だからORが好き
—線形計画法と組合せ最適化の素敵な関係—

池上　敦子

1. はじめに

研究において（研究以外においても）男女差はない，というのが私の基本的な考え方である．その下で，女性である私から女子学生さんへのメッセージはどんなものであろうかと，このお題をいただいたときに頭を悩ませた（以降，「さん」づけを省略させていただく）.

さて，私の場合，男子学生と女子学生との関わりに違いがあるだろうか，いや，ないはずである．

いやいや，そうはいっても，私の研究室にはなぜか女子学生が少ない．

研究，教育においては，男女差別される機会もなく，私は，自分自身が女性であることをほとんど意識することなく過ごしてきた．しかし，その一方で「われわれの学会に（もしくは学会活動でお会いする機会において）は，女性が少ないかもしれない」と思うことはある．

学会に女性が少ないことと，私の研究室に女子学生が少ないことは関係があるのだろうか．

もしや，「オペレーションズ・リサーチ（以降，OR）という研究分野」と「女性」との相性といった問題なのであろうか．いやいや，そんなことはない．私は，本誌の2006年7月号の特集「21世紀を最適化する女性たち」でも，「女性が持てる細やかな観察力，特有の本質を捉える感性が，最適化の世界，ORの世界でも生きてくる予感を（ささやかながら）感じている」と述べていたではないか [1].

そこで，本号の特集には，「OR学会に女性研究者を増やそう」，もっと広く解釈して「若い研究者をOR研究に誘おう」という思いが込められているのかもしれないと，勝手に解釈して話を進めることにした．

私がなぜORという分野で活動しようと思ったか，なにに励まされて活動してきたかをご紹介しようと考えた．それが，ORやOR学会への興味につながってもらえるかどうかについては，はなはだ自信がないが，自分がORを大好きになった理由やきっかけ（幸運）を，くすりと笑いながら「え〜，こんな研究者もいるんだ」と思っていただけたら幸いである．

結論を先に言ってしまうと，女性であったことは，全く関係なかったので，あらかじめここでお詫びし，お許しいただきたい．

男女関係なく，さらには，将来の専門分野を決めていない高校生や中学生にも読んでいただけるよう，簡単な言葉で最適化問題の面白さが伝わるように書いてみようと思う．

2. とにかく楽しかった

私は，OR学会で活動するみなさんの多くとは，かなり異なる経歴をもつ．数学科の学部を卒業した後，工学部の経営工学科に助手として就職したのである．なんの専門もないまま就職できるなんて，なんと「のどか」な時代だったのだろう．逆に言えば，なにも期待されていない人材だったのだと思う．

今まで，長いことOR学会を本拠地に活動してきたにもかかわらず，当時の私は，ORも最適化も全く知らなかった．ついでに言えば，プログラミングの経験もなかった．

助手として就職後，まずは経営工学科のいろんな授業に参加してみた．その中で，衝撃的に興味をもった授業は数理計画法だった．今はアメリカにおられる星孝雄先生（当時の大学教授から，大手企業のsenior vice presidentを経て，テキサスで立ち上げた会社のCEO，社長というご経歴をもつ先生）の授業だった．大袈裟に言えば，私にとって人生が変わった瞬間だったかもしれない．

初めて出席した授業では，シンプレックス（単体）法の復習をやっていたのだが，基底変数の組合せで解を得る，具体的には，基底変数を1つずつ取り換えながら（基底変換しながら），局所探索して最適解を得る過程に，とんでもなく興味をもった．

今の感覚で説明すると，連続最適化の問題を組合せ

いけがみ　あつこ
成蹊大学
〒180–8633 東京都武蔵野市吉祥寺北町3–3–1

最適化の方法で解いているといったことが，笑いたくなるくらい楽しく面白かったのである．そのときのことを思い出すと今でも楽しい気持ちになれる．そして，研究者仲間と（たとえばお酒を飲みながら），そのような面白さについて話すのが大好きである．

ちなみに，それと同じくらい「楽しい」と感じたのは，双対性について（自分なりにだが）理解できた，と思えたときだった．双対性に関わる簡単な（古典的な）話を，割当問題を使って，4 節と 5 節で紹介したいと思う．

話を戻すと，ともかく，世の中，とんでもなく面白い分野があるものだと驚いたわけである．これに加えて，当時の星先生は，企業が抱えていた問題を，私に「考えてごらん」と，どんどん投げてくださった．面白さへの驚きと現実の問題解決に挑む環境の下，私は，最適化モデリングに強い興味をもつことになった．

しかし，星先生が大学をお辞めになり，残された私は，OR を学ぶための先生も仲間もいないまま，めちゃくちゃな？独学のみで研究を始めることになる．

3. OR 学会が育ててくれた

OR 学会の論文誌 JORSJ に初めて書いた論文は，ビークル・ルーティングについてだった．とても幼稚な論文だったが，この論文には思い出がたくさんある．

まず，この論文を書こうと思ったきっかけは以下のようなものである．学会にほとんど知り合いもない中で，学会の春季大会（たしか仙台）で，この内容の発表をしたところ，2 人の先生が質問してくださった．詳細な内容に対する質問で，とてもうれしかったうえ，おひとりの先生が「ぜひ，論文にまとめてはいかがでしょう」とご助言をくださったのである．

うれしい気持ちを抱えながら東京に戻った後，「はてさて，独学の私が論文など書いてもよいものか」と考えた．きちんと教育を受けたみなさんには，たぶんあまりわからない感覚ではないかと思う．結果としては，さんざん悩んだ末，「よし，書こう．もしも採択されるようなことがあったら，私は研究者として活動する決心をしよう」と（ちょっと大袈裟ながら）決めた．

先ほども書いたが，内容は他愛ないものだったし，論文の書き方だって穴だらけだったが，素晴らしい運に恵まれたのは，査読者の先生方のご指導を受けられたことである．査読レポートでは，読むべき論文のリストだけでなく，どうしたら論文がよくなるかが，とても丁寧に書かれていた．自分の未熟さを恥ずかしいと思いながらも，こんなご指導を受けられるのかと感謝と驚きでいっぱいになった．そして，ご助言の意味を真剣に考え，読むべき論文を自分なりにも加えて学び，ゆっくり時間をかけて論文を改訂した．悩み悩みの再投稿の後，採択されたときのうれしさは今でも忘れられない．「研究者になろう！」と夢のようにふわふわしていたことを覚えている．

投稿してから出版まで，2 年近くかかった．論文が出版されることを毎日楽しみに待っていた私だが，論文誌 JORSJ が届いた当日，大学のメールボックスから論文誌を抱えて研究室に戻ったとき，電話が鳴った．なんと，OR 学会中部支部からの（掲載論文についての）講演依頼だった．私にとっては．まるで作ったような夢のような話だった．「私の論文を読んでくださった先生がいらした!!!」と舞い上がってしまったことは，読者のみなさんのご想像のとおりである．

「私が研究活動に本気で取り組むこと」を後押ししてくださったのは，私のことなど「見も知らぬ」はずの，学会発表会で論文執筆を勧めてくださった先生，査読者の先生方，そして，JORSJ の論文を読んでくださった先生方，もっと広く言えば，OR 学会の「研究者を育てる」考え方だったのだと思う．

余談ではあるが，この経験から，私は査読レポートを丁寧に書くように努力することを決めた．

ちなみに，学会発表会でご助言くださった先生にお礼を申し上げたく，昔，本誌の編集委員をやっているときに，編集後記で「wanted」を出したが，未だに探し人のままである．

さて，OR 学会の支援は，その後も続く．

私がナース・スケジューリングの研究を始めた理由は，本誌 2005 年 8 月号のモデリング特集の「モデリングを通して見えた世界」[2] で紹介させていただいたが，本誌に投稿した論文「我が国におけるナース・スケジューリング問題」[3] は，本当に多くの方に読んでいただいた．この論文の査読においても，私は査読者の先生方に恵まれた．この論文だけでなく，その後に JORSJ に投稿した論文についても，査読者の先生方のご助言は厳しくも丁寧でとても親身なものであった．

論文投稿で，忘れられない事件がある．投稿した論文を査読レポートに従って改訂して再投稿したときのことである．TeX を使って論文を書いていたコンピュータにはプリンタが接続されておらず，論文が完成した後に，OS の異なる別のコンピュータに TeX ファイルに送って，そのコンピュータ上の TeX ソフトで論文を印刷した．しかし，ソフトウェアの違いなのか，論文の一部が（それも複数箇所にわたって）消えてしまっ

たのである．それに気づかず，再投稿してしまったのだが，指摘されて，後から読んでみると，虫食いクイズのような論文になっていた．

本来なら落とされても仕方ない大失態だったにもかかわらず，査読者の先生方は，消えた部分を補足して論文を読んでくださった．査読レポートのはじめに論文の不備のご指摘があり，内容に対するコメントの後に，完全な形で論文を投稿するよう書いてくださった．そして，レポートの最後に「繰り返しになるが，1 語 1 字のミスもないと確信できるよう丁寧に仕上げること」と書かれていた部分を読んだときには，「はは〜」と机に突っ伏して，とても申し訳ない気持ちと，恥ずかしい気持ちと，感謝の気持ちでいっぱいになった．もちろん，すぐ大失態のお詫びと虫食い論文を読んでくださったことに対するお礼のお手紙を書いた．その後，この論文は無事 JORSJ に掲載されたが，査読者の先生にとっての私の印象は「あきれるくらいそそっかしい」なのだろうなと，恥ずかしくも感謝の思い出である．

その後，私は自分が書いた原稿は，何度も声を出して読んでから完成することにした．

4. 簡単で面白い「割当問題」

この節では，割当問題を，最適化をまったく知らない人に知ってもらうつもりで説明してみようと思う．

割当問題とは，2 つのグループの要素を 1 対 1 に対応づけする問題である．私が授業で利用するのは，以下のような問題例である．

■ OR 社の割当問題例■

OR 社では現在，あるコンピュータシステムを開発中である．システムを構成するプログラムを社員たちが作成しているが，人手不足で 5 つのプログラムを自社では作成できないことがわかった．外部にその 5 つのプログラムを依頼（外注）しようと思ったが，問い合わせたどの会社も忙しく，「1 つだけなら引き受ける」という会社がちょうど 5 つだけ（会社 1〜会社 5）存在した．5 つの会社に見積もってもらった「プログラム作成の金額（コスト）」は表 1 のとおりである（単位は 100 万円）．どの会社にどのプログラムを依頼したら外注にかかる総コストを最小にできるだろうか．

表 1 のコスト表を眺めると，会社ごとに特徴があることがわかる．高いコストの会社（たとえば，会社 4 は全体的に割高である）は，できれば利用したくないが，1 つの会社に 1 つしかプログラムを依頼できないということは，1 つの会社には必ず 1 つ依頼しなければいけないということでもある．

表 1　コスト表

会社 ＼ プログラム	1	2	3	4	5
1	11	17	8	16	20
2	9	7	12	6	15
3	13	16	15	12	16
4	21	24	17	28	26
5	14	10	12	11	15

i 行の会社に j 列のプログラムを割り当てることを，表 2 の例のようにマルで表すことにすると，1 つの会社に必ず 1 つプログラムを割り当てることは，各行にちょうど 1 つマルをつけることであり，1 つのプログラムが必ず 1 つの会社に割り当てられることは．各列にちょうど 1 つマルがつけられることにあたる．

表 2 の割当は，欲張り法的に作ったもので，まず，表中の最小値 6（2 行 4 列）にマルをつけ，それ以外の行や列の中の最小値 8（1 行 3 列）にマルをつける．あとは同様に，各行各列にマルが 1 つになるよう，10（5 行 2 列），13（3 行 1 列），26（4 行 5 列）の順にマルをつけた．

表 2　割当の例

会社 i ＼ プログラム j	1	2	3	4	5
1	11	17	8	16	20
2	9	7	12	6	15
3	13	16	15	12	16
4	21	24	17	28	26
5	14	10	12	11	15

しかし，これが総コスト最小になる保証はない．このように，その場その場の欲で選んでいくと，最後に大きな数（この例では，26）を選ばざるを得ない場合も起こる．これに対し，1 番よい解（最適解）を得るためには，総コストが最小になるマルのつけ方を見つけなければならない．

そこで，コストが全体的に高め設定である会社 4 に注目すると，1 番安いプログラムはプログラム 3 のコスト 17 である．つまり，OR 社は会社 4 に，少なくともコスト 17 を支払わなければならず，それより高いプログラム 1, 2, 4, 5 の作成を依頼すれば，それぞれ，プラス 4，プラス 7，プラス 11，プラス 9 のコストが発生

する．同様に，会社 1, 2, 3, 5 に対しては，少なくとも，それぞれの最も安いプログラム作成金額，コスト 8，コスト 6，コスト 12，コスト 10 を支払う必要がある．つまり，OR 社は，「少なくとも 8+6+12+17+10=53 の総コストを支払う必要がある」ことが，この問題を解く前にわかる．また，その要素以外のプログラムを依頼する場合には，さらにプラスの費用がかかることになる．ここで，「これ以上は小さくはならない」と明らかになっている値を，総コストの下界と呼ぶことにする．

下界 53 を求めた関係を，表 3 に表してみる．表の中の数字は，元のコスト表の各行の要素から，その行の最小値を引いた結果（相対コスト）を表す．

表 3　相対コスト (1)

プログラム

	i \ j	1	2	3	4	5	v_i
	1	3	9	0	8	12	8
会	2	3	1	6	0	9	6
社	3	1	4	3	0	4	12
	4	4	7	0	11	9	17
	5	4	0	2	1	5	10

ここで，元のコスト表の i 行 j 列の要素を c_{ij} とし，表 3 の要素（相対コスト）を計算するために，i 行から引いた数を v_i と書くことにする（v_i の値を表の右に示す）．したがって，表 3 の i 行 j 列の要素は，$c_{ij}-v_i$ である．

直感的に考えて，0 の要素を選んだほうが総コストを小さくできることがわかると思う．しかしながら，表 3 の各列を縦に見ると，1 列と 5 列に 0 の要素がないので，先ほど計算した下界 53 に対し，プログラム 1 に関しては，少なくともプラス 1，プログラム 5 に関しては，少なくともプラス 4 のコストを考えなくてはならず，この時点で，下界が 58 (53+1+4)，つまり，OR 社は「少なくとも，総コスト 58 を支払う必要がある」ことがわかる．

この関係を表 4 に表す．表中の値は，表 3 の各列の要素から，その列の最小値を引いた結果を表す．ここで，j 列から引いた数を w_j と書くことにすると，表 4 の i 行 j 列要素は，$c_{ij}-v_i-w_j$ である．

またしても直感的に，ここで 0 になった要素に対応する割当を選べば，最適な解が得られるような気がする．

そこで，これが本当かどうか調べてみることにする．

そのために，まず，割当問題の制約を式で書いてみ

表 4　相対コスト (2)

プログラム

	i \ j	1	2	3	4	5	v_i
	1	2	9	0	8	8	8
会	2	2	1	6	0	5	6
社	3	0	4	3	0	0	12
	4	3	7	0	11	5	17
	5	3	0	2	1	1	10
	w_j	1	0	0	0	4	

る．この問題の意思決定を表す変数として x_{ij} を導入し，会社 i にプログラム j を割り当てる（i 行 j 列にマルをつける）場合に 1，そうでない場合に 0 の値をとるものとする．すると，1 つの行，たとえば 1 行にちょうど 1 つマルをつけることは，

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=1$$

と表すことができる．もちろん，どの変数も 1 か 0 の値しかとらないことが前提である．また，ほかの会社についても同様な式で書くことができる．

一方，1 つの列，たとえば 1 列に，ちょうど 1 つマルをつけることは，

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=1$$

と表すことができる．

この問題例では，会社の数=プログラムの数=5 であるが，この数を n と表すことにすると，一般的に，1 つの会社にちょうど 1 つのプログラムを割り当てることは，

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \qquad i=1,\ldots,n \qquad (1)$$

1 つのプログラムをちょうど 1 つの会社に割り当てることは，

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \qquad j=1,\ldots,n \qquad (2)$$

と表すことができる．そして，これらの条件の下で，総コストを最小にするような割当を決めることが，まさしく割当問題である．

割当総コストは，会社 i にプログラム j を割り当てる

場合に発生するコスト c_{ij} を足し合わせればよいので，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{3}$$

と表すことができる．変数 x_{ij} のうち 1 となるのは，ちょうど n 個なので，対応する n 個分の c_{ij} を足していることになる．

さて，話を表 4 の下まで戻そう．

元々のコスト c_{ij} で割当問題を解く代わりに，相対コスト $c_{ij} - v_i - w_j$ に対する割当問題を解くことに意味があるか．つまり，表 4 のコストが与えられた場合の割当問題と，元の割当問題は同等か，ということを確認しよう．表 4 の割当問題の制約式は，元の問題と全く同じで，(1) 式と (2) 式である．そして，総コストの式だけが異なり，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - v_i - w_j)x_{ij} = \\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\end{aligned} \tag{4}$$

になる．第 2 項に (1) 式，第 3 項に (2) 式を代入すると，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} v_i - \sum_{j=1}^{n} w_j \tag{5}$$

が得られ，元の問題の総コストである (3) 式から定数を引いた式となる．したがって，この総コストを最小にすることは，(3) 式を最小にすることであり，2 つの問題が本質的に同等であることがわかる．

それでは，表 4 のコストに対する割当問題について議論しよう．表 4 は，各行各列に必ず 0 が登場するように計算されている，この表の 0 の要素だけを選んだ「総コスト 0」の割当があれば，それが最適解になることは自明である．なぜなら，コストに負の要素が存在しないので，総コストが負となることはありえないからである．

ちなみに，表 4 の相対コストは，各行における最小値を v_i にしてから各列に対する w_j を決定したが，列から同様の作業を行うなど，各要素が負にならないように v_i や w_j の値を決めて，表 4 とは異なる「各行各列に 0 が 1 つ以上ある」相対コストの表を作ってもよい．

さて，このように作成した相対コストに対し，「0 の要素だけを選んだ割当」が必ずしも作成できるわけではない．表 4 の例では，1 行には 0 が 1 つしかないので，3 列のそれにマルをつけ，3 列のほかの 0 にバツをつける．同様に，0 が 1 つしかない 2 行と 5 行の 0 にマルをつけ，採用不可能になった 3 行 4 列の 0 にバツをつける．さらに，列で見て，1 列に 0 が 1 つしかないので，3 行のそれにマルをつけ，採用不可能になった 3 行 5 列の 0 にバツをつける．すべての 0 にマルかバツがついた状態は，表 5 のようになる．

表 5　要素 0 を選ぶ

プログラム

	i \ j	1	2	3	4	5	v_i
	1	2	9	0	8	8	8
会	2	2	1	6	0	5	6
社	3	0	4	3	~~0~~	~~0~~	12
	4	3	7	~~0~~	11	5	17
	5	3	0	2	1	1	10
	w_j	1	0	0	0	4	

つまり，このコスト表では，0 を 5 つ選ぶことが不可能である．そこで，表 4 とは少し異なる相対コストを作ってみることにする．

またも，直感的に話を進めることにする．表 5 では，4 行にマルがつかなかったので，その原因を考えると，1 行の 0 にマルをつけたことが挙げられる．つまり，1 行や 4 行に別の 0 があれば解決するかもしれないので，どちらか，もしくは両方に 0 の要素を増やすことを考える．1 行と 4 行で，0 以外の要素の中の最小値は，1 行の 2 なので，1 行の要素から 2 を引くことを考える．つまり，v_1 の値を 8 から 10 に変更する．しかし，1 行のすべての要素から 2 を引くと 0 が 1 つ増えるものの，3 列の 0 は -2 になってしまう．先ほど述べた「総コスト 0 の割当なら最適解」という判定基準を利用するためには，要素が負になることは避けたい．そこで，3 列に 2 を足して -2 を 0 に戻すことを考える．つまり，w_3 を 0 から -2 に変更する．その結果，4 行 3 列の 0 が 2 になり，4 行に 0 がなくなってしまうので，今度は 4 行から 2 を引くことにし，v_4 を 17 から 19 に変更する．結果として得られる相対コストは，表 6 のようになる．

ここから，0 をうまく選んでマルをつけると，表 7 のようになる．

表 6 の割当問題の最適解の総コストが 0 となるので，

表 6　相対コスト (3)

会社 i ＼ プログラム j	1	2	3	4	5	v_i
1	0	7	0	6	6	10
2	2	1	8	0	5	6
3	0	4	5	0	0	12
4	1	5	0	9	3	19
5	3	0	4	1	1	10
w_j	1	0	−2	0	4	

表 7　要素 0 を 5 つ選べた結果

会社 i ＼ プログラム j	1	2	3	4	5	v_i
1	0	7	0	6	6	10
2	2	1	8	0	5	6
3	0	4	5	0	0	12
4	1	5	0	9	3	19
5	3	0	4	1	1	10
w_j	1	0	−2	0	4	

(5) 式の値は 0 となり，元の割当問題の総コストは，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{j=1}^{n} w_j = 60 \qquad (6)$$

となる．

最初に与えられたコスト表（表 1）において，表 7 のマルと同じ場所にマルをつけ，マルのついた値を足し合わせると，60 になっていることがわかる．

5. 割当問題の双対問題

ここからは，大学の授業で線形計画問題の双対性を学んだ（学んでいる）人を対象とするが，できるだけ誰にでもわかるように説明してみよう．ただし，厳密さは省略し，主問題と双対問題の関係が，なんとなく体感できることを目指すので，必要に応じて教科書 [4–6] などを参照してほしい．

割当問題を表す式は，前節で説明したが，それらをまとめて以下に示す．

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (7)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (9)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,n \qquad (10)$$

前節で，変数 x_{ij} の値は 1 か 0 で，選ぶ（マルを付ける）か否かを表すと言っておきながら，ここで $x_{ij} \geq 0$ と示していることに違和感を感じる読者もいると思う．こうした理由は，$x_{ij} \geq 0$ とすることによって，割当問題を離散的な問題ではなく線形計画問題の 1 つと考えることができるからである．$x_{ij} \in \{0, 1\}$ でなく，$x_{ij} \geq 0$ としてもよい根拠は，こう表しても x_{ij} が 0 と 1 だけの値をとる整数最適解が存在する事実があるからである．詳しくは，「線形計画問題の整数性」，「完全単模性」をキーワードに教科書などを参照してほしい．

さて，割当問題を線形計画問題として扱えることがわかれば，その問題の裏表の関係にあるような，双対問題を考えることができる．元の問題を主問題とすると，双対問題は，主問題の定式化から機械的に作成できる，少し乱暴に言ってしまえば，元の問題の定式化の縦横をひっくり返したような問題を考えるのである．

双対問題における変数は，主問題の制約式それぞれに対応する．ここでは， 4 節で解を求めた過程と対応づけるため，変数の名前を，(8) 式のそれぞれに対して v_i，(9) 式のそれぞれに対して w_j とする．したがって，双対問題は以下のように表せる．

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{j=1}^{n} w_j \qquad (11)$$

subject to

$$v_i + w_j \leq c_{ij} \qquad i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,n \qquad (12)$$

ここで，変数 v_i, w_j に非負制約はない．最適化の方向は逆（最大化）になる．双対問題の目的関数の係数は，主問題における制約式の右辺の値であり，双対問題の制約式の右辺の値は，主問題における目的関数の係数である．そして，双対問題の制約式の係数行列は，主問題の係数行列を転置したものである．主問題に非負制約 $x_{ij} \geq 0$ があるので双対問題の制約式が不等式になるとか，主問題の制約式が等式であるので v_i, w_j に非負制約がないなど，教科書で復習してほしい．

さて，双対問題の制約式の (12) 式から，任意の i, j

について，以下の関係が成り立つ．

$$c_{ij} - v_i - w_j \geq 0 \tag{13}$$

v_i と w_j は双対問題の変数であり，この式はそれらの変数の実行可能範囲を制約するものであるが，よく見ると左辺は，4 節で扱った相対コストになっており，相対コストを負にしないという制約とも読み取れる．したがって，割当問題の双対問題は，相対コストの非負性を保ちながら（負にしないようにしながら），相対コストを計算する際の「コスト表の各行各列から引く数」の総和を最大にする問題と捉えることができる．もしくは，割当問題の目的関数値の下界を最大化する問題とも言える．

さてもう一度，教科書の線形計画法のページを開いてもらい，双対性のところの「弱双対定理」と「双対定理」と「相補性定理」を思い出してほしい．

弱双対定理（主問題が最小化の場合）は，「主問題の実行可能解の目的関数値が，双対問題の実行可能解の目的関数値より常に大きいか等しい」ことを言っている．これを確かめるため，(12) 式の両辺に x_{ij} をかけて，すべての i，j について辺々足し合わせてみると，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(v_i + w_j)x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{14}$$

が得られる．左辺の括弧を外すと，

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{15}$$

となる．この左辺に (1) 式と (2) 式を代入すると，

$$\sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{j=1}^{n} w_j \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{16}$$

が得られる．左辺は双対問題の目的関数であり，右辺は主問題の目的関数である．

この関係は，4 節で下界を考えたときに，直感的に理解いただけていたと思う．

さて，双対定理は「線形計画問題である主問題が最適解をもつならば，双対問題も最適解をもち，両方の最適目的関数値が等しい」ことを言っている．

4 節の表 7 のように，相対コストを非負に保ったまま（双対問題の実行可能性を守ったまま），各行各列にマルをつけ（主問題を実行可能にし），相対コストを対象にした割当の総コストを 0 にできれば，(6) 式のように，主問題と双対問題の最適目的関数値が等しくなることはわかる．

また，主問題と双対問題の目的関数が等しいということは，(15) 式の等号が成り立つということなので，(15) 式を等号にし，一方の辺を移項して表してみると，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(c_{ij} - v_i - w_j) = 0 \tag{17}$$

が得られる．すべての i と j で，$x_{ij}(c_{ij} - v_i - w_j)$ は非負であるから，その総和が 0 ということは，そのそれぞれが 0 であることを示している．そして，主問題の最適解と双対問題の最適解は，このような関係にあることがわかる．

最後に，相補性定理と相補性条件について考える．

相補性定理は，「主問題の実行可能解と双対問題の実行可能解が，それぞれの最適解である必要十分条件を示したもの」であるが，割当問題におけるその条件（相補性の条件）は，以下のように書くことができる．

$$x_{ij}(c_{ij} - v_i - w_j) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n \tag{18}$$

まさに (17) 式が示す条件となっている．

(18) 式は，任意の i と j について，x_{ij} が 0 になるか，相対コストである $(c_{ij} - v_i - w_j)$ が 0 になるかを示している．

そこで，再び，表 7 に戻って確認してみると，相対コストが 0 のところにマルをつけることは，対応する x_{ij} の値を 1 にしていることだが，相対コストが 0 なので，$x_{ij}(c_{ij} - v_i - w_j)$ も 0 になる．マルがついていないところは，x_{ij} の値が 0 なので，$x_{ij}(v_i + w_j - c_{ij})$ も 0 になる．よって，主問題の実行可能解（各行各列にちょうど 1 つずつマル），双対問題の実行可能解 $(c_{ij} - v_i - w_j \geq 0)$ である表 7 の解は，相補性条件を満たしたそれぞれの最適解になっていることが確認できる．

本節は，線形計画法を勉強中の人を対象に，「なんとなくわかった気がする」を目指して書いてみたが，簡単すぎて（話が乱暴すぎて）もの足りなかっただろうか．ちなみに，4 節で，割当問題の最適解を得るまでの流れは，きちんとステップを記述すれば，ハンガリアン法と呼ばれるアルゴリズムである．ハンガリアン法は，双対問題の実行可能解からスタートし，相補性条件を満たすように主問題の解を考えるが，主問題が実行可能でない間は，双対変数の値を変更しながら，主問題の実行可能性を目指し，同じ手順を繰り返すものと言える．

6. おわりに

自分の楽しみやよろこびの多くは，研究に関わる部分で構成されていると思う．

「至福のとき」という言葉から思い出す瞬間がある．ナース・スケジューリングの 2 交替制夜勤問題を解いていたときのことである．自分で作った局所探索ベースのアルゴリズムを，コンピュータ画面に途中経過の勤務表を出しながら，動かしていた．

ぼーっと画面を見ていると，ぱた，ぱた，と，目的関数値を減らしながら画面が進み，最後の「ぱた」で，目的関数値 0 の勤務表が出てきた．目的関数値は負にならない設定だったので，最適解であった．1〜2 年かけて自分の中で作り上げた考え方が，なんと最適解を出してきたのである．

近年は，かなりの問題が数理最適化汎用ソルバーで解けるようになっていて，若い学生さんや研究者からみたら「え？」と思うかもしれないが，ナース・スケジューリングは解くことが難しく，ヒューリスティックアルゴリズムががんがん提案されていた頃の話である．

結果を印刷し，解（勤務表）が間違っていないかを，ラインマーカーを使って確認した．間違いがないことがわかり，得られたばかりの最適解の勤務表を机の上において，長いこと夢のように眺めていたことを覚えている．まさに「至福のとき」だと思った．

こんな他愛ない幸せを支えに研究者をやっているのだが，そう思えるのも，OR，最適化が大好きだからだと，本稿を書きながら改めて自覚することとなった．

本特集における意味あるメッセージを書けないまま終了することを恐縮しているが，読者には，どこかの話で，くすりと笑っていただけただろうか．

謝辞　割当問題の双対性について書こうと思ったきっかけは，3 年前の公開講座（統計数理研究所）でウォーミングアップ用に使ったこの話を，会場にいらした松井知己先生から面白いと言っていただけたことでした．本稿には，松井先生，そして，星孝雄先生，土谷隆先生，池辺淑子先生，田辺隆人さん，北原知就先生より貴重なご助言や励ましをいただきました．心より感謝いたします．付録に付けた考え方（双対問題の捉え方）は，北原先生に教えていただきましたが，とてもわかりやすかったので追加で紹介させていただきました．

参考文献

[1] 池上敦子，“問題把握の難しさ，” オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**51**, pp. 388–391, 2006.
[2] 池上敦子，“モデリングを通して見えた世界，” オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**50**, pp. 564–567, 2005.
[3] 池上敦子，丹羽明，大倉元宏，“我が国におけるナース・スケジューリング問題，” オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**41**, pp. 436–442, 1996.
[4] 小島政和，土谷隆，水野眞治，矢部浩，『内点法（経営科学のニューフロンティア 9)』，朝倉書店，2001.
[5] 森雅夫，松井知己，『オペレーションズ・リサーチ（経営システム工学ライブラリー 8)』，朝倉書店，2004.
[6] 加藤直樹，『数理計画法（コンピュータサイエンスシリーズ 19)』，コロナ社，2006.
[7] V. Chvátal, *Linear Programming*, W H Freeman & Co., 1983.

付録（おまけ）

割当問題の目的関数値の下界を最大化する問題

本文の内容と話が多少重なるが，割当問題の目的関数値の下界を最大化する問題を，主問題の定式化から考えてみる [7].

主問題の制約式 (8) 式の i 番目の式の両辺に v_i，制約式 (9) 式の j 番目の式の両辺に w_j をかけて，そのすべての式を，辺々足し合わせてみる．

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{j=1}^{n} w_j$$

左辺を x_{ij} でまとめると，以下のようになる．

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(v_i + w_j)x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{j=1}^{n} w_j$$

すべての i と j について，$c_{ij} \geq v_i + w_j$ が満たされていれば，$x_{ij} \geq 0$ なので，以下の関係を示せる．

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(v_i + w_j)x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{j=1}^{n} w_j$$

つまり，$v_i + w_j \leq c_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$ の下での $\sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{j=1}^{n} w_j$ は，割当問題の目的関数値の下界となる．そして，この下界を最大化する問題こそ，割当問題の双対問題：(11), (12) 式になっている．

直感と直観

本稿では，何回か「直感的に」という言葉を使った．広辞苑で「直感」と「直観」を見比べたが，この使い分けは本当に難しい．「直観」は哲学的すぎると考えたのだが，詳しい方にご助言いただけたら幸いである．

