけたい、重要な点や関わりを強調表示してほしいなど要望が尽きることはない。さらに社会ネットワークの構造に目を向けると、複数の関係性から成り立つ多重ネットワーク [2]、時間とともに変化するテンポラルネットワーク [3]、それらの組み合わせ、応用や特殊な構造に特化した表示方法など、社会ネットワークの可視化についての研究項目は思いの外、広い。

本稿では、社会グラフのうち、静的 (時間的に変化しない) な無向グラフで、辺や頂点に重みが与えられていないものの可視化について、その困難とわれわれが提案する対話的高次元可視化技術の狙いを中心に論じる。次節では社会ネットワーク可視化における諸問題を取り上げ、特に質的な問題として毛玉問題について掘り下げる。3節では高次元ネットワーク配置法に基づく対話的可視化技術について、4節では対話的高次元可視化技術を応用した社会ネットワークの分析システムについて説明し、5節で本稿をまとめる。

2. 毛玉の由来

ある程度の規模、たとえば頂点数が数千を超えるような社会ネットワークを可視化するといくつかの問題が発生する。グラフ描画アルゴリズムの性能上の問題、表示対象のネットワークに含まれるデータ項目数が表示画面の画素数を超える問題、そして毛玉問題などである。性能上の問題については、銀河の衝突のシミュレーションに用いられる方法を利用した超並列計算法 [4] やクラスターリング [5] を適用してグラフ描画問題を

わきた けん
東京工業大学情報理工学院
wakita@is.titech.ac.jp

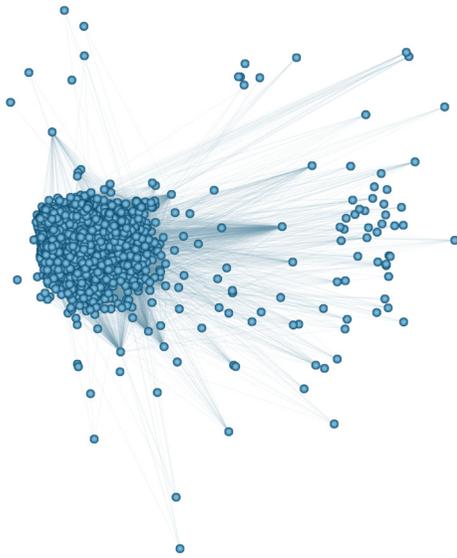


図1 毛玉の例

計算費用の小さな部分問題に分解する手法 [6, 7] などが提案されている [8]. また, 限られた画素を用いて膨大なデータ項目を表現するために, 近接した頂点群をひとまとめに描画したり, 階層化クラスタリングの結果を表示する手法が提案されている.

本節で問題とする巨大な毛玉問題 (giant hairball problem) は, 可視化された社会グラフがしばしば毛玉に見えることである (図 1). もしも, どの社会グラフも毛玉として表示されたとしたら, 社会ネットワークの特徴を視覚的に把握する可視化の目的を達成することができない.

では, どうして社会グラフの可視化は毛玉のように表示されてしまうのだろう. 毛玉の由来については諸説がある. 一つにはデータの質の問題がある. ソーシャルネットワークシステムの知人関係について考えてみても, 知人関係にはさまざまなものがある. 日常的に出会っている緊密な友人関係や職場の人間関係, 仕事上の取引関係, 同好の士, 大切な繋りではあるがやり取りの少ない幼馴染, どこで会ったのか, なぜ繋がっているのか覚えてもいない人物などと種類も緊密さも異なる関係性を重層したものがそこの「ネットワーク」である. どんな分析をするにも, まずはこのネットワークの重層を解くところから始めるべきだという考え方もある [7].

このような立場を認めつつも, 社会ネットワーク可視化で用いられるグラフ描画アルゴリズムの性質も毛玉を生む一因と思われる. グラフ描画を前節で述べた「わかりやすさ」についての最適化問題と考えることは

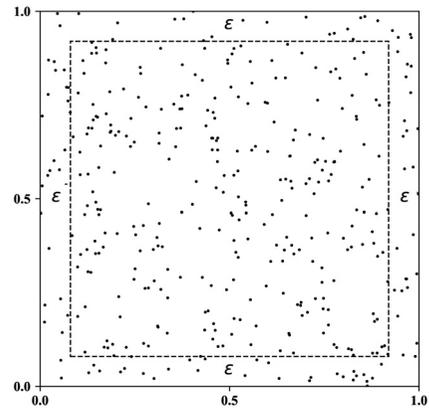


図2 正方形 (二次元超立方体) 内への豆の一樣散布の様子

しばしばあるが, そこにおいて最適化の目的として, グラフ構造の上での頂点間の遠さを, 描画したときの点間の距離で近似することがある. たとえば, グラフの上で隣接した 2 頂点は, 描画したときに隣接してほしいし, グラフ上で遠く離れた 2 頂点は, 描画したときも離れて配置されてほしい. グラフ構造上の遠さは頂点对の最短経路長 (隣接頂点は 1, 隣りの隣は 2, ...) というグラフ論的距離 ($d(i, j)$) として, そしてグラフ描画されたときの距離は描画された位置 p_i, p_j に関するユークリッド距離 ($\|p_i - p_j\|$) と考えたうえで, 後者が前者を近似するように各頂点 i に対して, それを表す点の位置 p_i を適切に定めたものが「見やすいグラフ描画」とみなせる:

$$\sum_{i < j} d(i, j) \approx \sum_{i < j} \|p_i - p_j\|.$$

一方で社会ネットワーク解析の初期の研究で多くの社会ネットワークがスモールワールド性を有することが知られている [9]. 米国における親しい友人関係から構成されるネットワークの直径を 6 とする Milgram 仮説が代表例である. 仮に, ある社会ネットワークを可視化して, そのなかにクラスタ構造を見つけ出そうとしたとしよう. クラスタ構造を期待するということは, そこにスモールワールド性も期待していることになる. このことは, ネットワークの直径がその規模にくらべてかなり短いことを示唆している. もしも, このネットワークのグラフ論的距離を忠実にグラフ描画で再現することができたとしたら, このグラフ描画はグラフ論的距離相当の小さな円, すなわち毛玉として表示されるのも道理であろう.

この困った状況を解消するために, われわれは社会ネットワークの高次元可視化の研究を行っている. こ

ここで高次元可視化の利点について考察するために、2次元平面上の単位正方形領域に、一様に豆を撒くことを考えてみよう。このとき正方形領域の周辺域に位置する頂点の割合を考えると、それは正方形の縁から距離 ε 以内の面積 4ε 程度でしかない (図 2)。ほとんどの豆は正方形の周辺域にないこととなる。

今度は正方形ではなく n 次元空間の単位超立方体内に一様に豆を撒いたとしよう。豆の座標 (x_1, x_2, \dots, x_n) が超立方体の縁から ε 以内に位置する条件は $V_i (|x_i| > 1 - \varepsilon)$ となる。つまり、おおむね $2n\varepsilon$ の確率¹で超立方体の周辺域に位置することになる。この式が意味するのは高次元空間において超立方体内の点は大部分が周辺域に偏在するようになることである。

すでに述べたように、平面上でのグラフ描画アルゴリズムは、画面中央部に毛玉を作り出す圧力が高い。しかし、高次元空間内でグラフ描画を実施すればその圧を跳ね返せるかもしれない。次節では、高次元空間にグラフを配置し、それを可視化のために低次元に射影したのち、射影方向を変更する対話機能を通して高次元配置した社会グラフをさまざまな視点から眺める手法を紹介する。

3. 対話的高次元可視化法

本節では、まず多次元尺度構成法に基づいてネットワークの構造を高次元ユークリッド空間に埋め込んでネットワークの高次元配置を得る方法を説明する。ここで得られた高次元配置は直接、目にすることができない。これを2次元、3次元の低次元可視空間に射影することで、ディスプレイに2D、あるいは3Dグラフィック表示し、ネットワークを観察できるようになる。

3.1 TKS グラフ配置法

頂点数 n のグラフ $G = (V, E)$ を可視化する代表的な手法として、Torgerson 流の古典的多次元尺度構成法をグラフ配置問題に応用した Kruscal と Seery による手法 (TKS 法) [10] を紹介する。これはグラフの頂点間のグラフ論的距離 $(d(i, j))$ をそれらのユークリッド空間に写された位置間の距離 $(\|p_i - p_j\|)$ での実現を試みるものである。ここで、 $v_i, v_j \in V$ はグラフの頂点で、 $p_i, p_j \in R^{d_H}$ は d_H 次元ユークリッド空間内の点である。このような最適化は古典的多次元尺度構成法 [11–13] に基づいて、二乗距離行列 $\mathbf{D}^{(2)} = (d(i, j)^2)$ を固有値分解することで得られることが知られている。

$$\bar{\mathbf{D}}^{(2)} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^T = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^{1/2} \left(\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^{1/2} \right)^T \quad (1)$$

ここで $\bar{\mathbf{D}}^{(2)} = -\mathbf{H}^T \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{H} / 2$ は中心化行列 $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T / n$ を適用して、配置結果を原点に据えるための Householder 変換 [12], $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ は降順に並んだ固有値からなる対角行列、 \mathbf{E} は $\mathbf{\Lambda}$ の順に固有ベクトルを並べた行列である。式 (1) はグラフの頂点を $\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ に配置すれば、グラフ論距離の二乗 (左辺) とユークリッド距離の二乗 (右辺) が一致することを示している。すなわち、 i 番目の頂点を $\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ の第 i 行の座標に配置すればグラフ配置問題が解決できたことになる。

ただ、これはあくまでも数学的な結果であり、可視化のためにこのままでは不都合な点が二つある。 $\mathbf{\Lambda}$ に出現する負の固有値の扱いと、ディスプレイに高次元ユークリッド空間を表示できない点である。Kruscal と Seery は正の固有値 ($\mathbf{\Lambda}_+$) とそれに対応する固有ベクトル群 (\mathbf{E}_+) のみを扱い、さらに $\mathbf{\Lambda}_+^{1/2}$ の第 1, 2 列をそれぞれ X, Y 軸に対応させ、残りの列を無視する近似を施す 2 次元可視化手法を提案している。もちろん、 $\mathbf{\Lambda}_+^{1/2}$ の第 3 列を Z 軸に対応させれば 3 次元可視化もできる。

3.2 細部の高次元可視化法

前述の TKS 法はグラフの高次元配置のうち主要な二つの固有値に対応する固有ベクトルのみを活用した可視化法とみなせる。これに対して、細部は正の固有値に対応する固有ベクトルすべて (\mathbf{E}_+) を活用する高次元可視化手法を考案した [14]。この提案において、頂点群は $\mathbf{L}_H = \mathbf{E}_+ \mathbf{\Lambda}_+^{1/2} : n \times d_H$ に配置される。ここで $\mathbf{\Lambda}_+$ は固有値分解で得られる正の固有値を降順に並べた対角行列で、 \mathbf{E}_+ は同じ順序にしたがって固有ベクトルを並べて得られる行列、 d_H は正の固有値の個数であり、 i 番目の頂点の座標は $\mathbf{E}_+ \mathbf{\Lambda}_+^{1/2}$ の第 i 行で与えられる。

この d_H 次元空間に配置されたグラフを平面に可視化するためには、 d_H 次元空間から 2 次元平面への射影を考えればよい。この操作は高次元空間の規定ベクトル群を混合させたものを二つ用意することで得られる。これは線形固有ベクトルの線形結合にあたるため、射影行列 $\mathbf{P} : d_H \times 2$ で与えることができる： $\mathbf{L}_D = \mathbf{L}_H \mathbf{P}$ 。

3.3 対話的高次元可視化法

グラフ可視化に対して提供される対話機能の多くは、頂点や辺について検索結果を強調表示したり、検索に該当しないものを消去したり、グラフ表示全体の拡大縮小、特定の頂点の移動のような単純なものが多い。

¹ 正確には $1 - (1 - 2\varepsilon)^n$

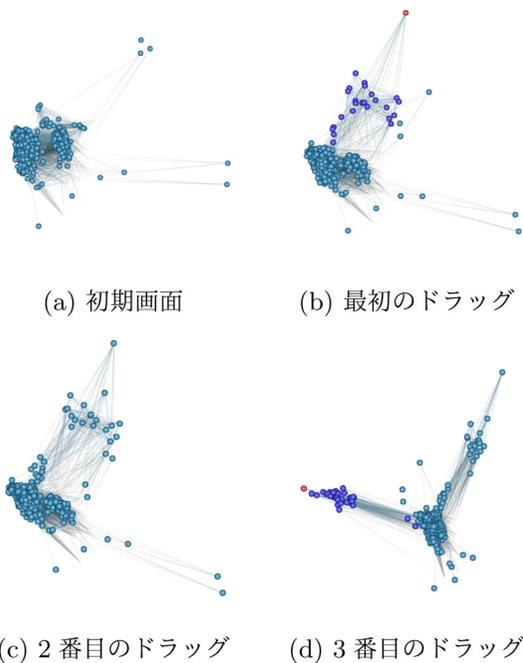


図3 頂点のドラッグが引き起こす高次元回転の効果

細部が提案した対話手法は頂点のドラッグ操作によって、グラフ表示全体が予想もしないように変形し、それによってクラスタ構造を明らかにする点で独特であるとともに、視覚的分析の面で有用でもある。図3は日本版 Wikipedia の数学に関する記事と題するページからリンクされた 3,608 ページのリンク関係を分析する例である。初期配置の毛玉(図3(a))から始めて、わずか3回のドラッグ操作で複数のクラスタを分離できた(図3(d))。

この対話操作は一見すると、グラフを変形させているように見えるが、実際には高次元配置は固定したまま、ドラッグ操作に応じて射影行列を変更することのみによってグラフ全体の射影を更新している。この理屈について説明する前に、身近な例を用いて直感的な説明を試みたい。いま、野原に1本の高木が立っており、それが自分の足元に影を落としているとしよう。現実には無理だが、木の影を掴んで少し左に動かすことを考えてみる。なんらかの方法で木を屈曲させれば、思ったように影を変形できるかもしれないが、その手は使わないことにする。辛抱強く待っていれば、太陽は右に位置を変え、期待したように影は左に動いていくだろう。自分の手の動きに従って木の影を動かそうとしたら、(現実には無理だが)太陽を動かして、手の位置に木が影を落とすように右に移動すればよい。太陽を動かした効果は木の影だけでなく地上のありとあ

らゆる物体が地面に投じる影の変化として認知できる。

本節で紹介する対話手法はまさにその考え方を実現している。木にあたる社会ネットワークの高次元配置は固定したまま変形させず、木の影にあたる画面上に表示された頂点をドラッグによって動かそうとしたときに、太陽にあたる射影行列を上手に調整して、高次元配置における頂点が投げかける影として、ドラッグ先の位置に頂点が表示される。さらに、ドラッグ対象となっていないほかのすべての頂点も、射影行列の更新とともに画面上を移動する。

この仕組みの理論的概要は以下のとおりである。画面上に表示された点 p_D をドラッグして q_D に移動したとしよう。 p_D も q_D も高次元座標 p_H を射影したものである。それぞれの影を作った射影行列を P, P' とすると $p_D = p_H P$ $q_D = p_H P'$ と表される²。この対話機能は、既知のドラッグ前後の座標 p_D, q_D 、それらの高次元座標 p_H 、そして p_D への射影を与えている射影行列 P より、新たな射影行列 P' を探す問題といえる。

このような性質を満たすような射影 P' は実は無数に存在する。たとえば、高木の影の例において、太陽が自分に向かって真っ直ぐに移動しても木の影は動くことはない。そこで、解が高々一意に定まるように射影行列を選択したい。しかしながら、可視空間内の単なる回転変換では面白くないし、それでは一般に p_D を q_D に写すこともできない。一方で本格的な超高次元回転のなかから奔放に射影を選べば超高次元の感覚を有さないヒトには追従困難な画面変化を産む可能性が高い。そこで、可視空間よりも1次元だけ高い空間における回転のなかから該当するような変換を求めることとした。以下は、細部が提案した2次元可視化のための対話的高次元可視化手法 [15] を、高見らが一般の次元に拡張した研究 [16] の表記を行列形式を用いてさらに簡素化したものである。

- ・射影行列の P, P' を構成する縦ベクトルは正規直交である： $P^T P = P'^T P' = I$ 。
- ・高次元回転の軸 $R: d_H \times 2$ を構成する縦ベクトルは正規直交である： $R^T R = I$ 。
- ・高次元回転によって、射影は歪まない。したがって、射影を構成する縦ベクトルと回転軸のなす角は変化しない： $R^T P = R'^T P'$ 。

これらの制約について非線形最適化問題として形式化 [16] したうえで L-BFGS 法 [17] によって解いている。この制約問題の面白い点は、制約の個数も変数の

² 添字の H と D はそれぞれ高次元 (High dimensional) とディスプレイ (Display) からとった。

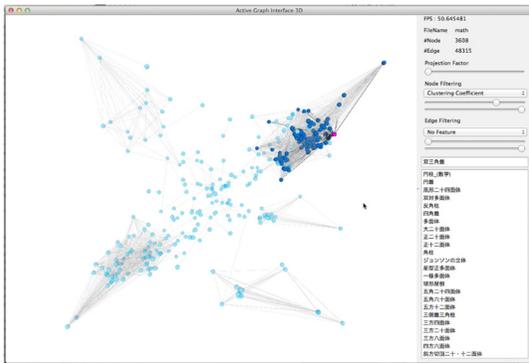


図 4 Social Viewpoint Finder の概観

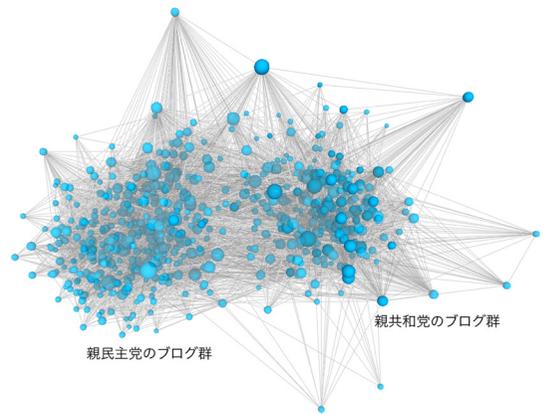
個数も可視化空間の次元に依存し、グラフの規模には依存しない点である。すなわち、社会グラフが大きくなっても、この制約解消の求解時間への影響はない。

4. Social Viewpoint Finder

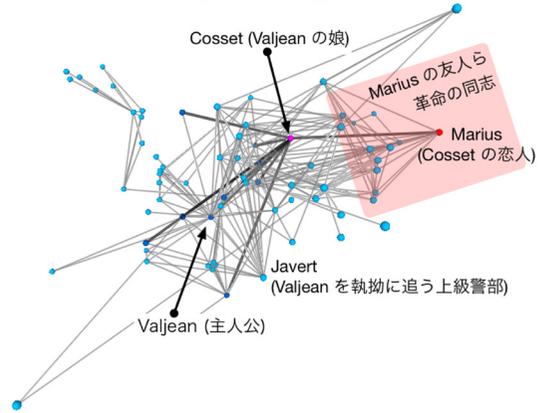
われわれは前節で述べた対話的高次元可視化法を応用して、図 4 に示すような社会ネットワークの視覚的分析システム Social Viewpoint Finder (SVF) を開発している。この画面の大きな領域にネットワークが可視化されている。一つだけ赤く塗られた頂点はマウスで選択されたものである。この点のラベルは右中央の枠内に「双三角錐」と表示されている。群青で塗られた点は、マウスで選択された点に隣接する点であり、それらのラベルが右下のリストに円錐 (数学)、円錐、扇形二十四面体、双対多面体、…と表示されている。右上のパネルは、パラメタ調整のための設定ツールを提供している。これは図 3(a) の初期画面から始めて約 10 回ほどのドラッグを経た様子である³。この画面では分析対象のネットワークから 5 個のクラスタを見つけることに成功している。隣接頂点のラベルより、この図で選択されている右上のクラスタが数学図形の集団であることは見てとれる。そのすぐ下の小さな集団はゲーム理論、右下の集団は Conway のライフゲーム、左下と左上はそれぞれ数学者と統計分布の集団であることがわかった。

4.1 Social Viewpoint Finder の高速化

この例のように SVF はクラスタを発見する能力に優れている。これまでに、Obama 氏と Bush 氏が大統領の座を争った選挙の時点での政治ブログの記事の参照関係 [18, 19] (図 5(a))、生体内の代謝ネットワーク [20, 21]、Twitter や Facebook をクロールしたいく



(a) US Blogs



(b) Les Miserable

図 5 SVF の使用例

つかのエゴネットワーク (あるノードとそれに隣接するノードのみで形成されるネットワーク) [22]、ウェブページのリンク関係 [23, 24]、インターネットを構成する主要なルータのネットワーク [25, 26]、PGP 暗号を介して繋がるネットユーザの関係 [27]、arXiv を利用した共著者ネットワーク [25, 28–30]、不正会計疑惑から倒産した Enron 社内のメール授受ネットワーク [23, 31] などの分析を通して、SVF の有効性を確認してきた。

SVF で採用した対話的高次元可視化手法は、細部によって提案された二次元平面上での対話的可視化技術 [14] を一般化し、3 次元以上の表示空間にも対応させた方法 [15, 16] を利用している。

ここから、SVF の実装技術について説明する。高見が MATLAB を用いて最初に実装したプロトタイプは 100 頂点程度が性能の限界であった。5 次元立方体が落とした影を対話的に操作した構造の観察、Karate [32, 33] や Les Miserable [34, 35] などの古典的な小規模な社会ネットワークの分析 (図 5(b)) で

³ 実際の視覚的分析のビデオは <https://vimeo.com/98197432> を参照されたい (2017 年 11 月最終閲覧)。

一定の有効性は確認できたものの、この程度のネットワークであれば、既存の静的グラフ可視化技術を用いてもきれいに表示できるため、SVF を利用する価値は限定的であった。このうち Java3D を用いて再実装したものをを用いることで、扱えるネットワークの規模は数百頂点程度まで増加できた。このシステムによって、スモールワールド性を有するネットワークに対する SVF の有効性が確かなものとなった。

Java3D を用いた実装の性能が 1,000 頂点程度までに留まったのは、主に Java3D を用いた描画がハードウェアが本来有する性能を十分に活かしきれなかったことに由来する。このため、実装基盤を Java から C++ に移し、wxWidgets という GUI ツールキットを用い、高性能グラフィックスが利用できる OpenGL を用いて再実装した。この結果、本稿で紹介した面白いデータセットの扱いも可能となったものの、arXiv での共著関係 (17,903 頂点, 196,972 辺)、インターネットルータの接続関係 (22,463 頂点, 48,436 辺) や Enron 社内メール交換ネットワーク (33,696 頂点, 180,811 辺) のように規模の大きなネットワークの可視化では、ドラッグ操作のときの画面更新頻度が 10fps 未満⁴ となってしまった。

現在、実装している SVF の最新版では、実装基盤をさらに Python に移し、C++ 版で採用した古典的 OpenGL に変えて、グラフィックボードを直接プログラムする現代的 OpenGL を採用し、さらに射影計算に計算シェーダを用いた汎用 GPU 計算を実施することで大幅な性能向上を図っている。初期評価においてインターネットルータ接続網については 58 fps、Enron 社内メール交換ネットワークについては 50 fps という性能値を測定しており、さらに性能の改善を続け、頂点数 10 万程度までは実現できる見通しである。

対話的計算性能、描画性能、メモリ消費量の面では SVF を用いて 100 万頂点程度のネットワークの対話的可視化も可能とも思われる。しかしながら、この規模のネットワークの場合、高次元配置を求めるための計算性能のほうが問題となる。高次元配置の計算にあたっては、100 万次元の大きさの密行列の固有値分解が必要となる。しかし、この規模の計算は世界最高性能のスーパーコンピュータのピーク性能でも 1 時間ほどを要する⁵。今後はグラフクラスタリング技術などとの組合せを検討したい。

⁴ Frames per second : 1 秒間に画面を何回更新できるかという指数。30 fps 以上あれば良好な対話環境を提供できる。

⁵ 2013 年に理化学研究所が EigenExa 密行列固有値計算ライブラリを用いることで、当時 1 週間に要するとされた固有値分解を 1 時間で計算した。

5. おわりに

本稿では、高次元ネットワーク配置法に基づく対話的可視化法、およびその仕組みを応用した社会ネットワーク分析システム Social Viewpoint Finder (SVF) について説明した。これまでの社会ネットワークシステムの分析を通して、SVF が中規模の社会ネットワークの分析に有効なことを確認した。現在、SVF の性能を向上し、さらに規模の大きな社会ネットワークの分析を目指している。

本稿では、社会ネットワークを重みなし無向グラフとして定式化して可視化する方法について述べた。実際の社会ネットワークにおいては、関係の強さ、方向性のある関係もある。また、1 節でも述べたような、より複雑なネットワーク、あるいはネットワークの特徴に応じた可視化の要請に答えることが求められる。

視覚的分析システムは仮説構築、仮説検証、ストーリーテリング、などさまざまな場面での応用が考えられるが、それぞれの応用に応じた機能の追加も必要となる。SVF に特化した課題としては、分析中に見つけた頂点群を覆ってラベルづけする機能、頂点群の特徴を抽象的に要約する機能、高次元回転を続けるうちに迷子になったユーザに分析経路を伝達する機能など、可視化の研究としても面白い課題がいくつも残っている。

謝辞 対話的高次元可視化技術ついでともに研究している細部博史氏、高見将則氏、高野陸氏に感謝する。高見氏と高野氏は Social Viewpoint Finder の開発に携わっていただいた。

参考文献

- [1] B. Shneiderman, “The eyes have it: A task by data type taxonomy for information visualizations,” In *Proceedings of the 1996 IEEE Symposium on Visual Languages*, pp. 336–343, 1996.
- [2] M. Kivelä, A. Arenas, M. Barthelemy, J. P. Gleeson, Y. Moreno and M. A. Porter, “Multilayer networks,” ArXiv: 1309.7233, 2013.
- [3] F. Beck, M. Burch, S. Diehl and D. Weiskopf, “The state of the art in visualizing dynamic graphs,” *EuroVis: STARS*, R. Borgo, R. Maciejewski and I. Viola (eds.), The Eurographics Association, 2014.
- [4] E. Yunis, R. Yokota and A. Ahmadi, “Scalable force directed graph layout algorithms using fast multipole methods,” In *Proceedings of 2012 11th International Symposium on Parallel and Distributed Computing*, pp. 180–187, 2012.
- [5] V. D. Blondel, J.-L. Guillaume, R. Lambiotte and E. Lefebvre, “Fast unfolding of community hierarchies in large networks,” *Journal of Statistical Mechanics*:

- Theory and Experiment*, P10008, 2008.
- [6] J. Abello, F. van Ham and N. Krishnan, “Ask-graphview: A large scale graph visualization system,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **12**, pp. 669–676, 2006.
- [7] B. Nick, C. Lee, P. Cunningham and U. Brandes, “Simmelian backbones: Amplifying hidden homophily in facebook networks,” *Advances in Social Networks Analysis and Mining (ASONAM)*, pp. 525–532, 2013.
- [8] K.-L. Ma and C. W. Muelder, “Large-scale graph visualization and analytics,” *Computer*, **46**(7), pp. 39–46, 2013.
- [9] D. J. Watts, *Six Degrees: The Science of a Connected Age*, W. W. Norton & Co., 2004.
- [10] J. B. Kruskal and J. B. Seery, “Designing network diagrams,” In *Proceedings of the First General Conference on Social Graphics*, pp. 22–50, 1980.
- [11] I. Borg, P. J. F. Groenen and P. Mair, *Applied Multidimensional Scaling*, Springer, 2013.
- [12] G. Young and A. S. Householder, “Discussion of a set of points in terms of their mutual distances,” *Psychometrika*, **3**, pp. 19–22, 1938.
- [13] W. S. Torgerson, “Multidimensional scaling of similarity,” *Psychometrika*, **30**, pp. 379–393, 1965.
- [14] H. Hosobe, “A high-dimensional approach to interactive graph visualization,” In *SAC '04: Proceedings of the 2004 ACM Symposium on Applied Computing*, pp. 1253–1257, 2004.
- [15] M. Takami, H. Hosobe and K. Wakita, “A projection-based method for interactive visual exploration of complex graphs in a three-dimensional space,” Research Reports on Mathematical and Computing Sciences C-278, Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, 2012.
- [16] K. Wakita, M. Takami and H. Hosobe, “Interactive high-dimensional visualization of social graphs,” In *Proceedings 2015 IEEE Pacific Visualization Symposium (PacificVis)*, pp. 303–310, 2015.
- [17] D. C. Liu and J. Nocedal, “On the limited memory BFGS method for large scale optimization,” *Mathematical Programming*, **45**, pp. 503–528, 1989.
- [18] A. Adamic and N. Glance, “The political blogosphere and the 2004 US Election,” In *Proceedings of the WWW-2005 Workshop on the Weblogging Ecosystem*, 2005.
- [19] dataset, <http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/polblogs.zip>
- [20] S. Sun, L. Ling, N. Zhang, G. Li and R. Chen, “Topological structure analysis of the protein-protein interaction network in budding yeast,” *Nucleic Acids Research*, **31**, pp. 2443–2450, 2003.
- [21] dataset, <http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/data/bio/Yeast/Yeast.htm>
- [22] 高見将則, “射影を用いたグラフの対話的可視化手法と複雑ネットワークへの応用,” 東京工業大学大学院情報理工学研究科修士論文, 2013.
- [23] J. Leskovec, K. Lang, A. Dasgupta and M. Mahoney, “Community structure in large networks: Natural cluster sizes and the absence of large well-defined clusters,” *Internet Mathematics*, **6**, pp. 29–123, 2009.
- [24] dataset, <https://snap.stanford.edu/data/web-Stanford.html>
- [25] J. Leskovec, J. Kleinberg and C. Faloutsos, “Graphs over time: Densification laws, shrinking diameters and possible explanations,” In *Proceedings of ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 2005.
- [26] dataset, <https://snap.stanford.edu/data/as.html>
- [27] M. Bogua, R. Pastor-Satorras, A. Diaz-Guilera and A. Arenas, “Models of social networks based on social distance attachment,” *Physical Review E*, **70**, 056122, 2004.
- [28] dataset, <https://snap.stanford.edu/data/cit-HepPh.html>
- [29] M. E. J. Newman, “Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices,” *Physical Review E*, **74**, 036104, 2006.
- [30] dataset, <http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/>
- [31] dataset, <https://snap.stanford.edu/data/email-Enron.html>
- [32] W. W. Zachary, “An information flow model for conflict and fission in small groups,” *Journal of Anthropological Research*, **33**, pp. 452–473, 1977.
- [33] dataset, <http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/karate.zip>
- [34] D. E. Knuth, *The Stanford GraphBase: A Platform for Combinatorial Computing*, vol. 37, Addison-Wesley Reading, 1993.
- [35] dataset, http://konect.uni-koblenz.de/networks/moreno_lesmis