

下方リスクを考慮した多期間最適執行戦略モデル

竹延 俊一, 枇々木 規雄

1. はじめに

生命保険会社や年金基金などの機関投資家は、ポートフォリオのリバランスなどの際に大量の株式売買を行う。注文量が非常に大きい場合、市場の需給バランスを崩し、マーケット・インパクトを引き起こす。マーケット・インパクトは機関投資家にとって大きな執行コストであり、できる限りこれを抑えて注文を執行する必要がある。一般的に、その抑制には注文を小口に分割して執行することが有効とされるが、分割によって一時的に残される未執行の注文量は株価変動リスクに晒される。これは、タイミング・リスクと呼ばれ、マーケット・インパクトとトレード・オフの関係をもつ執行コストとして知られている。Almgren and Chriss [1] を始めとする多くの先行研究では、このトレード・オフ関係を最適化問題として定式化し、執行コストを最小にする注文方法（以下、最適執行戦略）を導出している。

不確実な株価変動のもとで、執行コストを抑えて取引を行うためには、多期間にわたる動的執行戦略の決定を明示的にモデル化する必要がある。この問題に対して、先行研究で多く用いられているアプローチは、連続時間・連続分布のもとでモデルを記述し、ベルマン方程式によってモデル化を行う方法である。Schied and Schoneborn [2] では、いくつかの仮定のもとで解析解を導出している。一方、He and Mamaysky [3] や Forsyth et al. [4] などでは、シミュレーションによって数値解を導出している。しかし、これらのアプローチでは実務的な制約を含めることは難しい。一方、Krokmal and Uryasev [5] は実務的な制約を含めることができるように離散時間・離散分布のもとでモデル

を記述し、混合型最適化モデル [6, 7] を用いて数値解を導出するアプローチを提案している。具体的には、モンテカルロ・シミュレーションによって発生させたパスで不確実性を記述し、各離散時点でパス（状態）をグルーピングすることで、ある程度、状態に依存した条件付き意思決定が可能なモデルを構築している。

実務においては証券会社がある執行コスト（ターゲット・コスト）で機関投資家（年金基金など）から株式の売却を請け負うことが多い。その場合も執行コストがターゲット・コストを上回ることがリスクとして認識されることになる。本研究では、実務で使うことができるように、下方リスク尺度として1次の下方部分積率（LPM）を用いた動的最適執行戦略モデルを構築する。最適執行戦略問題において、下方リスク尺度（下方部分積率）を考慮したモデルは、筆者たちの知る限り、存在しない。ただし、LPMを用いた多期間ポートフォリオ最適化問題では、状態に依存した意思決定が最適となる [8, 9]。そのため、最適執行戦略問題においても同様なモデル化をする必要がある。

本研究では、まずはじめに、状態に依存した意思決定が可能な混合型最適化モデルで定式化し、問題を解く方法を示す。ただし、混合型モデルは意思決定を状態変数の階段関数で想定するため、ノード数が少ない場合、状態変数の値が少し違うだけで、大きく意思決定を変えてしまう可能性がある。一方、状態の違いに応じて厳密に意思決定をするためにノード数を増やすと、計算負荷が大きくなるという問題点も存在する。そこで、この問題点を解消するために、多期間ポートフォリオ最適化モデルにおいて、上述の二つのアプローチのアイデアを融合した高屋と枇々木 [10] の考え方を応用した最適執行戦略モデルを構築する。具体的には、解析解のように状態依存の意思決定が可能な区分線形（線形近似）モデルとして定式化を行い、問題を解く。

先行研究との比較を表 1 に示す。

本研究の主な貢献は以下の 2 点である。

(1) 下方リスクモデルに対する最適解の導出

目的関数として、期待執行コストと LPM の加重和を設定し、混合型モデルを用いて最適解の特徴を明ら

たけのぶ しゅんいち

本稿は慶應義塾大学大学院理工学研究科に所属していたときに行われた研究内容をもとにしたものである。

ひびき のりお

慶應義塾大学理工学部

〒 223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1

hibiki@ae.keio.ac.jp

受付 14.6.2 採択 16.3.22

表 1 動的最適執行戦略に関する先行研究と本研究の比較

	Schied and Schoneborn (2009) 他	Krokmal and Uryasev (2007)	本研究
アプローチ	ベルマン方程式	確率計画法 (混合型モデル)	確率計画法 (区分線形モデル)
執行間隔	連続時間	離散時間	離散時間
目的関数	期待効用最大化, 分散最小化など	ペイオフ最大化	期待執行コストと LPM の加重最小化
不確実性の記述	○	○	○
意思決定の柔軟性	○	△	○
制約式	×	○	○

かにした¹。さまざまな分析の結果、最適解となる残存注引量が累計執行コストの水準に対し、ある値（本研究では、区分中心点と呼ぶ）で最小となり、その境から離れるほど大きくなり、累計執行コストの大きいときと小さいときには残存注引量がフラットになるショートパタフライ型（以降、SB型）²の形状となること、さらに区分中心点がターゲットコストを調整した値であることなど、関数形のいくつかの特徴を見いだした。また、区分中心点の導出には理論的な解析モデルから得られた知見を応用した。本研究の結果は最適執行戦略の領域においても、多期間ポートフォリオ最適化問題 [8-11] と同様に、リスク尺度に応じて状態変数に依存して最適解を導くことができることを示している。

(2) 状態依存関数による動的最適執行戦略の提案

混合型モデルによる分析結果と先行研究を参考に、混合型モデルを修正し、累計執行コストの水準に対して残存注引量がSB型の形状となる区分線形モデルを構築した。このモデルにより、累計執行コストの変化に対して残存注引量を階段状ではなく、区分線形的に変化させることが可能になり、状態に依存し柔軟な意思決定を行う最適執行戦略を導出できるとともに、精度を保ちながら区分数を減らして計算負荷を小さく抑えることができる。本研究では、さまざまな数値分析を行い、モデルの特徴と有用性を明らかにする。

本稿の構成は以下のとおりである。2節で、実務において直面する問題の設定を行う。次にLPMをリスク尺度として用いる多期間最適執行戦略モデルとして、3節で混合型モデル、4節では区分線形モデルを示し、区分中心点を導出する方法も示す。5節では数値分析を行う。基本ケースに対する分析、2種類のパラメータに対する感度分析、さまざまな期間数に対する分析

などを行い、その特徴を明らかにする。最後に6節で、まとめと今後の課題を述べる。

2. 問題設定

本研究では、問題としての取り扱いやすさから、Almgren and Chriss [1] と Lorenz and Almgren [12] を参照して、実務において直面する問題設定を行う。機関投資家が、ある一つの銘柄 X 株を満期 T までにすべて売却しなければならない状況を想定する。なお、ここでは初期時点 0 から、満期 T までの時間を均等に K 分割し、期間 $\tau (= T/K)$ ごとに等間隔で、どの程度成行注文を入れるかを決める。離散的に分割されたそれぞれの時点は $k\tau (k = 0, \dots, K)$ であるが、以降、時点 k と定義する。また、毎時点の残存注引量を x_k とし、 $x_0 = X, x_K = 0$ と置く。すなわち、時点 0 から時点 1 の期間には、 $x_0 - x_1$ の注引量が執行されることになる。時点 1 以降も同様な考え方で注文が執行され、時点 $k-1$ から時点 k の期間の単位時間当たり平均取引率は $\nu_k = (x_{k-1} - x_k)/\tau$ として定義される。

2.1 株価過程

想定する株式のファンダメンタル価格は、ブラウン運動に従うと仮定する³。しかし、取引主体の機関投資家によって売買が行われた場合、株価過程はマーケット・インパクトの影響を受ける。ここでは、一時的に発生してその影響がすぐに消える一時的マーケット・インパクト $h(\nu)$ と恒久的に影響が残る恒久的マーケット・インパクト $g(\nu)$ が存在すると仮定する。どちらも単位時間当たり平均取引率 ν_k の関数であり、注引量が大きいほど大きく発生し、恒久的マーケット・インパクトはその後の株価過程に影響を残し続ける。

恒久的マーケット・インパクトの影響を加味した株価過程を (1) 式に示す。

$$P_k = P_{k-1} + \sigma\sqrt{\tau}\xi_k - \tau g(\nu_k) \quad (1)$$

ここで、 ξ_k は、i.i.d. で、標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である。また、 σ は株価のボラティリティを示し、期間 τ の株価変動の分散は $\sigma^2\tau$ で表される。また、注文を入れた直後は、一時的マーケット・インパクトにより、一時的に P_{k-1} から \tilde{P}_k に推移する。ただし、その次の時点の P_k には影響を及ぼさない。

¹ Hirano and Hibiki [11] では、状態依存関数の形状の予想に、混合型モデルを用いることの有効性を示している。

² オプション取引戦略の「パタフライスプレッドの売り」のペイオフ関数と似ているので、このように呼ぶことにする。

³ 短期間においては価格過程が幾何ブラウン運動であっても算術ブラウン運動であっても大差がないと考えられる。その一方で、算術ブラウン運動のほうが数学的に取り扱いやすいため、最適執行戦略問題においては株価そのものが正規分布に従っていると仮定している。

$$\tilde{P}_k = P_{k-1} - h(\nu_k) \quad (2)$$

2.2 執行コストの定義

本研究では売却を想定するので、執行コストは「初期時点の株価ですべて執行できた場合の執行価額」から「実際の執行価額」を引いた値で定義する。また、一時的マーケット・インパクトと恒久的マーケット・インパクトが、共に ν に対して線形で発生すると仮定し、それぞれ、 $h(\nu) = h_0\nu$, $g(\nu) = g_0\nu$ と表す。その場合、全期間の合計執行コストは (3) 式で表すことができる。

$$\begin{aligned} TC &= X P_0 - \sum_{k=1}^K (x_{k-1} - x_k) \tilde{P}_k \\ &= \frac{g_0 X^2}{2} + \tau \eta \sum_{k=1}^K \nu_k^2 - \sigma \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^{K-1} \xi_k x_k \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $\eta = h_0 - \tau g_0/2$ である。(3) 式の右辺の第 1 項は定数なので除外し、残った部分の執行コスト分を C_K としよう。それに対する時点 k までの累計執行コストを C_k とした場合、(4) 式のように表せる。

$$C_k = C_{k-1} + \frac{\eta}{\tau} (x_{k-1} - x_k)^2 - \sigma \sqrt{\tau} \xi_k x_k \quad (4)$$

右辺の第 2 項はマーケット・インパクト、第 3 項はタイミング・リスクを表す⁴。

2.3 標準化

パラメータの数を減らすために標準化を行う。(4) 式の両辺に $\frac{1}{\sigma \sqrt{TX}}$ を掛け、(5) 式のように書き換える。

$$\hat{C}_k = \hat{C}_{k-1} + \mu K (\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k)^2 - \xi_k \hat{x}_k / \sqrt{K} \quad (5)$$

ただし、 $\hat{C}_k = \frac{1}{\sigma \sqrt{TX}} C_k$, $\hat{x}_k = x_k / X$, $\mu = \frac{\eta X / T}{\sigma \sqrt{T}}$ 。

以上の標準化により、必要なパラメータは K と μ のみとなる。ここで、 μ はマーケット・パワーと呼ばれるパラメータを表す。均等配分で執行したときのマーケット・インパクトを満期までのボラティリティで除した値であり、取引主体である機関投資家のマーケットにおける影響力を表すものといえる。また、以降は標準化した問題のみを取り扱うので、記号の上のハッ

ト記号 () を除外した形式で記載する。標準化された累計執行コスト C_K は (5) 式より (6) 式で計算できる。

$$C_K = \sum_{k=1}^K \mu K (x_{k-1} - x_k)^2 - \sum_{k=1}^{K-1} \xi_k x_k / \sqrt{K} \quad (6)$$

2.4 問題の定式化

最終時点の累計執行コストがあるターゲット・コスト C_G の水準を上回ることをリスクと考え、その平均値 (1 次の LPM) をリスク尺度として用いる。最終時点までの期待累計執行コスト (\bar{C}_K) と累計執行コストの 1 次の LPM (LPM(C_K)) の加重和を目的関数とし、これを最小化する最適執行戦略問題は以下のように定式化することができる⁵。ここで、 γ はリスク回避係数を表し、決定変数は時点 k での残存注文量 x_k である。

$$\text{最小化} : z \equiv \bar{C}_K + \gamma \cdot \text{LPM}(C_K)$$

$$\text{制約} : 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{K-1} \geq 0 \quad (7)$$

C_K が正規分布に従うとき、ターゲットコスト C_G に対する LPM は (9) 式のように計算できる。

$$\text{LPM}(C_K) = \int_{C_G}^{\infty} (C_K - C_G) f(C_K) dC_K \quad (8)$$

$$= \left\{ G\Phi(G) + \phi(G) \right\} \sigma_C \quad (9)$$

ここで、 $f(\cdot)$ は正規分布の確率密度関数、 $G = \frac{\bar{C}_K - C_G}{\sigma_C}$ で、 $\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ はそれぞれ標準正規分布の確率密度関数、分布関数を表す。また、 \bar{C}_K , σ_C はそれぞれ C_K の期待値と標準偏差を表し、以下のように計算できる。

$$\bar{C}_K = \sum_{k=1}^K \mu K (x_{k-1} - x_k)^2, \quad \sigma_C^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K-1} x_k^2$$

2.5 N1 モデル

状態に依存しない意思決定を行う多期間最適化モデルとしてシミュレーション型モデル (枇々木 [13], N1 モデルと呼ぶ) がある。本項では、2.4 節で示した問題を N1 モデルで解き、最適解を導出する。この問題を解析的に解くことは難しいが、(9) 式を用いると短時間で数値解を得ることができる。表 2 に $K = 6$ の四つのケースに対する数値解を示す。

⁴ (4) 式では、第 3 項のタイミング・リスクの符号がマイナスとなっている。これは、 $\xi_k < 0$ のときに株価が下落し、リスクが顕在化するからである。

⁵ ほかに実務的な制約として、取引量に関する上限制約などが考えられる。

表 2 数値解

	基本ケース	ケース 1	ケース 2	ケース 3
γ	1	5	1	1
μ	0.1	0.1	0.2	0.1
C_G	0.1	0.1	0.1	0.2
x_1	0.7226	0.6113	0.7796	0.7187
x_2	0.5116	0.3707	0.5898	0.5064
x_3	0.3475	0.2199	0.4232	0.3426
x_4	0.2154	0.1224	0.2732	0.2116
x_5	0.1030	0.0546	0.1340	0.1010
\bar{C}_K	0.1135	0.1493	0.2066	0.1144
LPM	0.1665	0.1500	0.2387	0.1192
z	0.2800	0.8991	0.4454	0.2336
z (均等)	0.3013	1.1065	0.4672	0.2672

$\gamma = 0$ の場合には解析解を得ることが可能で、 $x_k = 1 - \frac{k}{K}$ となり、単純な均等配分 ($x_{k-1} - x_k = \frac{1}{K}$) が最適解となる。 $\gamma > 0$ の場合、タイミング・リスクを考慮するために、均等配分戦略に比べて残存注引量は小さくなる。各ケースを基本ケース、均等配分戦略と比べると、以下の結果が得られる。

(ケース 1) γ が大きくなると、タイミング・リスクを考慮するために、基本ケースに比べて残存注引量は小さくなる。 $\gamma = 0$ で均等配分戦略になる。

(ケース 2) μ が大きくなると、マーケット・インパクトを考慮するために、基本ケースに比べて残存注引量は大きくなる。 $\mu \rightarrow \infty$ で均等配分戦略になる。

(ケース 3) $\gamma = 1, \mu = 0.1$ の場合に残存注引量が最小となる C_G を計算すると、 $C_G = 0.38$ であり、その値から離れるほど残存注引量が大きくなる。 $C_G \rightarrow \infty$, もしくは $C_G \rightarrow -\infty$ の場合、累計執行コストのみで評価することになるので、均等配分戦略になる。

表 2 の最下行 (z (均等)) に均等配分戦略の目的関数値を示す。N1 モデルは、均等配分戦略に比べてよりよい解を導くことができることがわかる。しかし、一般的には意思決定は状態に依存するので、シミュレーション・パスを用いた確率計画モデルを用いて、解を求める必要がある。3 節以降、確率計画モデルである混合型モデル、および区分線形モデルを用いた最適執行戦略について議論する。

3. 混合型モデル

3.1 概要

混合型モデルは、シミュレーション・パスにより不確実性を表現し、各時点のパス (状態) をグルーピングしたノードごとにある程度、状態に依存した意思決

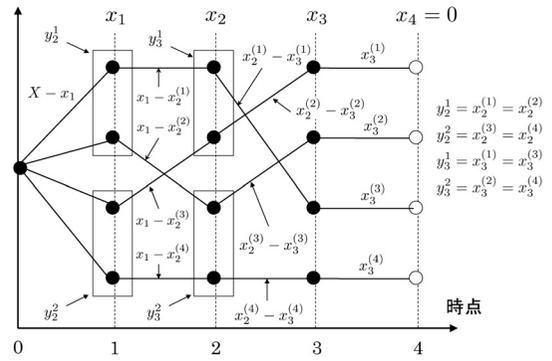


図 1 格子型構造における取引量

定を可能にしたモデルである。最適執行戦略問題では、株価変動やそれまでの自身の注文によって変化する累計執行コストを各時点で考慮して、グルーピングを行い、意思決定を行う。

本研究では、取引後の残存注引量を決定変数としてモデル化する。これは、3.4 節で示すように累計執行コストと残存注引量に関係性を見いだすことができたからである⁶。パス j の時点 k での残存注引量を $x_k^{(j)}$ とすると、期間 k の取引量は $x_{k-1}^{(j)} - x_k^{(j)}$ と記述できる。時点 $k-1$ のノード s で決定される時点 k での残存注引量を y_k^s とし、パス j が時点 $k-1$ でノード s に含まれるならば、 $x_k^{(j)} = y_k^s$ と記述できる。混合型モデルのノード構造として、格子型構造⁷を用いる場合の取引量の具体例を図 1 に示す。以降、ノード数 (区分領域数) が S の混合型モデルを NS モデルと呼ぶ。

3.2 定式化

2.4 節で示したモデルに基づき、定式化およびそれに用いる記号を以下に示す。

パラメータ

J : パス数 (以降、煩雑さを避けるために、($j = 1, \dots, J$) の記述は省略する)

K : 注文執行を行う期間数 ($k = 1, \dots, K$)

$\xi_k^{(j)}$: パス j , 期間 k の株価変化量 ($k = 1, \dots, K-1$)

S : 各時点のノード (区分領域) 数 ($s = 1, \dots, S$)

μ : マーケット・パワー

γ : リスク回避係数

C_G : ターゲット・コスト

⁶ ある時点の残存注引量は、その 1 時点前の残存注引量にも依存する可能性はある。紙面の都合上省略するが、分析の結果、その影響は小さいことがわかったため、1 時点前の累計執行コストのみに依存する関数として記述する。

⁷ ノード分けの構造にはツリー型構造と格子型構造が存在する。最適執行戦略の問題は一般的に期間数が多いため、本研究では格子型構造を採用する。

決定変数

x_1 : 時点 0 で決定される時点 1 での残存注文量

y_k^s : 時点 $k-1$ のノード s で決定される時点 k での残存注文量 ($s = 1, \dots, S; k = 2, \dots, K-1$)

$q^{(j)}$: パス j の最終時点の累計執行コストが C_G を上回る場合の偏差

中間変数

$x_k^{(j)}$: パス j , 時点 k での残存注文量 ($k = 2, \dots, K-1$)

$C_k^{(j)}$: パス j , 時点 k までの累計執行コスト ($k = 1, \dots, K$)

LPM(C_K) : 1 次の下方部分積率

定式化

$$\text{最小化 } \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J C_K^{(j)} + \gamma \cdot \text{LPM}(C_K) \quad (10)$$

制約

$$C_1^{(j)} = \mu K(1 - x_1)^2 - x_1 \xi_1^{(j)} / \sqrt{K} \quad (11)$$

$$C_2^{(j)} = \mu K(x_1 - x_2^{(j)})^2 - x_2^{(j)} \xi_2^{(j)} / \sqrt{K} + C_1^{(j)} \quad (12)$$

$$C_k^{(j)} = \mu K(x_{k-1}^{(j)} - x_k^{(j)})^2 - x_k^{(j)} \xi_k^{(j)} / \sqrt{K} + C_{k-1}^{(j)} \quad (k = 3, \dots, K-1) \quad (13)$$

$$C_K^{(j)} = \mu K(x_{K-1}^{(j)})^2 + C_{K-1}^{(j)} \quad (14)$$

$$C_K^{(j)} - q^{(j)} \leq C_G \quad (15)$$

$$\text{LPM}(C_K) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J q^{(j)} \quad (16)$$

$$q^{(j)} \geq 0 \quad (17)$$

$$x_2^{(j)} \leq x_1 \leq 1 \quad (18)$$

$$x_k^{(j)} \leq x_{k-1}^{(j)} \quad (k = 3, \dots, K-1) \quad (19)$$

$$x_{K-1}^{(j)} \geq 0 \quad (20)$$

(11)~(14) 式は累計執行コストの計算式, (15)~(17) 式は LPM の計算式, (18)~(20) 式は空買い禁止制約を表す. パス j の残存注文量 $x_k^{(j)}$ は, 時点 $k-1$ までの累計執行コストの大きさに応じて, (21) 式のように決定される.

$$x_k^{(j)} = \begin{cases} y_k^1 & (C_{k-1}^{(j)} \leq \theta_{k-1}^1) \\ y_k^s & (\theta_{k-1}^{s-1} \leq C_{k-1}^{(j)} \leq \theta_{k-1}^s, \\ & s = 2, \dots, S-1) \\ y_k^S & (C_{k-1}^{(j)} \geq \theta_{k-1}^{S-1}) \end{cases} \quad (k = 2, \dots, K-1) \quad (21)$$

ここで, θ_{k-1}^s は領域 (ノード) を分ける累計執行コストの分割点を表す. 累計執行コストは残存注文量の関数であるため, パスの集合を同時に決定する非凸非線

形計画問題となり, この問題を解くのは難しい.

3.3 反復アルゴリズム

この問題を解くために, Hibiki [7] の方法を適用し, 反復的に得られる累計執行コストをパラメータとして利用することで, 近似解を得るためのアルゴリズムを示す. 問題を解く具体的な手順は以下のとおりである.

(手順 1) N1 モデルで問題を解く (1 回目). $m = 2$ とする.

(手順 2) $m-1$ 回目の計算によって得られた累計執行コスト $C_{k(m-1)}^{(j)*}$ と $\theta_{k-1(m-1)}^{s*}$ を用いて残存注文量を (21) 式のように各ノードに割り当て, NS モデルで問題を解く (m 回目)⁸.

(手順 3) 得られた目的関数値・最適解とそれぞれの $m-1$ 回目の値の差が許容範囲内であれば, 終了する. さもなければ, $m \rightarrow m+1$ とし, 手順 2 に戻る.

3.4 状態依存関数の形状の推定

ノード数が多い混合型モデルで分析を行い, 状態依存関数の形状を推定する. 累計執行コストの水準と残存注文量の関係性を調べるために, $J = 50,000$ (本), $K = 6$ (期間), $S = 25$ (ノード) の設定で, 表 2 の 4 ケースについて分析を行う. 各ノードのパス数は $J/S = 2,000$ (本) である. 各時点の累計執行コスト C_{k-1} と残存注文量 x_k の関係を図 2 に示す⁹.

図 2 より最適解となる残存注文量は, どのケースもある累計執行コストの水準 (区分中心点) を境に, SB 型の形状となることが確認できる. 目的関数に下方リスク尺度を含む多期間ポートフォリオ最適化問題でも, 最適解となる投資比率が富の水準に対して V 字の形状となる結果が確認されており, 区分中心点の近くにおいては同様の結果が得られている.

SB 型の形状を累計執行コストの大きさに四つの領域に分けて, その形状となる理由を説明する.

[領域 A : 区分中心点以下で累計執行コストにかかわらず残存注文量が同じ部分] 累計執行コストが小さい (区分中心点から離れる) ほど, 最終時点でも下方リスクが発生する可能性が低くなり, 期待値のみで評価されるようになる. 目的関数値が累計執行コス

⁸ 問題を解いた結果得られた $C_{k(m)}^{(j)*}$ が, パラメータとして用いた $C_{k(m-1)}^{(j)*}$ と同じ値になれば, パスの集合も同時に決定するもとの問題を解けたことになる. ただし, 実際には難しいので, 手順 3 のような終了条件を設定する.

⁹ 時点 1 の残存注文量 x_1 はパスに依存せず, 時点 0 の累計執行コストはゼロ ($C_0 = 0$) であるので, 0 の値のところにプロットされている.

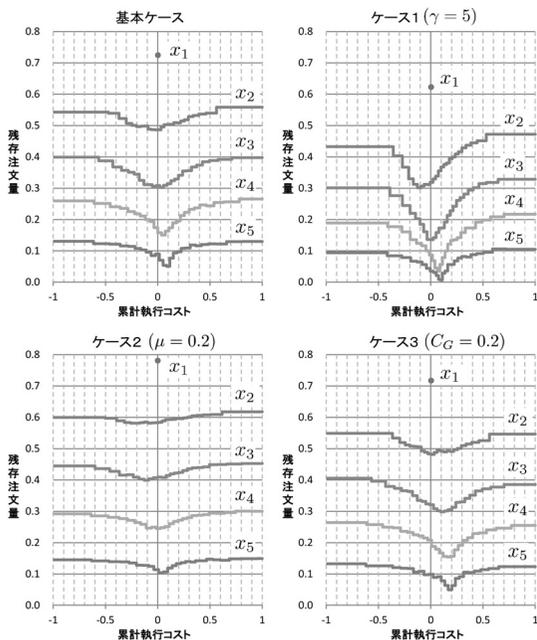


図2 累計執行コストと残存注文量の関係

トの期待値の場合、最適解はコストの大きさにかかわらず一定となる（関数の形状はフラットになる）。

領域 B：区分中心点以下で、累計執行コストの増加につれて残存注文量が小さくなる部分] 累計執行コストが区分中心点に近づくにつれ、リスク発生の可能性が高まる。コントロールが難しいタイミング・リスクの増加を防ぐため、ある程度のマーケット・インパクトを許容して、積極的に注文を増やす（残存注文量が小さくなる）。

領域 C：区分中心点以上で、累計執行コストの増加につれて残存注文量が大きくなる部分] 累計執行コストが区分中心点より大きい場合、平均的には最終時点でリスクが発生する可能性が高い。そこで、区分中心点から大きく離れるにつれ、アップサイドへの株価変動による累計執行コストの回復（減少）を目指して、残存注文量を多くする戦略をとる。

領域 D：区分中心点以上で累計執行コストにかかわらず残存注文量が同じ部分] 累計執行コストが大きい（区分中心点から離れる）ほど、最終時点でリスク発生の可能性が大きく、 $LPM(C_K) = E[\max(C_K - C_G, 0)] \approx E(C_K) - C_G$ となり、目的関数は期待値で評価されるようになる。したがって、領域 A と同様に関数の形状はフラットになる。

その他の特徴を以下にまとめる。

1. $\gamma = 1$ では、領域 A と領域 D の残存注文量の大き

さはほぼ同じであるが、 γ が大きくなると、領域 D の残存注文量は領域 A よりも大きくなる。この理由は、多くの残存注文量を残して積極的にタイミング・リスクを取り、執行コストをできるだけ小さくするためである。

2. γ が大きくなると、タイミング・リスクを回避するため、残存注文量は全体的に小さくなるだけでなく、区分中心点においても、より小さくなる。
3. μ が大きくなると、マーケット・インパクトのほうがタイミング・リスクに比べて相対的に大きくなるため、それを回避するために残存注文量は大きくなる。一方、期待累計執行コストの影響が相対的に大きくなるので、形状はフラットに近くなる。
4. 残存注文量に対して γ と μ は反対の影響を与える。
5. C_G が大きくなると、相対的にリスクを取れるので、累計執行コストの区分中心点も大きくなる。
6. 時間経過とともに累計執行コストの区分中心点は大きくなる。 x_{K-1} の区分中心点は C_G の値に近いが、 γ が大きくなると、早い時点の区分中心点はより小さくなる。この理由は、執行コストがターゲット・コストを上回るリスクを小さくするためである。
7. 時間経過とともに形状はフラットから V 字の大きい SB 型となり、最終時点で近づくにつれて、再びフラットに近くなる。早い時点ではアップサイドへの株価変動を期待し、区分中心点での残存注文量を多くして積極的にタイミング・リスクを許容するが、マーケット・インパクトとのバランスを考えて、徐々に区分中心点での残存注文量を減らしていく。ただし、最終時点での残存注文量は 0 になるので、徐々にフラットになっていく。

4. 区分線形モデル

4.1 概要

ノード数が多い混合型モデルを用いた分析の結果、時点 $k-1$ までの累計執行コストに対し、時点 k の残存注文量が SB 型の形状で表すことができることを見いだした。しかし、混合型モデルは意思決定を状態変数の階段関数で想定するため、ノード数が少ない場合には SB 型の形状をうまく記述できない。その一方、SB 型の形状を記述するためにノード数を多くすると計算負荷が大きくなるという問題点が生じる。そこで、本研究では混合型モデルを修正し、SB 型の形状を関数として表現した区分線形モデルを構築する。累計執行コ

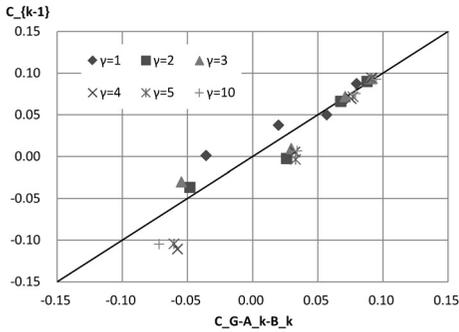


図3 さまざまな γ に対する区分中心点の関係

ストの変化に対して残存注水量を階段状ではなく、区分線形的に変化させて、最適な執行戦略を導出できるとともに、精度を保ちながら区分数を減らして計算負荷を小さく抑えることが期待できる。

時点 $k-1$ までの累計執行コストの区分中心点はおおよそターゲットコスト C_G から、以下に示す時点 k 以降に発生する期待累計執行コスト A_k とリスク調整項 B_k を引いた値となることを確認した。これは、時点ごとのリスク調整済みターゲット・コストを表す。 γ が大きくなると、 B_k も大きくなるので、 B_k をリスク調整項と呼ぶ。詳細は付録 A を参照されたい。 A_k と B_k を求める具体的な計算式は以下のとおりである。

$$A_k = \bar{C}_K^* - \bar{C}_{k-1}^* \quad (k = 2, \dots, K-1) \quad (22)$$

$$\text{ただし, } \bar{C}_k^* = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J C_k^{(j)*}$$

$$B_k = b_k x_k^{\min} u \quad (k = 2, \dots, K-1) \quad (23)$$

$$b_k = \frac{1}{x_k^{\min} \sqrt{K}} \sqrt{\sum_{t=k}^{K-1} (x_t^{\min})^2} \quad (24)$$

$$u = \frac{\phi(u)}{1 + 1/\gamma - \Phi(u)} \quad (25)$$

ここで、 x_k^{\min} は区分中心点における残存注水量である。 u は (25) 式を満たす値を数値計算で求める。区分中心点 $(C_{k-1}(x_k^{\min}))$ を縦軸、 $C_G - A_k - B_k$ を横軸として、6種類の γ に対して、6期間の混合型 N25 モデルによって得られた値 (γ ごとに $k = 2, \dots, 5$ の4点) の関係を図3に示す。

各点が45度線上にプロットされており、近い値が得られていることがわかる。また、紙面の都合で省略したが、 μ や C_G を変えても同様の結果が得られた。したがって、 $C_G - A_k - B_k$ を累計執行コストの区分中心点としてモデルを構築する。

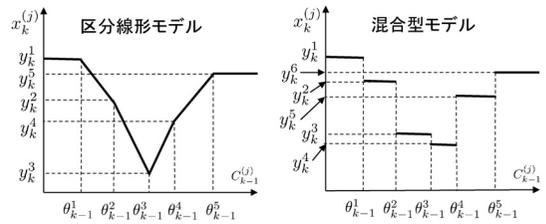


図4 区分線形モデルと混合型モデル

4.2 定式化

四つの領域に区分した場合の区分点の数は3個であるが、一般化して図4の左図のように各区分点に対する残存注水量を決定変数として、関数を記述する。右図は (21) 式を図示したものである。以降、区分領域数が S (区分点は $S-1$ 個) の区分線形モデルを PS モデルと呼ぶ。図4は P6 モデル、N6 モデルの例である。

パス j の残存注水量 $x_k^{(j)}$ は、時点 $k-1$ までの累計執行コストに応じて、(26) 式のように決定される。

$$x_k^{(j)} = \begin{cases} y_k^1 & (C_{k-1}^{(j)} \leq \theta_{k-1}^1) \\ (1 - \alpha_k^{(j)}) y_k^{s-1} + \alpha_k^{(j)} y_k^s & (\theta_{k-1}^{s-1} \leq C_{k-1}^{(j)} \leq \theta_{k-1}^s, \\ & s = 2, \dots, S-1) \\ y_k^{S-1} & (C_{k-1}^{(j)} \geq \theta_{k-1}^{S-1}) \end{cases} \quad (k = 2, \dots, K-1) \quad (26)$$

ここで、

$$\alpha_k^{(j)} = \frac{C_{k-1}^{(j)} - \theta_{k-1}^{s-1}}{\theta_{k-1}^s - \theta_{k-1}^{s-1}}, \quad (k = 2, \dots, K-1)$$

である。混合型モデルと区分線形モデルの定式化上の違いは、残存注水量の $x_k^{(j)}$ を表す式が異なるだけである。混合型モデルと同様に、4.3 節で示す反復アルゴリズムを用いて問題を解くことができる。時点2以降の各時点の残存注水量に関する決定変数の数は区分点の数と同じで $S-1$ 個である。区分線形モデルは少ない区分領域数でも滑らかに残存注水量を変化させることによって、小さい規模の問題で同等の結果を得ることが期待できる。

4.3 反復アルゴリズム

混合型モデルと同様に、反復的に問題を解く。3.3 節の手順と異なる手順2のみ、以下に示す。

(手順 2) $m - 1$ 回目の計算によって得られた累計執行コスト $C_{k-1(m-1)}^{(j)*}$ と $\alpha_{k(m-1)}^{(j)*}$, $\theta_{k-1(m-1)}^{s*}$ を用いて残存注文量を (26) 式のように時点 k のパス j に割り当て、区分線形モデルで問題を解く (m 回目)¹⁰.

5. 数値分析

数値分析を通して、区分線形モデルの最適解の特徴を明らかにする。まずはじめに、基本ケースに対して異なる区分領域数に対する問題を解き、混合型モデルとの比較も含め、分析結果を示す。さらに、パラメータ μ と γ に対する感度分析や期間数 K に関する分析を行う。計算機は Hewlett Packard, HPE-390jp, Core i7-930, 2.80 GHz, 24 GB メモリを用い、数理計画ソフトウェアは Numerical Optimizer Ver.16.1 ((株) NTT データ数理システム社) を用いる。

5.1 基本設定

基本ケースのパラメータ $\gamma = 1$, $\mu = 0.1$, $C_G = 0.1$ (表 2 の基本ケースと同じ), $J = 50,000$, $K = 6$ 反復計算の回数 混合型モデル, 区分線形モデルともに, N1 モデル (2.5 節) で問題を解いた後, 3 回反復計算を行うと, 目的関数値・最適解は十分収束することが確認された。

区分方法 区分領域数は各時点ですべて同一とし, 9 種類 ($S = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24$) 設定し, 以下の方法で区分を行う。

- 混合型モデル: 各領域のパス数は同一とする (J/S が整数でない場合には調整する)。
- 区分線形モデル: $C_G - A_k - B_k$ を区分中心点とし, それを境に区分領域数を対称にする。区分領域数は両端のフラット部分 (領域 A, 領域 D) に含まれるパス数はそれぞれ αJ (例: $\alpha = 0.04$ のとき, 2,000 本) とし, それ以外のパスを区分中心点で分割した後の各領域のパス数は同一とする。ただし, $S = 2$ の場合には両端のフラット部分がない V 字型 (領域 B と C のみ) とする。

5.2 基本分析

表 2 の基本ケースとケース 1 に対し, 区分線形モデルで問題を解いたときの最適残存注文量を図 5 に示す。混合型モデル ($S = 25$) に対する図 2 の上 2 枚と比較すると, ほぼ同じ結果が得られることがわかる。

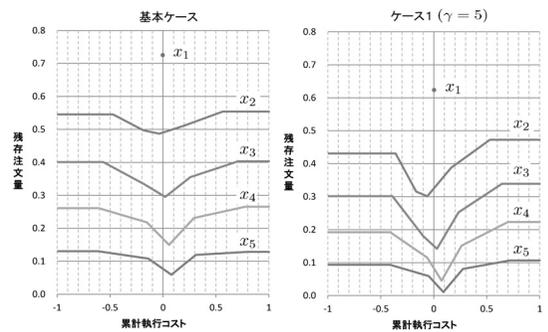


図 5 最適残存注文量

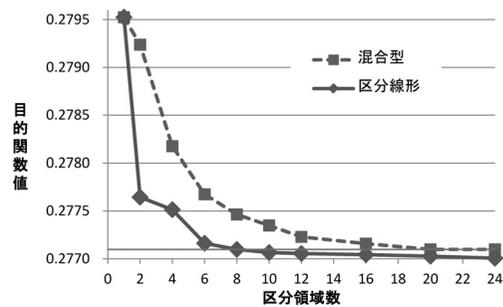


図 6 目的関数値

区分領域数 S を変えたときの目的関数値の推移を図 6 に示す。 $S = 1$ は N1 モデルを表す。 S が大きくなるにつれて目的関数値は小さくなるが, 徐々にその差は小さくなり, 区分線形モデルは少ない区分領域数でも目的関数は小さくなりやすいことがわかる。この結果, 区分線形モデルは混合型モデルに比べて, 決定変数の少ない規模の小さい問題を解けばよく, 目的関数値がほぼ同じである P6 モデルと N16 モデル, P8 モデルと N24 モデルを比較すると, 計算時間は約 35% に減らすことができる¹¹。

5.3 両端フラット部分の区分点の分析

領域 A と B, 領域 C と D のそれぞれの適切な区分点は区分領域数によって, 影響を受ける可能性がある。そこで, P4, P6, P8 モデルに対して, 異なる α を設定して問題を解いた場合の目的関数値を図 7 に示す。区分領域数が少ない P4 モデルでは $\alpha = 0.12$ のときが最も小さいが, P6, P8 モデルでは $\alpha = 0.04$ のとき

¹⁰ $m - 1$ 回目の最適解 $x_{k(m-1)}^{min*}$ を用いて (24) 式で $b_{k(m-1)}^*$ を求める。 (22) 式で $A_{k(m-1)}^*$, (23) 式で $B_{k(m-1)}^*$ を計算し, 区分中心点 $C_G - A_{k(m-1)}^* - B_{k(m-1)}^*$ を求める。図 4 (左) の区分中心点の値は θ_{k-1}^3 に相当する。

¹¹ 累計執行コストに依存しない N1 モデルは 0.1 秒以下で問題を解くことができる。 N1 モデルと P24 モデルの目的関数値を比べると, その差は 0.002519 であり, N1 モデルの目的関数値の 0.9% に過ぎない。目的関数値の減少に比べて, 累計執行コストに依存するモデルの計算時間の割合は大きいだが, 本研究では, 状態 (累計執行コスト) に依存するモデルを用いることによるコスト削減効果を重視し, N1 モデルを除いて計算時間を議論する。

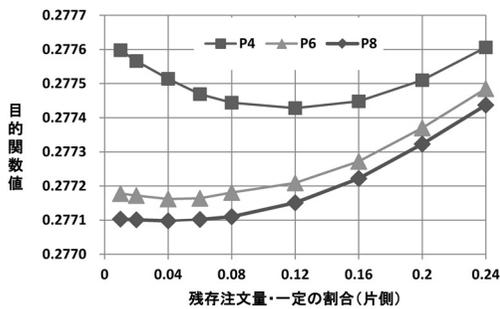


図7 α と目的関数値の関係

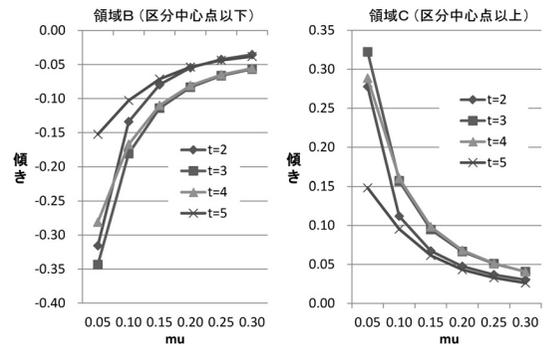


図9 さまざまな μ に対する残存注文量の傾き

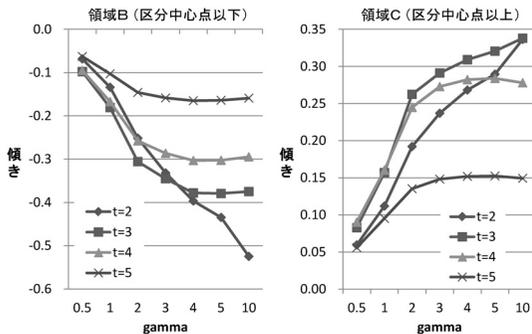


図8 さまざまな γ に対する残存注文量の傾き

が最も小さい。ただし、P4モデルの場合の $\alpha = 0.04$ と $\alpha = 0.12$ の目的関数値の差は小さく、0.000086である。そこで、以降も基本設定値である $\alpha = 0.04$ で問題を解くことにする。

5.4 感度分析

注文量が非常に大きい場合や、流動性が低くマーケット・インパクトが大きく発生しやすい場合は、マーケット・パワー μ は大きくなる。また、累計執行コストが C_G を超過することを機関投資家が避けたい場合、その度合いに応じてリスク回避係数 γ は大きくなる。P6モデルを用いて、 μ, γ に対する感度分析を行う。

(1) γ に対する感度分析

図5で示したように、 γ が大きくなると、残存注文量の水準は小さくなる。これはタイミング・リスク(価格変動)による執行コストの不確実性を回避するためである。次に、領域Bの傾き $\left(\frac{y_k^{3*} - y_k^{1*}}{\theta_{k-1}^{3*} - \theta_{k-1}^{1*}}\right)$ と領域Cの傾き $\left(\frac{y_k^{5*} - y_k^{3*}}{\theta_{k-1}^{5*} - \theta_{k-1}^{3*}}\right)$ を図8に示す¹²。

γ が大きくなるにつれて、傾きの絶対値は大きくなる傾向にある。この理由は大きい γ に対しては区分中心点で残存注文量を小さくし、タイミング・リスクを回避するためである。

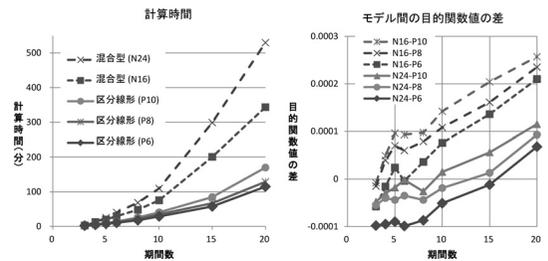


図10 さまざまな期間数に対する計算時間と目的関数値の差

(2) μ に対する感度分析

紙面の都合上省略するが、 μ が大きくなると、マーケット・インパクトを避けるために残存注文量の水準は大きくなる。次に、領域BとCの傾きを図9に示す。

μ が大きくなるにつれて、傾きの絶対値は小さくなる。この理由は、期待累計執行コストが大きくなることによって、相対的にリスクに対するウェイトが下がり、形状がフラットに近くなるからである。

5.5 さまざまな期間数に対する分析

これまででは、最適解の特徴を把握するために期間数が少ない $K = 6$ で分析を行った。初期時点を取引所の開始時刻、最終時点を終了時刻とし、東京証券取引所で取引を行うことを想定した場合、立会時間は計5時間であるため、15分間隔で意思決定を行うためには、 $K = 20$ と設定する必要がある。そこで、8種類の期間数 ($K = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20$) に対して、混合型モデル (N16, N24) と区分線形モデル (P6, P8, P10) で問題を解き、期間数の差による影響を調べる。期間数が多くなると、問題規模が大きくなるため計算時間がかかる。混合型モデル (N16, N24) と区分線形モデル (P6, P8, P10) に対する計算時間を図10(左)に示す。

¹²傾きを表す記号は、図4の左図を参照されたい。

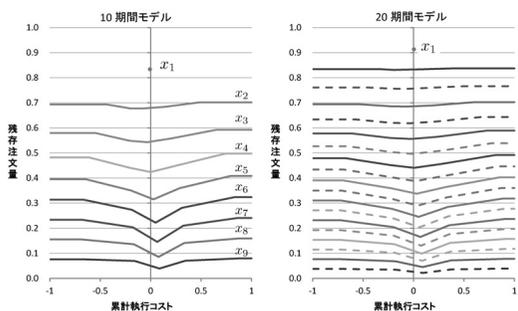


図 11 $K = 10$, $K = 20$ に対する残存注文量

$K = 20$ のとき、混合型モデルは 343 分 (N16)、530 分 (N24) と極めて長い計算時間がかかる。それに対し、区分線形モデルは 115 分 (P6)、129 分 (P8)、170 分 (P10) である。図 10 (右) は混合型モデルから区分線形モデルの目的関数値を引いた値を示す。期間数が多くなるにつれて、その差は徐々に大きくなり、区分線形モデルのほうが優位になることがわかる。ただ、数値を見ると僅差のため、目的関数値の違いはほとんどないと考えてよい。したがって、区分線形モデルは混合型モデルに比べて、ほぼ同じ精度で計算時間を劇的に短くできていることがわかる。機関投資家はこれ以上に短い間隔で執行することもありえるため、仮に前日のマーケット・データを用いて各種パラメータを推定し、当日の取引開始時刻までに解を求める必要がある場合、ノード数が多い混合型モデルでは計算負荷が大きく、期限までの求解が難しい可能性がある。そのため、同じ精度で問題規模を小さくすることによって短い計算時間で求解できる区分線形モデルは実用性の高いモデルであるといえる。

$K = 10$, $K = 20$ の P6 モデルで問題を解いたときの残存注文量を図 11 に示す。

20 期間モデル (右図) の実線が 10 期間モデル (左図) と同じ意思決定時点である。期間数を変えても同じ時点であれば、ほぼ同じ意思決定をすることがわかる。ただし、形状を見ると領域 A と D の残存注文量はほぼ同じであるが、区分中心点の残存注文量は 20 期間モデルのほうが大きく、フラットに近い。これは期間数が少ないときに比べて、タイミング・リスクを気にしないで意思決定できるためである。

期間数が多くなるほど累計執行コストに対する残存注文量の形状はフラットに近くなる。そこで、残存注文量が累計執行コストに依存しない N1 モデルとの目的関数の差 (N1 モデル - 各モデル) を図 12 で確認

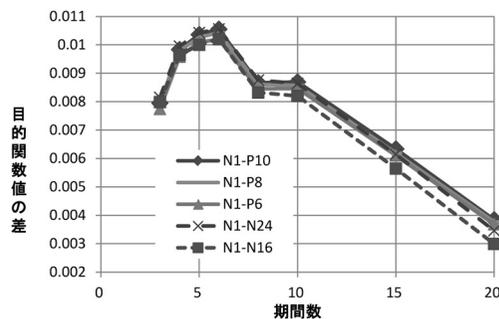


図 12 N1 モデルとの目的関数値の差

しよう。混合型モデル、区分線形モデルともに $K = 6$ のとき、目的関数の差は最も大きく、期間数が多くなるほどその差は小さくなり、N1 モデルに近くなることが確認できる。一方、形状と時間経過との関係を見ると、初期時点と最終時点に近づくほどフラットに近い。したがって、期間数が少ないとその影響が出てくるため、N1 モデルに近くなる。

6. おわりに

本研究では、最適執行戦略問題においてリスク尺度を 1 次の LPM とする多期間確率計画モデルを提案した。混合型モデルを用いて、最適残存注文量が累計執行コストに依存することを示し、さらに理論的な解析モデルから得られた知見を応用して、最適解の特徴を表現できる区分線形モデルを提案した。さまざまな数値分析を通じて、モデルの特徴を確認することができた。さらに、区分線形モデルを用いることによって、混合型モデルとほぼ同様の最適解を得ることができるとともに、問題の規模を小さくすることによって大幅に計算時間を削減することができた。

今後の課題としては、実際のマーケット・データを用いた分析が挙げられる。取引間隔を短くすると期間数が増加するため、その点を考慮したモデル化も必要となるだろう。

謝辞 匿名の 2 人の査読者からは、貴重なコメントをいただきました。ここに記して感謝いたします。

参考文献

- [1] R. Almgren and N. Chriss, "Optimal execution of portfolio transactions," *Journal of Risk*, **3**(2), pp. 5-39, 2000.
- [2] A. Schied and T. Schöneborn, "Risk aversion and the dynamics of optimal liquidation strategies in illiquid markets," *Finance and Stochastics*, **13**(2), pp. 181-204, 2009.
- [3] H. He and H. Mamaysky, "Dynamic trading policies

with price impact,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, **29**(5), pp. 891–930, 2005.

- [4] P. A. Forsyth, S. T. Tse, J. S. Kennedy and H. Windcliff, “Optimal trade execution: A mean quadratic variation approach,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, **36**, pp. 1971–1991, 2012.
- [5] P. Krokmal and S. Uryasev, “A sample-path approach to optimal position liquidation,” *Annals of Operations Research*, **152**(1), pp. 193–225, 2007.
- [6] 枇々木規雄, “最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル,” 高橋一 (編), 『ジャーナル・ジャーナル 金融工学の新展開』, 東洋経済新報社, pp. 89–119, 2001.
- [7] N. Hibiki, “Multi-period stochastic optimization models for dynamic asset allocation,” *Journal of Banking and Finance*, **30**(2), pp. 365–390, 2006.
- [8] J. Cvitanic and I. Karatzas, “On dynamic measures of risk,” *Finance and Stochastics*, **3**(4), pp. 451–482, 1999.
- [9] A. Siegmann, “Investment policies under semivariance,” Working Paper, 2010, http://personal.vu.nl/a.h.siegmann/pdf/DownsideRisk_dynamic.pdf (2016年3月22日閲覧)
- [10] 高屋圭介, 枇々木規雄, “モンテカルロ・シミュレーションを用いた動的ポートフォリオ最適化モデル,” *Transactions of the Operations Research Society of Japan*, **55**, pp. 84–109, 2012.
- [11] S. Hirano and N. Hibiki, “Multi-period stochastic programming model for state-dependent asset allocation with CVaR,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **58**(4), pp. 307–329, 2015.
- [12] J. Lorenz and R. Almgren, “Mean-variance optimal adaptive execution,” *Applied Mathematical Finance*, **18**(5), pp. 395–422, 2011.
- [13] 枇々木規雄, “戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **44**, pp. 169–193, 2001.

付録 A. 区分中心点を導出する解析モデル

4節で取り扱う問題よりも期間の設定や制約などに関して限定的な条件のもとで問題を解析的に取り扱い、区分中心点に相当する累計執行コストを導出する方法を検討する。\$C_{k-1}\$, \$x_{k-1}\$ を所与とし、時点 \$k\$ 以降の残存注文量 \$x_t\$ (\$t = k, \dots, K-1\$) を用いると、\$C_K\$ とその期待値 \$\bar{C}_K\$、分散 \$\sigma_C^2\$ は (27)~(29) 式で記述できる。

$$C_K = \bar{C}_K - \sum_{t=k}^{K-1} x_t \xi_t / \sqrt{K} \quad (27)$$

$$\bar{C}_K = C_{k-1} + \mu K \left\{ \sum_{t=k}^{K-1} (x_{t-1} - x_t)^2 + x_{K-1}^2 \right\} \quad (28)$$

$$\sigma_C^2 = \frac{1}{K} \sum_{t=k}^{K-1} x_t^2 \quad (29)$$

時点 \$k\$ 以降の時点 \$t\$ の残存注文量 \$x_t\$ を \$x_k\$ の \$b_{kt}\$ 倍 (\$x_t = b_{kt}x_k\$) と仮定すると¹³,

$$\sigma_C = b_k x_k, \quad \text{ただし, } b_k = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{t=k}^{K-1} b_{kt}^2}$$

となる。(28) 式は以下のように書き直すことができる。

$$\bar{C}_K = C_{k-1} + \mu K \left\{ (x_{k-1} - x_k)^2 + \beta x_k^2 \right\} \quad (30)$$

$$\text{ただし, } \beta = \sum_{t=k}^{K-2} (b_{kt} - b_{k,t+1})^2 + b_{k,K-1}^2$$

さらに、\$q = C_G - \bar{C}_K\$、\$u = \frac{q}{\sigma_C}\$、\$\xi = \sum_{t=k}^{K-1} b_{kt} \xi_t\$ とすると、

$$\begin{aligned} C_K &= \bar{C}_K - \sigma_C \xi \\ \text{LPM}[C_K] &= \text{E}[\max(C_K - C_G, 0)] \\ &= \sigma_C \phi(u) + q(\Phi(u) - 1) \end{aligned}$$

と記述できるので、目的関数を \$f(x_k)\$ とすると

$$\begin{aligned} f(x_k) &= \bar{C}_K + \gamma \text{LPM}[C_K] \\ &= C_G + \left\{ \gamma \Phi(u) - (1 + \gamma) \right\} q + \gamma \sigma_C \phi(u) \end{aligned}$$

となる。\$f'(x_k) = 0\$ とおき、目的関数が最小となる \$x_k\$ を求めると、以下の (31) 式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{x_{k-1}}{1 + \beta} - x_k &= \frac{bh(u)}{2\mu K(1 + \beta)} \quad (31) \\ \text{ただし, } h(u) &= \frac{\phi(u)}{1 + 1/\gamma - \Phi(u)} \end{aligned}$$

(31) 式は \$x_{k-1}\$, \$x_k\$, \$C_{k-1}\$ の関係を表す式である。解析的には解けないが、\$x_{k-1}\$ を所与として、累計執行コスト \$C_{k-1}\$ に依存した \$x_k\$ を数値的に求めることができる。(31) 式を用いてさまざまな累計執行コストに対する \$x_k\$ を求めると、図 13 のような関係が得られる。

(31) 式は図 13 の \$x_k\$ が最小となる点においても成り立つ。区分線形モデルにおける区分中心点とは \$x_k\$ が最小となる点であるので、(31) 式を満たしつつ、\$x_k\$

¹³(31) 式は \$x_{k-1}\$ を所与としたときの \$x_k\$ との関係であり、この仮定で想定する \$x_k\$ と時点 \$k\$ 以降の \$x_t\$ の関係とは異なるが、全期間で考えると整合的とはいえない。複雑さを避けるためにこの仮定は許容されると考えられるが、この改善は今後の課題としたい。

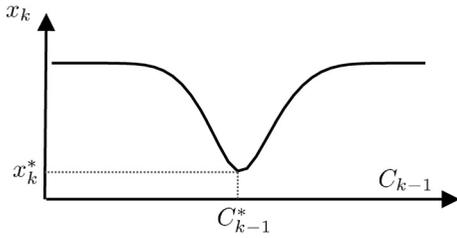


図 13 x_{k-1} を所与としたときの C_{k-1} と x_k の関係

を最小化する (C_{k-1}^*, x_k^*) を求める問題を解くことによって近似的に区分中心点を求める。ただし、区分線形モデルに応用するためにこの問題を次の手順で解く。(31) 式の左辺を最大化して x_k を最小化する代わりに、右辺の $h(u)$ を最大化して u^* を求め、 x_k^* を (31) 式で計算する。 u^* は x_k^* と C_{k-1}^* の関数なので、 C_{k-1}^* を u^* と x_k^* から計算すれば、事後的に (31) 式は満たされる。具体的には以下のとおりである。

- (1) $h(u)$ が最大となる u を求めるために、 $h'(u) = 0$ とおく。解は $u = h(u)$ を満たす u^* であり、数値計算で求める。解は γ にのみ依存する。
- (2) (31) 式を書き直し、 u^* を代入して、(32) 式で x_k^* を計算する。

$$x_k^* = \frac{1}{1 + \beta} \left(x_{k-1} - \frac{b_k u^*}{2\mu K} \right) \quad (32)$$

- (3) $A_k^* = \bar{C}_K - C_{k-1}^*$ と定義すると、 $\bar{C}_K = C_G - q^*$ 、 $q^* = \sigma_C^* u^* = b_k x_k^* u^*$ であるので、 C_{k-1}^* は以下のように計算できる。

$$C_{k-1}^* = C_G - A_k^* - b_k x_k^* u^* \quad (33)$$

(33) 式を区分線形モデルに応用し、4.1 節で示した方法で区分中心点に相当する時点 $k (k = 2, \dots, K-1)$ の累計執行コストを計算する。