

ボルダとコンドルセ

坂井 豊貴

人々の多様な考えを、いかにして一つに集約するか。集団での「決め方」の設計を考察する社会的選択理論は、フランス革命前のパリにて始まった。先導したのは二人の応用数学者、ボルダとコンドルセである。彼らの問題意識や考え方は、現在の社会的選択理論においても骨格を成している。本稿では史実を交え、両者の学問の一端を紹介する。

キーワード：ボルダルール、コンドルセ、ポジショナル・ルール、コンドルセサイクル、アローの不可能性定理

1. 決め方研究の黎明期

人間が一人でものごとを決めるときに、「決め方」というほどのものはいらない。無論、彼の判断が拠って立つ格律や原則はあっても構わないし、あるほうが判断はしやすいだろう。だが「決め方」まではいらない。熟慮の末に決めようが、欲望に流されるまま決めようが、決めることはできる。賢明なものだろうが、浅薄なものだろうが、一つの考えによって決められはする。

だが二人以上の人間からなる集団となると、そのようにはいかない。人々が満場一致で一つの見解に同意できるとは限らないからだ。一般には人々はそれぞれに違った考えをもつ。それゆえ集団には、人々の考えが分かれたときにどうするかを決定する「決め方」が備わっているのが通常である。たとえば多数決は、よく使われている決め方の一つだ。

だが多数決はよい決め方というわけではない。たとえばそれは「票の割れ」に弱いという欠陥をもつ。2000年のアメリカ大統領選では、民主党のゴアが共和党のブッシュに優勢していたところ、「第三の候補」ネーダーが現れてゴアの票を致命的に喰い、ブッシュは漁夫の利で逆転勝利を収めた。泡沫候補の有無が結果を様変わりさせる決め方は、人々の意思をうまく反映する決め方とは言いがたい。

では、どうすれば、どの決め方ならば、人々の意思をよりよく社会的決定に反映できるのだろうか。そして「よく」とはどういうことなのか、何をもって「よい」と考えるのか。ここにも思慮をめぐらせる必要がある。

こうした問いを最初に考えたのが、フランス革命前

の二人の才人、ボルダとコンドルセである。ボルダは海軍の科学者で、弾道計算やメートルの測定に貢献した数学者であった。コンドルセは積分論で頭角を現し、数学を使って社会事象や制度を分析する「社会数学」(mathématique sociale)を構想したパリ王立科学アカデミーの代表的な学者である。

まずは1770年にボルダがパリ王立科学アカデミーで、いまでいうボルダルールの研究報告をした。それが当時特に画期的な研究と評価された形跡は見受けられない。ボルダの報告論文 [1] は、1780年代に入ってコンドルセが同会のアカデミー年報の編纂に関わるようになって初めて出版された。そしてコンドルセは1785年に『多数決論』と略称される大著を出版した [2]。この書物をもって社会的選択理論の最初の黄金時代はピークを迎える。なお、1789年にはフランス革命が起こり、コンドルセはその渦中へ自ら巻き込まれていく。革命後の動乱期にはジロンド派の憲法草案の作成に深く関わるが、ジャコバン独裁を敷くロベスピエールに敵視され、逃亡の末落命した。コンドルセおよび当時の出来事については、隠岐さや香による卓越した史書 [3] を参照されたい。

2. ボルダは何を考えていたか

ボルダの論文 [1] は、多数決が「票の割れ」に弱いことの指摘から始まる。彼はそれを「二人のアスリートが疲れきってしまった後で、第三の最も弱い者に負けてしまうようなものだ」と言い表した。彼が説明に用いたのは次の表のような例だ。

	4人	4人	7人	6人
1位	X	X	Y	Z
2位	Y	Z	Z	Y
3位	Z	Y	X	X

さかい とよたか
慶應義塾大学経済学部
〒108-8345 東京都港区三田 2-15-45
tsakai@keio.jp

この表は次のように読む。有権者は計 21 人おり、三つの選択肢 X, Y, Z がある。そのうち 4 人は選択肢を上から XYZ と順序づけている。ほかについても同様である。

人々がこの順序づけどおりに投票するとしよう。多数決のもとだと、X には 8 票、Y には 7 票、Z には 6 票が入ることになる。勝つのは相対的に最も多い票数を集めた X だ。

ここでボルダは次の事実に注目する。X と Y のペアごとの多数決なら、X は 8 対 13 で負けてしまう。Y 支持者の 7 人のみならず、Z 支持者の 6 人も、Y を X より好むからだ。同じように、X と Z のペアごとの多数決でも、やはり X は負けてしまう。

ここでの X のように、ほかのあらゆる選択肢とペアごとの多数決で全敗するものをペア全敗者 (pairwise majority rule loser) という。なお当該分野ではペア全敗者を、コンドルセ敗者 (Condorcet loser) と呼ぶ文献が散見されるが、その命名は歴史的経緯に反するものである。

ペア全敗者は、ほかのあらゆる選択肢と比べて、半数未満の支持しか得られない。この意味で、多数意見を全く反映していない選択肢と解釈できよう。そのような選択肢を選び取ってしまう多数決は、決め方としてよくできていない。

そこでボルダが持ち出したのが、今日ボルダルールと呼ばれる配点式の決め方だ。これは、各有権者が「1 位に 3 点、2 位に 2 点、3 位に 1 点」と配点して、得点の総和が最大となる選択肢を選ぶ決め方である。

不思議なことにボルダ自身は、ボルダルールがペア全敗者を選ばないことを、証明していない。おそらく筆者に限らず、現代の研究者の目には、ボルダの議論の運びは奇妙なものに見えるだろう。彼は論文の中でボルダルールを導入した後、「多数決とボルダルールの結果が一致する条件」を探すが、これはあまり興を惹くものではない (当時も誰かの興を惹いた形跡は見当たらない)。

だが何にせよ、ボルダルールがペア全敗者を選ぶことはない。これはフィッシュバーンとガーラインによる 1976 年の論文の中で示された [4]。その証明は難しいというほどではないが、自明というわけでもない。

ボルダはまた、ポジショナル・ルールという配点式の決め方のクラスを与えてもいる。それは「1 位に p_1 点、2 位に p_2 点、3 位に p_3 点」のように配点する決め方のことだ (ただし本稿では $p_1 > p_2 \geq p_3$ とする)。なお、多数決は「 $p_1 = 1, p_2 = p_3 = 0$ 」という極端な

傾斜配点をするポジショナル・ルールである。これと比べるとボルダルールの配点は非常になめらかだ。

ボルダの議論では、ポジショナル・ルールが与えられ、そしてその中で特に $p_1 = 3, p_2 = 2, p_3 = 1$ であるボルダルールに焦点が当てられる。だが、少なくとも現代の研究者の感覚からは、なぜボルダルールの配点であらねばならないのか、は自然な疑問として起こる。

これについてもフィッシュバーンとガーラインは、ボルダの論の運びを支持するような解答を与えている。いついかなるときもペア全敗者を選ばないポジショナル・ルールは、ボルダルールただ一つなのだ。すなわちペア全敗者を選ばないことにこだわるならば、ボルダルール以外のポジショナル・ルールは却下されねばならない。ただしフィッシュバーンとガーラインはその唯一性の証明を与えておらず、詳細は筆者と岡本実哲の論文 [5] を参照されたい。

定理 1. ポジショナル・ルールの中で、ペア全敗者を常に選ばないものは、ボルダルールのみである [4, 5]。

3. コンドルセのボルダ批判

定理 1 はボルダルールを肯定するものだが、コンドルセはボルダルールを否定する。彼は次のような例を挙げる (コンドルセ自身が作成した例はこれより複雑である [2, 6])。

	3 人	2 人	2 人	2 人
1 位	X	Z	Y	Y
2 位	Y	X	X	Z
3 位	Z	Y	Z	X

ここでボルダ得点を計算すると、X は 19 点、Y は 20 点、Z は 15 点となる。よってボルダルールは Y を選ぶ。そして実はここでは、ボルダルールに限らずすべてのポジショナル・ルールが Y を選ぶ。実際、各選択肢の得点を計算すると下記のとおりである。

$$\cdot X \text{ の得点: } P(X) = 3p_1 + 4p_2 + 2p_3$$

$$\cdot Y \text{ の得点: } P(Y) = 4p_1 + 3p_2 + 2p_3$$

$$\cdot Z \text{ の得点: } P(Z) = 2p_1 + 2p_2 + 5p_3$$

そして $p_1 > p_2 \geq p_3$ ゆえに

$$P(Y) > P(X) > P(Z)$$

となる。

だがコンドルセは X が選ばれるべきだと論じる。なぜなら X はペアごとの多数決で、Y にも Z にも勝つからだ。ここでの X のように、ほかのあらゆる選択肢にペアごとの多数決で勝つものを、ペア全勝者 (pairwise majority rule winner) という。ペア全勝者はコンドルセ勝者 (Condorcet winner) と呼ばれることも多い。

ペア全敗者もそうだが、ペア全勝者は常に存在するとは限らない。たとえば次の例がそうだ。

	4人	3人	2人
1位	X	Y	Z
2位	Y	Z	X
3位	Z	X	Y

X は Y に 6 対 3 で勝ち、Y は Z に 7 対 2 で勝ち、Z は X に 5 対 4 で勝つ。ここではどの選択肢も、ペア全敗者でもなければ、ペア全勝者でもない。

そしてこの $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X$ という循環をコンドルセサイクル (Condorcet cycle) という。これは「多数決のパラドックス」のように呼ばれることが多いが、コンドルセはこの循環の発生を、まったくもってパラドキシカルには捉えていない。こうした循環が起こるのは、ペアごとの比較を行う以上は当然のことである。いかにしてサイクルを崩すかを彼は考察した。一案は、最も得票差の少ない結果である「Z は X に 5 対 4 で勝つ」を却下して、サイクル $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X$ から、順序 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ を作成することである。なぜそうするかを含めたコンドルセの議論については [6, 7] を参照されたい。

コンドルセは、ペア全勝者が存在するときには、その選択肢が選ばれるべきだと論じた。そして上述の例が示すように、どのポジショナル・ルールにもそれはできない。

定理 2. ポジショナル・ルールの中で、ペア全勝者があるときには必ずそれを選び取るものは存在しない [2].

コンドルセ自身はこの不可能性定理により、あらゆるポジショナル・ルールを不適切だと断じた。そして、ある種の最尤法に基づく、独自の決め方を構想する [8]. 「ボルダ対コンドルセ」は、現在の社会的選択理論においても明確な対立軸となっている。筆者は「ボルダ派」であるがその理由については [7] を参照されたい。また、ボルダとコンドルセの決め方の結果が一致するケースの研究として [9] を挙げておく。

4. おわりに

コンドルセは革命の動乱の中、1795 年に落命する。コンドルセより年長であったボルダは革命を生き延び 1799 年に没する。その後、ボルダやコンドルセのような研究は下火になる。

社会的選択理論の再度の隆盛には、1948 年のダンカン・ブラックを待たねばならない。彼はコンドルセサイクルが発生しないための十分条件である「単峰性」を発見し、中位投票者定理という可能性定理を示した [10, 11]. そして 1951 年にケネス・アローが博士論文『社会的選択と個人的評価』のなかで「アローの不可能性定理」を示した [12]. アローはそこで社会的選択理論の分析的枠組みを与え、それは現在の当該分野の発展を大いに促した。

アローの不可能性定理は、二項独立性 (binary independence) という条件を満たす決め方に、まともなものはないと示すものだ。そして二項独立性という条件のアイデアは、ボルダやコンドルセによる「ペアごとの比較」を歴史的源泉とする。特にコンドルセはペアごとの比較に強くこだわったが、そのこだわりを徹底的に追及するとまともな社会的選択はできない、というのがアローの「不可能性」の含意である。ときおりアローの不可能性定理を「民主主義の不可能性」のように喧伝する者がいるが、これは大仰である。二項独立性こそが民主主義の本質であるわけではまったくなく、民主主義の難しさは、二項独立性の不可能性を持ち出すまでもなく、政府の情報秘匿やポピュリズムの跋扈を見れば十分であろう。

今日、社会的選択理論を研究するにあたって、ボルダやコンドルセの古典は必読というわけではない。だがそれら古典をあたってみると、現代の問題意識と驚くほど重なることがわかる。そしてまた社会的選択理論で扱う基本的な概念の多くが、そこですでに与えられていることがわかる。古典から眺めると、現在の社会的選択理論はきわめて見通しがよくなる、というのが筆者の経験である。そうした観点から書かれた書籍として、筆者による新書 [7]、一般書 [13]、および定理と証明のある教科書 [6] を挙げておく。

参考文献

- [1] J.-C. de Borda, “Mémoire sur les élections au scrutin,” *Histoire de l’Académie Royal des Sciences, Académie des sciences*, 1781.
- [2] M. de Condorcet, *Essai sur l’application de l’analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité*

- des voix*, Chelsea Publishing (reprinted), 1972.
- [3] 隠岐さや香, 『科学アカデミーと「有用な科学」—フォントネルの夢からコンドルセのユートピアへ—』, 名古屋大学出版会, 2011.
- [4] P. C. Fishburn and W. V. Gehrlein, “Borda’s rule, positional voting, and condorcet’s simple majority principle,” *Public Choice*, **28**, pp. 79–88, 1976.
- [5] N. Okamoto and T. Sakai, “The Borda rule and the pairwise-majority-loser revisited,” unpublished manuscript, Keio University, 2014.
- [6] 坂井豊貴, 『社会的選択理論への招待—投票と多数決の科学—』, 日本評論社, 2013.
- [7] 坂井豊貴, 『多数決を疑う—社会的選択理論とは何か—』, 岩波新書, 2015.
- [8] H. P. Young, “Condorcet’s theory of voting,” *American Political Science Review*, **82**, pp. 1231–1244, 1988.
- [9] T. Sakai, “A search for the general will in a spatial model,” *Japanese Economic Review*, **66**, pp. 260–270, 2015.
- [10] D. Black, “On the rationale of group decision-making,” *Journal of Political Economy*, **56**, pp. 23–34, 1948.
- [11] D. Black, “The decisions of a committee using a special majority,” *Econometrica*, **16**, pp. 245–261, 1948.
- [12] K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Yale University Press, 1951 (1st edition), 1963 (2nd edition). (長名寛明 (訳), 『社会的選択と個人的評価』, 勁草書房, 2013.)
- [13] 坂井豊貴, 『「決め方」の経済学—「みんなの意見のまとめ方」を科学する—』, ダイヤモンド社, 2016.