イバラもバラもある道
—スケジューリングの研究に取り組んで—

池辺　淑子

1. はじめに

研究者を目指す若い方，特に女性を応援するための特集．自らが企画したものであることから，記事を執筆するのは当然である．しかし，いざ筆を執ると何を書くべきかで迷い，なかなか進まずに困っていた．そこで，この特集の主な対象と想定している若い方の立場で考えることにした．自身が大学院の修士の学生のころの遠い記憶を呼び起こし，研究者になると決めた＝博士課程に進学したころのことを考えてみた．

筆者は東工大の小島政和先生の研究室の出身であるが，研究エネルギーが溢れ，国内，海外からの共同研究者や来客が頻繁に訪れ，学生の人数も多い，非常に活気に満ちていた環境であった．このような研究室の雰囲気が，自身が研究者を目指すことを後押ししたのは間違いない事実である．しかし，そのことと並んで心に残っているのが必ずしも満足に研究の時間が取れない環境の中でも，一生懸命研究に取り組んでいた方の姿である．具体的なお名前は申し上げないが，お酒を飲みながらいろんな苦労話をしてくださったことはとても参考になった．

そこで，今度はこの記事を通して筆者自身がそういうことを伝えることにした．誰しも苦労や困難を経験するものであるが，研究の楽しさや研究職のやりがいを伝える特集なので，このようなことにはあまり深く触れられない部分である．そこを敢えて，いろんなことがあります，それでも研究者になってよかった，ということがお伝えできればと思い，楽しくなかった部分を前面に出す方針を取ることにした．こんな道もある，という気持ちで読んでいただければ幸いである．

2. 学生時代

学生時代，組合せ最適化を研究する道には非常に自然に進んだ．進んだ，というよりは気づいたらそのようなテーマになっていた，というほうが正しいかもしれない．研究室の先輩からこの論文読んでみない？ と言われたのは 2 部グラフの最大重み完全マッチング問題において，値が 2 番目に大きな完全マッチング（最大重みではない完全マッチングの中で最も重みが大きなもの）を求めるアルゴリズムに関する論文であった．卒業研究はそのアルゴリズムを k 番目に値が大きなマッチングを求める方法へ拡張した，というものであったが，その過程において，ある 0-1 多面体における端点の隣接性に関する性質が重要であった．そして，そこから 0-1 多面体の研究に興味をもつようになった．大学院に進学してまずは 2 年間，研究をすることが楽しくて続けたかったことと周囲の勧めもあって博士課程に進学する決心をした．最終的には，0-1 多面体における端点の隣接性に関するテーマでなんとか博士号を与えていただき，研究者としての「仮免許」を取得してめでたく助手として社会人になることができた．

なお，この時代は「女子であること」を意識したことはほとんどなかった．たまに冗談で当時の研究室の仲間に「女性は酒豪が多い」などと言われることがあったが（確かに当時交流のあった女性はほとんど全員がアルコール分解酵素をたっぷりもっていた），それ以外は「女性である」ことはほとんど関係なかった．

3. 研究課題が定まらず苦労した時代

助手として着任したとき，研究をしてみないかと誘っていただいたのが「代数的組合せ論」と呼ばれる分野である．名前のとおり，純粋数学の代数，とりわけ群論や表現論を駆使してグラフなどの組合せ構造を研究するもので，当時はグレブナー基底に関する話題が最も熱かった．一緒に勉強してその分野に参入しよう，ということで取り組み始めた．およそ 2 年間，いろいろと勉強をしたが，その間，幸運にも講師に昇任させていただき，いわば安定したポストを得ることができた．

それもあって頑張らねばならないという思いがいっそう強くなったが，大変お恥ずかしい話，力量がなく，結果が出せなかった．さまざまなチャンスを与えてい

いけべ　よしこ
東京理科大学工学部情報工学科
〒 125–8585 東京都葛飾区新宿 6–3–1

ただいたのに，何を試してもうまくいかず，自分の不甲斐なさが情けなかった．焦りから，思考回路が正常に機能しなくなり，本を読んでもうまく頭に入って来ない，研究会や学会に行っても発表についていけない時期が続いた．研究者としての能力に疑問をもち，退職すべきかと真剣に考えた．今にして思えば，自分には難しいとわかった段階でそれを自ら申告して，ほかの方向へ進むべきであったが，その勇気がなかなかもてなかった．

このように研究で悩むところへさらに職場の人間関係で悩みが発生し，ストレスとの戦いの日々が続いた．忍耐力を養いながら仕事を続けていた時代である．仕方がないので，研究がうまくいかないなら，せめて学生の基礎教育はしっかりしようという切り替えができたことは不幸中の幸いである．テキストの作成などあまり評価の対象にならないようなところに精力を注いだ（もちろん，研究と教育の両方ともに全力投球できる方がたくさんいらっしゃるのは百も承知である．しかし，そのような能力がなかった身なのである）．

余談であるが，そのときに作成した教材は後に執筆に携わった専門書の一部として日の目を見ることになった．情けは人の為ならず，という言葉が身に染みた．

4. ようやくたどりついたスケジューリング分野

研究テーマが定まらずにもがいていた中，出会ったのがスケジューリング，とくにスポーツのスケジューリングという分野である．分野の性質上，事例ベースの研究報告（アメリカの大学バスケットボールに関する Nemhauser and Trick [1] の研究が代表的である）が数多くなされているが，一方で，現実の問題のエッセンスを取り出した抽象的問題もいろいろと考案されており，活発な研究がされている分野である．

多くの研究は各チームが本拠地をもつリーグ戦のスケジュール作成に関わるもので，ホーム＆アウェイ形式で戦う総当たり戦において連続するホームゲームやアウェイゲームの数を極力減らしたり（ブレイク数最小化問題 [2]），上限を設けたり，移動距離を最小化（巡回トーナメント問題 [3, 4]）する問題などが代表的である．

それに対して，ここで紹介する問題は多くのチームが 1 カ所に集まってリーグ戦を戦う場面を想定している．トーナメントデザインと呼ばれる分野の一つの問題であるが，具体的には以下のように記述できる．

・参加するチーム数は $2n$（偶数），本拠地は考えない
・使用する会場数は n（チーム数の半分）

表 1　6 チームに対する BTD

会場	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日
A	(1, 6)	(3, 5)	(2, 3)	(4, 5)	(2, 4)
B	(2, 5)	(4, 6)	(1, 4)	(1, 3)	(3, 6)
C	(3, 4)	(1, 2)	(5, 6)	(2, 6)	(1, 5)

表 2　8 チームに対する HPTD

会場	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日	7 日
A	(1, 6)	(2, 5)	(2, 8)	(4, 6)	(4, 7)	(3, 8)	(1, 5)
B	(2, 7)	(3, 6)	(4, 5)	(1, 8)	(3, 5)	(1, 7)	(2, 6)
C	(3, 4)	(7, 8)	(1, 3)	(5, 7)	(1, 2)	(5, 6)	(4, 8)
D	(5, 8)	(1, 4)	(6, 7)	(2, 3)	(6, 8)	(2, 4)	(3, 7)

・スケジュールを作成する期間は $2n-1$ 日
・各チームとも，各試合日にはほかのいずれかのチームと 1 試合行う
・各試合日において，各会場で 1 試合ずつ開催される
・各チームとも各会場を高々 2 回使う

このような条件を満たすスケジュールは balanced tournament design (BTD) と呼ばれており，古くから組合せデザイン分野で研究されている．表 1 は $2n = 6$ チームに対する BTD の例である．BTD は $2n \geq 6$ のすべての偶数チームに対して存在することが知られている [5–7]．

BTD には多くのバリエーションがあるが，中でも Hamilton path tournament design (HPTD) とは，各会場における対戦をチームを頂点とするグラフの辺とみなしたとき，すべての頂点を通るパス，すなわちハミルトン路が得られるような BTD のことである．表 2 は 8 チームに対する HPTD の例である．HPTD の存在は n が $3, 5$ いずれでも割り切れない奇数のときと n が 2 の冪乗のときに示されている [8, 9]．予想としては，$2n \geq 8$ のすべての偶数に対して存在すると言われているが，$2n = 10, 18$ などの比較的小さな値を除いて，上記の場合以外は未解決である．ここでは BTD や HPTD の作成において基本となる circle method とその本質である starter について少しだけ説明する．

Circle method は歴史が古く，Lucas [10] や Kirkman [11] による論文が発表されている．最も原始的な circle method は，会場を考えない偶数チームに対する総当たりの対戦日程を作成する方法であり，以下のように説明できる（図 1 参照）．まず円を描き，円周上に等間隔に $2n-1$ 点をとって，1 から $2n-1$ の番号をふる．さらに，円の中心には番号 $2n$ の点もとる．

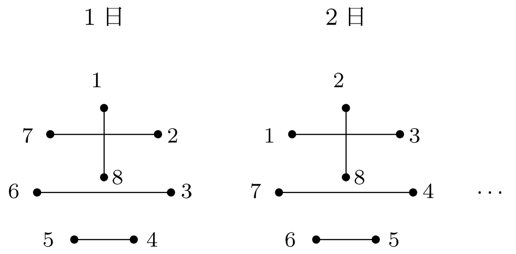

図 1　8 チームに対する circle method

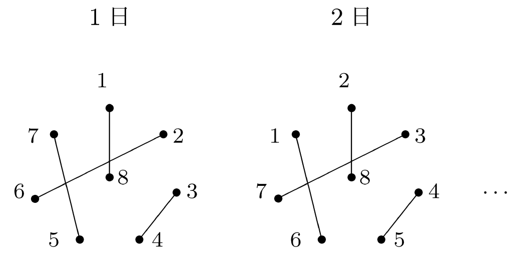

図 2　8 チームに対する Starter $\{(2,6),(3,4),(5,7)\}$

表 3　図 1 が生成する対戦日程

	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日	7 日
1	8	3	5	7	2	4	6
2	7	8	4	6	1	3	5
3	6	1	8	5	7	2	4
4	5	7	2	8	6	1	3
5	4	6	1	3	8	7	2
6	3	5	7	2	4	8	1
7	2	4	6	1	3	5	8
8	1	2	3	4	5	6	7

表 4　図 2 の starter が生成する対戦日程

	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日	7 日
1	8	6	4	3	7	2	5
2	6	8	7	5	4	1	3
3	4	7	8	1	6	5	2
4	3	5	1	8	2	7	6
5	7	4	6	2	8	3	1
6	2	1	5	7	3	8	4
7	5	3	2	6	1	4	8
8	1	2	3	4	5	6	7

次に，和が $2n+1$ になる $n-1$ 対の点同士を平行な線で結び，それと 1 と $2n$ も線で結んで合わせたものを 1 日の対戦とする．2 日以降は，順に円周上の番号を回転させて作成する．この結果，得られる対戦日程を表 3 に示す．Circle method という名前が付いた理由は明らかであろう．最初の $n-1$ 本の平行線の集合は，組合せデザインの世界では patterned starter と呼ばれるものに相当する．

Patterned starter はシンプルながら応用範囲は多く，チーム数 $2n$ が 3 の倍数 $+1$ 以外の場合の BTD の作成 [7, 12] のほか，ホーム＆アウェイ方式のリーグ戦作成で多くの応用をもつ．

Circle method における patterned starter は，$2n-1$ 回の回転によってうまい具合に総当り戦が組めるような性質になっている．その本質は以下の性質によるものである．

1 日目の対戦において，平行線で結ばれた $n-1$ 組のペアを F とする．図 1 においては $F=\{(2,7),(3,6),(4,5)\}$ となる．F に属する各ペア (x,y) に対して二つの差 $x-y,\ y-x$ を求めると（負の値になったときには $2n-1$ を加える）

$$
\begin{aligned}
7-2&=5, \quad 2-7+(2n-1)=-5+7=2\\
6-3&=3, \quad 3-6+(2n-1)=-3+7=4\\
5-4&=1, \quad 4-5+(2n-1)=-1+7=6
\end{aligned}
$$

となり，すべて値が異なる．円周上の数字を $2n-1$ 回回転させても，線で結ばれた対戦に繰り返しが生じないのはこのためである．このような性質をもつ $n-1$ 本の線の組は starter と呼ばれ，多く存在する．$2n=8$ の場合には 3 種類あるが，$2n=16$ に対しては 631 種類，$2n=32$ について およそ 145 億種類あることが知られている．$2n=8$ の場合には，図 2 に示す線の集合 $F=\{(2,6),(3,4),(5,7)\}$ はそのような例である．この starter から生成される対戦日程は表 4 のとおりである．

$$
\begin{aligned}
6-2&=4, \quad 2-6+(2n-1)=-4+7=3\\
4-3&=1, \quad 3-4+(2n-1)=-1+7=6\\
7-5&=2, \quad 5-7+(2n-1)=-2+7=5
\end{aligned}
$$

Starter には，多くの種類があり，たとえば $2,3,\ldots,2n-1$ の $n-1$ 組への分割 F において，性質「すべての $(x,y)\in F$ に対して $x+y$ を $2n-1$ で割った余りがすべて異なり，いずれも 0 に等しくない」が成り立つならば strong starter と呼ぶ．n が $3,5$ で割り切れない奇数の場合における HPTD の存在証明 [8] は特殊な strong starter である skew strong starter の存在を利用している．また，詳しくは述べないが，carry-over-effect と呼ばれる量を最小化する対戦日程の作成でも特別な性質を満たす starter が用いられたり [13]，ブレイク数が最小のスケジュール作成 [14] や

巡回トーナメント問題の近似解の構成においても使われている．

自身の研究に話を戻すと，HPTD に関連する研究を行い，なんとか結果が出せた [9, 15] ことで研究者としての喜びを味わい，「立ち直る」ことができたように思う．n が $2, 3, 5$ を約数にもつ場合の HPTD の存在証明はときどき追っている夢である．

ここで紹介した BTD や HPTD はスポーツスケジューリングの片隅に位置する概念に過ぎない．スポーツスケジューリング分野全体に関しては，文献に関する詳細なウェブページ [16] やサーベイ [2, 17, 18] など，さまざまな資料があるので，興味のある方はそちらを参照していただきたい．

5. おわりに

ここまで負の部分も含めた自身の紹介になったが，やはり研究者になってよかった，と思っている．さまざまな苦労があったが，それと同時に多くの方に助けていただき，そのおかげで今の自分がいるものと感謝している．

現在はスポーツスケジューリングの研究をしつつ，ほかの分野にも挑戦をしながら（相変わらず遅々とした）研究生活を送っているところである．

本稿が若い方のご参考に，あるいは同じような苦労をされているベテランの方の励みになれば幸いである．

参考文献

[1] G. L. Nemhauser and M. A. Trick, “Scheduling a major college basketball conference,” *Operations Research*, **46**, pp. 1–8, 1998.

[2] 宮代隆平，“スポーツスケジューリング問題—近年の発展—，” 第 19 回 RAMP シンポジウム予稿集，pp. 45–59, 2007.

[3] M. A. Trick, Challenge traveling tournament instances, http://mat.gsia.cmu.edu/TOURN（2016 年 5 月 10 日閲覧）

[4] S. Imahori, T. Matsui and R. Miyashiro, “A 2.75 approximation algorithm for the unconstrained traveling tournament problem,” *Annals of Operations Research*, **218**, pp. 237–247, 2014.

[5] E. Gelling and R. Odeh, “On 1-factorizations of the complete graph and the relationship to round robin tournaments,” In *Proceedings of 3rd Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing*, pp. 213–221, 1973.

[6] P. J. Schellenberg, G. H. J. van Rees and S. A. Vanstone, “The existence of balanced tournament designs,” *ARS Combinatorica*, **3**, pp. 303–318, 1977.

[7] E. R. Lamken, “Balanced tournament designs,” *Handbook of Combinatorial Designs*, 2nd edition, C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (eds.), Chapman & Hall/CRC, pp. 333–336, 2006.

[8] J. D. Horton, “Hamilton path tournament designs,” *ARS Combinatorica*, **27**, pp. 69–74, 1989.

[9] Y. T. Ikebe and A. Tamura, “Construction of hamilton path tournament designs,” *Graphs and Combinatorics*, **4**, pp. 1–9, 2011.

[10] E. Lucas, “Sixième récréation: Les jeux de demoiselles,” *Récréation Mathématiques Gauthier-Villars*, **2**, pp. 161–197, 1883.

[11] T. P. Kirkman, “On a problem in combinations,” *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, **2**, pp. 191–204, 1847.

[12] J. Haselgrove and J. Leech, “A tournament design problem,” *American Mathematical Monthly*, **84**, pp. 198–201, 1977.

[13] I. Anderson, “Balancing carry-over effects in tournaments,” *Combinatorial Designs and Their Applications, Research Notes in Mathematics*, Vol. 403, F. C. Holroyd, K. A. Quinn, C. Rowley and B. S. Webb (eds.), Chapman & Hall/CRC, pp. 1–16, 1999.

[14] D. de Werra, “Graph, geography and games,” *Discrete Applied Mathematics*, **2**, pp. 327–337, 1980.

[15] Y. T. Ikebe and A. Tamura, “On the existence of sports schedule with multiple venues,” *Discrete Applied Mathematics*, **156**, pp. 1694–1710, 2006.

[16] S. Knust, Classification of literature on sports scheduling, http://www2.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/sportssched/sportlist_class（2016 年 5 月 10 日閲覧）

[17] R. V. Rasmussen and M. A. Trick, “Round robin scheduling—a survey,” *European Journal of Operational Research*, **188**, pp. 617–636, 2008.

[18] G. Kendall, S. Knust, C. C. Ribeiro and S. Urrutia, “Scheduling in sports: An annotated bibliography,” *Computers and Operations Research*, **37**, pp. 1–19, 2006.

