保険数理の基礎
—金融工学との比較—

藤田　岳彦

保険数理の基礎と必要な確率論について述べる．保険の価格は期待値で計算されるが，期待値への帰着のされ方が金融工学のそれとは異なるので両者の比較を行う．また基本的な保険商品とそのプライシングを紹介する．

キーワード：確率分布，期待値，価格，寿命，死力，収支相等の原則，アクチュアリー記号

1. はじめに

本稿は保険数理，特に生命保険数理の基礎，またそれと確率論との関係を主に述べる．また，「確率論」特に「期待値」の使い方が金融工学のそれとは異なるところがあるのでそれについても注意する．学生向けにやさしく書くことが本特集号の一つの目的でもあるので必要な確率論の復習も行う．また，「保険数理」は「アクチュアリー」という資格に直結した学問といえるが，その資格としてのアクチュアリー，および，中央大学理工学部におけるそれらへの取組を最後に紹介する．

2. 必要な確率論の復習

2.1 確率変数とその確率分布

X を自然数の値を取る確率変数（つまり離散確率変数）とすると，任意の自然数 k に対して確率変数 X が値 k を取る確率 $P(X=k)$ が決まる[1]．するとそれを表にした離散確率変数 X の確率分布が次のようにできる．

X	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

ここで $P(X=a_i)=p_i>0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1$ である．

例　サイコロの目

$X=$ サイコロの目 とすると，X の確率分布は

X	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

続いて X が連続確率変数 ($\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X=x)=0$) のときは $\exists f_X(x)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)dx$ となる．この関数 $f_X(x)$ は（連続）確率変数 X の確率密度関数と呼ばれ $f_X(x) \geqq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$ を満たす（ルベーグ可測）関数である．

例　指数分布 $Exp(\lambda)$

$$f_T(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x \geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

となる連続確率変数 T の確率分布をパラメータ λ の指数分布と呼ぶ．後で見るようにこの T の具体的意味の一つとして「寿命」が考えられ，「保険数理」において非常に大事な確率分布である．

例　標準正規分布 $N(0,1)$，**正規分布** $N(\mu,\sigma^2)$

$$f_Z(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty<x<\infty)$$

となる連続確率変数 Z の確率分布を「標準正規分布」という．標準正規分布の分布関数を $\Phi(x)=P(Z \leqq x)$ と書くこととする．この Z を用いて $Y=\mu+\sigma Z$ で定義される確率変数 Y の分布は（一般の）正規分布といい，$N(\mu,\sigma^2)$ で表し，$f_Y(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(-\infty<x<\infty)$ である．

X が離散確率変数の場合は，その確率分布は上のように表を用いてわかりやすく表現ができるが，X が連

[1] X が確率変数であるとは標本空間 Ω を定義域，実数全体 $\mathbb{R}$ を値域とするルベーグ可測関数，つまり $\forall a \in \mathbb{R}, \{\omega \mid X(\omega) \leqq a\} = X^{-1}((-\infty,a])$ がルベーグ可測集合となることであるが，ルベーグ積分論，測度論的確率論の知識が必要となるので，本文では $\{\omega \mid X(\omega)=k\}=\{X=k\}$ や $\{\omega \mid a<X(\omega)<b\}=\{a<X<b\}$ などが事象（標本空間の部分集合でそれに対して確率が決まるもの）とした．

ふじた　たかひこ
中央大学理工学部経営システム工学科
〒112–8551 東京都文京区春日 1–13–27
rankstatistics@gmail.com

続の場合はその確率分布が何かということは初学者にとってはわかりにくいものであると思われる．離散の場合の確率分布は x に対して確率 $P(X=x)$ を対応させる関数（表）と考えられるが，連続の場合は x の代わりに区間を考え区間 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$ に対して確率 $P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)dx$ を対応させる対応関係（関数，写像）と考えるとよい．つまり確率密度関数 $f_X(x)$ はこの区間と確率の対応関係を定積分で決める重要な役割をしているのである[2]．

2.2 期待値

確率変数 X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=\begin{cases}\sum_x xP(X=x) & (X\text{ は離散確率変数})\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx & (X\text{ は連続確率変数})\end{cases}$$

と定義される[3]．X をサイコロの目とすると，$E(X)=1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+\cdots+6\cdot P(X=6)=\frac{1+2+\cdots+6}{6}=\frac{7}{2}$ である．また $E(T)=\frac{1}{\lambda}$（T は指数分布），$E(Z)=0$（Z は標準正規分布），$E(Y)=\mu$（Y は正規分布）である．

ところで，期待値 $E(X)$ の意味であるが確率変数 X をくじ，ギャンブル，金融商品（これらはすべて未来に不確実なお金をもらう契約だといえる）と考えたときの（現在）価格である．つまりいま $E(X)$ 円 を払って未来に X 円 もらう取引が「公平」となる数値こそが $E(X)$ なのである．

少し古いかもしれないが，林修先生の言葉を借りると

いつ払うの？ →「今でしょ．」($E(X)$ 払う)
いつもらうの？ →「未来（あす）でしょ．」(X もらう)

という現在と未来の交換を「公平」にするのである．

しかし「公平性」をどうやって担保するのかが「金融工学」と「保険数理」によって異なる．まず「金融工学について見てみよう．

3. 金融工学における「価格」としての期待値と「無裁定の原則」

本節は「確率解析」の知識を仮定する．W_t をブラウン運動として株価 S_t はリスク中立確率モデルにおけるブラックショールズモデル $dS_t=rS_tdt+\sigma S_tdW_t$ ($S_t=S_0e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t}$) を満たすとする．ここで r は安全連続利子率，σ は株価の収益率のボラティリティとする．Y を満期 T における株式派生商品（株式デリバティブ）とすると，Y の現在価格（$t=0$ における価格）が $E(Y)$ である．この場合リスク中立確率による期待値を取ればデリバティブ Y の（現在）価格が求められる（リスク中立化法という）．その理由は，デリバティブを複製するポートフォリオ（$E(Y)$ を初期資金とし，あとは株の売買（銀行から借りてきたお金で株をデルタヘッジ分買い，少し時間が経ったとき株を売り，銀行に返すという操作）を繰り返す）が組成できるからである（参照：本特集の西原氏 (pp. 341–344)，山田氏 (pp. 351–358) の記事）．

例（コールオプション） 行使価格 K のコールオプションの満期時 T におけるペイオフ Y は $Y=\max(S_T-K,0)$ であるがこの現在価格 C は $C=E(e^{-rT}\max(S_T-K,0))=S_0\Phi(\frac{\log\frac{S_0}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}})-Ke^{-rT}\Phi(\frac{\log\frac{S_0}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}})$ となり，このときのデルタヘッジは $\phi_t=\Phi(\frac{\log\frac{S_t}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})$ である（文献 [1] 参照）．

4. 保険数理における「価格」としての期待値と「大数の法則」

まず確率論における基本的かつ重要な定理，「大数の法則」を述べる．

大数の法則

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ を独立同分布な確率変数列 ($E(X_i)=\mu$) とする[4]．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\mu$$

例　サイコロ

サイコロを何回も振り X_i を i 回目のさいころの目とすると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=E(X_1)=\frac{7}{2}$$

[2] つまり確率変数 X の確率分布は 標本空間 Ω 上の確率測度 P を可測関数 X によって移した $\mathbb{R}$ 上の確率測度 ($\mu(A)=P(X^{-1}(A))$ で定義される像測度）であるといえる．

[3] ルベーグ積分論を知っていると $E(X)=\int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$ で定義され，離散や連続の場合はそれぞれ上のように計算できる．また実はカントール分布のように $P(X=x)=0$ だが確率密度関数が存在せず，$P(a<X<b)$ が定積分で表せないような確率分布も存在する．この場合は $E(X)=\int_\Omega X(\omega)dP(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} xdF_X(x)$（ルベーグスティルチェス積分）で計算され，特にカントール分布のような自己相似性をもつものはその自己相似性を用いて計算することが多い．

[4] 独立同分布とは同じ実験を繰り返すことで，たとえば同じサイコロを何回も投げるようなことである．

これはサイコロを何回も振ると，でこぼこはあったとしてもその平均はだんだん一定の数（期待値 $\frac{7}{2}$）に近づいていくということである．

これを保険加入者に適用するとそもそも「保険」は加入者がたくさんおり ($n \to \infty$)，それらの加入者は「独立」に加入するのでこの「大数の法則」の要件を満たしているのである．つまり保険の価格を決める原理は「大数の法則」であるといえる．以下この「保険数理」の実際を見ていこう．その前に確率変数としての「寿命」について少し準備をしておく．

4.1 寿命確率変数と死力

$P(X > 0) = 1$ である連続確率変数となる X（「寿命」と考える）に対して $\lambda_X(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t<X<t+\Delta t|X>t)}{\Delta t}$ となる $\lambda_X(t)$ を死力 (force of mortality)，故障率 (failure rate)，危険率 (hazard rate) などと呼ぶ[5]．意味は X を機械や生物，対象物の寿命としたとき，$P(X > t)$ は t まで生きている確率（生存関数 $\bar{F}_X(t)=1-F_X(t)$ と呼ばれる）なので t まで動いている機械が t と $t+\Delta t$ の間に故障する確率が $\lambda_X(t)\Delta t$ となるものである．

$$
\begin{aligned}
\lambda_X(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < X < t+\Delta t \mid X > t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{F}_X(t) - \bar{F}_X(t+\Delta t)}{\Delta t \bar{F}_X(t)} \\
&= \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} = \frac{d}{dt}(-\log \bar{F}_X(t))
\end{aligned}
$$

すると，$\bar{F}_X(0) = 1$ より，

$$
\begin{aligned}
-\log \bar{F}_X(t) &= \int_0^t \lambda_X(s) ds \\
\bar{F}_X(t) &= e^{-\int_0^t \lambda_X(s) ds} \\
F_X(t) &= 1 - e^{-\int_0^t \lambda_X(s) ds} \\
f_X(t) &= \lambda_X(t) e^{-\int_0^t \lambda_X(s) ds}
\end{aligned}
$$

のように $\lambda_X(t)$ から確率分布のすべてが再現される．

t 年生存確率 ${}_t p_x$（現在 x 歳の人がさらに t 年より多く生きる確率）を考える．すると，

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x = P(X > x+t \mid X > x) &= \frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)} \\
&= e^{-\int_x^{x+t} \lambda_X(s) ds}
\end{aligned}
$$

また $t = 1$ のときは ${}_1 p_x = p_x$ と 1 を省略して書き，p_x を x 歳の生存率（x 歳からあと 1 年は生きる確率）という．

$P(X < x+t \mid X > x) = {}_t q_x$ とし，これを (t 年) 死亡確率という．これも $t = 1$ のときは省略して ${}_1 q_x = q_x$ と書き，x 歳の死亡率（x 歳から 1 年以内に死亡する確率）という．すると当然 ${}_t p_x + {}_t q_x = 1$，$p_x + q_x = 1$ が成立している．また 据え置き死亡率（x 歳の後 t 年生きて $t+1$ 年までに死ぬ確率）を

$$
{}_{t|} q_x = P(x+t < X < x+t+1 \mid X > x)
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
{}_{t|} q_x &= P(X > x+t \mid X > x) \\
&\quad - P(X > x+t+1 \mid X > x) \\
&= {}_t p_x - {}_{t+1} p_x
\end{aligned}
$$

である．

計算例 (1) $X \sim Exp(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\bar{F}_X(t) &= P(X > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda u} du = e^{-\lambda t} \\
\lambda_X(t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \log \bar{F}_X(t) = \lambda \\
{}_t p_x &= \frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)} = e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

ここで，${}_t p_x$ が x に依存しないことが指数分布の無記憶性の意味である．

計算例 (2) $X \sim \min(Exp(\lambda), Exp(\lambda))$

$\min(Exp(\lambda), Exp(\lambda)) \sim Exp(2\lambda)$ より

$$
\begin{aligned}
\bar{F}_X(t) &= P(X > t) = \int_t^\infty 2\lambda e^{-2\lambda u} du = e^{-2\lambda t} \\
\lambda_X(t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \log \bar{F}_X(t) = 2\lambda \\
{}_t p_x &= \frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)} = e^{-2\lambda t}
\end{aligned}
$$

計算例 (3) $X \sim \max(Exp(\lambda), Exp(\lambda))$

$$
\begin{aligned}
\bar{F}_X(t) &= P(X > t) = 1 - P(X \leqq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2 \\
\lambda_X(t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \log \bar{F}_X(t) = \frac{2(1 - e^{-\lambda t})\lambda e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})^2} \\
{}_t p_x &= \frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(x+t)})^2}{1 - (1 - e^{-\lambda x})^2}
\end{aligned}
$$

計算例 (4) $X \sim |N(0,1)|$

$\Phi(t) = P(X \leqq t)$ として，

$$
\begin{aligned}
\bar{F}_X(t) &= P(|X| > t) = 2(1 - \Phi(t)) \\
\lambda_X(t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \log \bar{F}_X(t) = \frac{f_X(t)}{1 - \Phi(t)} \\
{}_t p_x &= \frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)} = \frac{1 - \Phi(x+t)}{1 - \Phi(x)}
\end{aligned}
$$

---

[5] 保険数理，信頼性工学，医学統計，金融工学などさまざまな分野で使われる重要な概念である．分野に応じて使用する名前が異なるがすべて同じ意味である．

計算例 (5) $X =$ ワイブル分布

X がパラメータ $\gamma\ (>0)$, $a\ (>0)$ のワイブル分布であるとは密度関数が $f_X(x) = a\gamma(ax)^{\gamma-1}e^{-(ax)^\gamma}$ $(x>0)$ となることである.

$$\bar{F}_X(t) = P(X>t) = e^{-(at)^\gamma}$$
$$\lambda_X(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\log \bar{F}_X(t) = a\gamma(at)^{\gamma-1}$$
$${}_tp_x = \frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)} = e^{-(a(x+t))^\gamma+(ax)^\gamma}$$

計算例 (6) ゴムパーツモデル

$A>0,\ B>0$ として, $\lambda_X(t) = Ae^{Bt}$ と仮定されたモデルをゴムパーツモデルという.

$$\bar{F}_X(t) = e^{-\int_0^t \lambda_X(s)ds} = e^{-\frac{A(e^{Bt}-1)}{B}}$$
$${}_tp_x = \frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)} = e^{-\frac{Ae^{Bx}(e^{Bt}-1)}{B}}$$

計算例 (7) メーカムモデル

$A>0,\ B>0,\ C>0$ として, $\lambda_X(t) = C + Ae^{Bt}$ と仮定されたモデルをメーカムモデルという.

$$\bar{F}_X(t) = e^{-\int_0^t \lambda_X(s)ds} = e^{-Ct-\frac{A(e^{Bt}-1)}{B}}$$
$${}_tp_x = \frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)} = e^{-Ct-\frac{Ae^{Bx}(e^{Bt}-1)}{B}}$$

4.2 生命保険と収支相等の原則

ν は現価率 $\frac{1}{1+i}$ とする[6].

まず, 次ページの生命表 (表 1) の意味は時点 x (x 歳) で生存人数が l_x で時点 $x+1$ までに d_x 人死ぬので $l_{x+1} = l_x - d_x$ となる[7]. したがって前に説明した生命確率との関係は X を寿命確率変数として $P(X>x) =$ 時点 x で生きている確率 $= \frac{l_x}{l_0}$, ${}_tP_x = P(X>x+t \mid X>x) = \frac{l_{x+t}}{l_0}\frac{l_0}{l_x} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$ となる. 保険会社の収入はこの生命表にある人が全員 x 歳のはじめにある (一時払い (一括払い)) 保険 (保険料 A) に加入したとすると Al_x となる. また, 保険の種類によって保険会社の支出が異なるのでそれを支出現価の欄に書き, 上と下の合計を一致させること (収支相等の原則) により (一時払い) 保険料 A が決定される. たとえば以下の生命表で保険の価格を計算してみる.

(表 2) x 歳加入 n 年契約定期保険は x 歳で加入後, n 年以内に死亡があったときのみ保険金が支払われる. また, n 年以内の死亡に対しては死亡年度の年度末に金額 1 を支払うとする. この保険の一時払い保険料を $A^1_{x:\overline{n}|}$ で表す[8].

(表 3) x 歳加入 n 年契約生存保険とは x 歳で加入後, n 年後に加入者が生存していたときのみ保険金 1 が支払われる. この生存保険の一時払い保険料を $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ で表す.

(表 4) 養老保険は定期保険と生存保険を合わせたもので, x 歳加入 n 年契約養老保険とは x 歳で加入後, n 年以内の死亡に対しては死亡年度の年度末に金額 1 を支払い, さらに n 年後に加入者が生存していたときも保険金 1 が支払われる. この養老保険の一時払い保険料を $A_{x:\overline{n}|}$ で表す.

(表 5) x 歳加入 n 年契約期始払い生命年金とは x 歳で加入後, n 年後までのすべての期始に加入者が生存していたとき保険金 1 ずつが支払われる. この生命年金の一時払い保険料を $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ で表す.

(表 6) x 歳加入 n 年契約期末払い生命年金の一時払い保険料を $a_{x:\overline{n}|}$ で表す.

もちろん, その保険会社の保険に加入する人は全人口の一部分であるが, 保険に入る人は「多数であること」「独立に入ること」という大数の法則の要件を満たしているので, 生命表にある全員が保険に加入したと仮定して差し支えないのである. つまりこの意味で「収支相等の原則」=「大数の法則」である. するとこれらの収支相等の原則から以下の保険価格 (保険料) が導かれる.

$$A^1_{x:\overline{n}|}l_x = \nu d_x + \nu^2 d_{x+1} + \cdots + \nu^n d_{x+n-1}$$

ここで,

$$\frac{d_x}{l_x} = q_x,\ \frac{d_{x+1}}{l_x} = \frac{d_{x+1}}{l_{x+1}}\frac{l_{x+1}}{l_x} = q_{x+1}p_x\ (= {}_{1|}q_x)$$
$$\frac{d_{x+n-1}}{l_x} = \frac{d_{x+n-1}}{l_{x+n-1}}\frac{l_{x+n-1}}{l_x} = q_{x+n-1\,n-1}p_x\ (= {}_{n-1|}q_x)$$

などに注意すると,

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \nu q_x + \nu^2\,{}_{1|}q_x + \cdots + \nu^n\,{}_{n-1|}q_x$$

が成立する. また $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}l_x = \nu^n l_{x+n}$ より

[6] 1 期間の利子が i とは 1 が 1 期間後に $1+i$ になることであるが, これを時間を逆に見て将来 1 の価値のものを 1 期間戻すと $\frac{1}{1+i} = \nu$ の価値と考える. 同様に n 期間戻すと $(\frac{1}{1+i})^n = \nu^n$ の価値と考える. このようにいろいろな時間における価値をすべて ν^n をかけて現在価値で考える. このような考え方を「現在価値割引」という.

[7] 通常生命表 (たとえば厚生労働省のホームページから得られる簡易生命表) においては $l_0 = 100000$ である. 10 万人から出発してだんだん死亡することによりその人数が減っていく.

[8] このような記号は「アクチュアリー記号」と呼ばれ全世界で共通な記号である. たとえば表 5 の二つのドットの上付きは「期始払い」を表す.

表 1　生命表

t（時点）	x		$x+1$		$x+2$	$\dots$	$x+n-1$		$x+n$
生存人数	l_x		l_{x+1}		l_{x+2}	$\dots$	l_{x+n-1}		l_{x+n}
死亡人数	|	d_x	|	d_{x+1}	|	$\dots$	|	d_{x+n-1}	|
収入現価	Al_x								
支出現価	○		○		○		○		○

表 2　x 歳加入 n 年契約定期保険 $A^{1}_{x:\overline{n}|}$

t（時点）	x		$x+1$		$x+2$	$\dots$	$x+n-1$		$x+n$
生存人数	l_x		l_{x+1}		l_{x+2}	$\dots$	l_{x+n-1}		l_{x+n}
死亡人数	|	d_x	|	d_{x+1}	|	$\dots$	|	d_{x+n-1}	|
収入現価	$A^{1}_{x:\overline{n}|}l_x$								
支出現価			νd_x		$\nu^2 d_{x+1}$				$\nu^n d_{x+n-1}$

表 3　x 歳加入 n 年契約生存保険 $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$

t（時点）	x		$x+1$		$x+2$	$\dots$	$x+n-1$		$x+n$
生存人数	l_x		l_{x+1}		l_{x+2}	$\dots$	l_{x+n-1}		l_{x+n}
死亡人数	|	d_x	|	d_{x+1}	|	$\dots$	|	d_{x+n-1}	|
収入現価	$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}l_x$								
支出現価									$\nu^n l_{x+n}$

表 4　x 歳加入 n 年契約養老保険 $A_{x:\overline{n}|}$

t（時点）	x		$x+1$		$x+2$	$\dots$	$x+n-1$		$x+n$
生存人数	l_x		l_{x+1}		l_{x+2}	$\dots$	l_{x+n-1}		l_{x+n}
死亡人数	|	d_x	|	d_{x+1}	|	$\dots$	|	d_{x+n-1}	|
収入現価	$A_{x:\overline{n}|}l_x$								
支出現価			νd_x		$\nu^2 d_{x+1}$				$\nu^n d_{x+n-1}+\nu^n l_{x+n}$

表 5　x 歳加入 n 年契約期始払い生命年金 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

t（時点）	x		$x+1$		$x+2$	$\dots$	$x+n-1$		$x+n$
生存人数	l_x		l_{x+1}		l_{x+2}	$\dots$	l_{x+n-1}		l_{x+n}
死亡人数	|	d_x	|	d_{x+1}	|	$\dots$	|	d_{x+n-1}	|
収入現価	$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}l_x$								
支出現価	l_x		νl_{x+1}		$\nu^2 l_{x+2}$		$\nu^{n-1}l_{x+n-1}$		

表 6　x 歳加入 n 年契約期末払い生命年金 $a_{x:\overline{n}|}$

t（時点）	x		$x+1$		$x+2$	$\dots$	$x+n-1$		$x+n$
生存人数	l_x		l_{x+1}		l_{x+2}	$\dots$	l_{x+n-1}		l_{x+n}
死亡人数	|	d_x	|	d_{x+1}	|	$\dots$	|	d_{x+n-1}	|
収入現価	$a_{x:\overline{n}|}l_x$								
支出現価			νl_{x+1}		$\nu^2 l_{x+2}$		$\nu^{n-1}l_{x+n-1}$		$\nu^n l_{x+n}$

$$
\begin{aligned}
&A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = \nu^n{}_np_x \\
&A_{x:\overline{n|}} = A^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} \\
&\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + \nu p_x + \nu^2{}_2p_x + \cdots + \nu^{n-1}{}_{n-1}p_x \\
&a_{x:\overline{n|}} = \nu p_x + \nu^2{}_2p_x + \cdots + \nu^n{}_np_x
\end{aligned}
$$

となる．

計算例

特に死力 $\lambda_X(t)$ が年齢によらず一定 μ の場合は寿命確率変数は パラメータ μ の指数分布になるので

$$
\begin{aligned}
&p_t = P(X > t) = \int_t^\infty \mu e^{-\mu x} dx = e^{-\mu t} \\
&p_{x+t} = e^{-\mu(x+t)},\ {}_tp_x = \frac{p_{x+t}}{p_x} = e^{-\mu t} \\
&{}_{t|}q_x = {}_tp_x - {}_{t+1}p_x = (1 - e^{-\mu})e^{-\mu t}
\end{aligned}
$$

などより

$$
\begin{aligned}
A^1_{x:\overline{n|}} &= \nu(1 - e^{-\mu}) + \cdots + \nu^n(1 - e^{-\mu})e^{-(n-1)\mu} \\
&= \nu(1 - e^{-\mu})\frac{1 - \nu^n e^{-\mu n}}{1 - \nu e^{-\mu}} \\
A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} &= \nu^n e^{-\mu n} \\
\ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= \frac{1 - \nu^n e^{-\mu n}}{1 - \nu e^{-\mu}} \\
a_{x:\overline{n|}} &= \frac{\nu e^{-\mu}(1 - \nu^n e^{-\mu n})}{1 - \nu e^{-\mu}}
\end{aligned}
$$

となる．

「収支相等の原則」=「大数の法則」であることはやや直感的に説明していろいろな関係式を導いたが，最後に寿命確率変数による期待値でも同じ結論が得られることを示しておこう．

たとえば x 歳加入 n 年契約生存保険の場合を調べてみる．x 歳における余命を T_x とする．余命の意味を考えると，g を一般の関数として $E(g(T_x)) = E(g(X) \mid X > x)$ で計算することにまず注意する．保険金が 1 の x 歳加入 n 年契約生存保険の原価（現在価値）Z を余命確率変数 T_x を用いて表すと

$$
Z = \begin{cases} 0 & (0 \leqq T_x < n) \\ \nu^n & (T_x \geqq n) \end{cases}
$$

となり，まとめて書くと $Z = \nu^n 1_{\{T_x \geqq n\}}$ となる．ここで，指示関数

$$
1_A = \begin{cases} 1 & (A\text{ が起こるとき}) \\ 0 & (A\text{ が起こらないとき}) \end{cases}
$$

については $E(1_A) = P(A)$ であることに注意しておく．よって

$$
\begin{aligned}
A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} &= E(\nu^n 1_{\{T_x \geqq n\}}) = \nu^n P(T_x \geqq n) \\
&= \nu^n P(X \geqq x + n \mid X > x) = \nu^n{}_np_x
\end{aligned}
$$

となり「収支相等の原則」で導いた式と当然同じになる．ほかの保険商品も同様である（文献 [2] 参照）．

4.3 保険数理と金融工学の融合

今まで見てきたように「保険数理」と「金融工学」のプライシングは期待値を取るという点では同じだが，その根拠は異なる．しかし，デリバティブ付きと考えられる新しい保険商品（たとえば，変額年金など）はこれからますます重要になると思われる．たとえば，保険金を株価指数の何%かでもらう，もっと複雑なデリバティブとの関連で保険商品を組成するなどである．保険商品そのものを売る取引ができないので，その点が金融派生商品の複製やヘッジと異なる点であるのだが，リスク管理，保険商品の拡大といった視点からは「保険数理」と「金融工学」の融合はこれからますます重要なテーマになると思われる．

5. アクチュアリー試験など

本稿を読んで「保険数理」に興味をもたれた方には「アクチュアリー試験」受験を勧める．

アクチュアリー試験の一次試験は

- 数学（確率，統計，モデリング）
- 生保数理
- 損保数理
- 年金数理
- 会計・経済・投資理論

の五科目で，すべて終えたら各自の専門に応じて生保コースか損保コースか年金コースを選択し二次試験を受験する．一次試験をすべて終えると「準会員」，二次まで終えると「正会員」となる．さらなる情報については日本アクチュアリー会のホームページを参照してほしい．また，一次試験の「数学」の参考書としては文献 [2] でまず勉強するとよい．筆者の所属する中央大学理工学部経営システム工学科，大学院経営システム工学専攻ではプルデンシャル生命ジブラルタ生命（OLIS アジア生命保険振興センター）から寄附講座「保険数理」，「アクチュアリー数理」を開設していただき，さらに副専攻（データ科学・アクチュアリー副専攻）を大学院で設置してアクチュアリー養成に力を入れている．

参考文献

[1] 藤田岳彦，川西泰裕，『ファイナンスの確率解析入門（第 2 版）』，2016 秋刊行予定．
[2] 藤田岳彦，『弱点克服大学生の確率統計』，東京図書，2009.