連続時間モデルによる オプション価格付けとヘッジ

山田　雄二

ここでは，本特集ですでに導入されている派生証券価格理論，とりわけオプションに関する議論を連続時間モデルのケースに拡張することを考える．連続時間モデルに限らず，オプション価格付け理論の核となる概念のいくつかは，一度手に入れてしまえばさほどではないが，抽象的で慣れるまで難解に感じる側面がある．そこで，本解説記事では，理論の厳密さをなるべく損なわない範囲で平易に解説することを試み，無裁定条件に基づく価格付けやヘッジのエッセンスを，連続時間モデル上で直感的に理解することを念頭に議論を進めたいと思う．

キーワード：オプション価格付け理論，連続時間モデル，確率シミュレーション，ヘッジ誤差分布

1. 基本概念

将来時点 T (>0) における異なる二つの資産価値が等しくなることが時点 0 で既知の場合，無裁定の下，時点 0 における資産価値も等しくなければならない．この考え方をオプションの価格付けに適用し，満期時点のオプション価値を複製する原資産と無リスク資産のポートフォリオ（すなわち複製ポートフォリオ）の存在条件を示すことにより，ヨーロピアンオプションの理論価格を導くことが，オプション価格理論で有名な Black–Scholes モデル [1] の一つの側面である．

図 1 に示すように，オプション取引においては，買い手側は満期時点にオプションを行使することで，契約条件に沿ったペイオフを受け取る権利を有する一方，売り手側は，オプション行使時のペイオフを買い手側に支払う義務が生じる．これに対して，オプションを売るのと同時に複製ポートフォリオを構成すれば，売り手側は複製ポートフォリオの価値で支払い時の損失を補填することができる．このような複製ポートフォリオの構成は，オプション行使に伴う損失を補うための手法，すなわちオプションヘッジ手法を与えている．

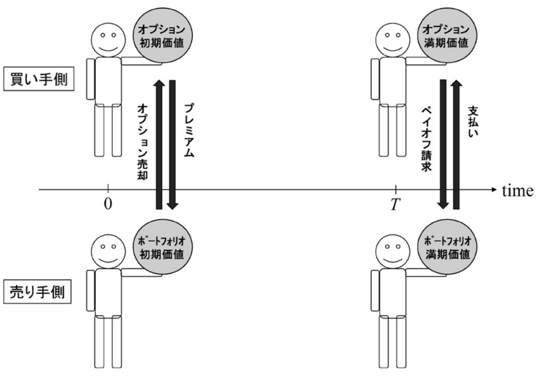

図 1　複製ポートフォリオとオプションヘッジ

本節冒頭で，時点 0 の無裁定条件を例示したが，実際には満期時点価値が等しければ，無裁定の下，すべての時点においてオプション価値は複製ポートフォリオ価値に等しくなる．このような原資産，無リスク資産，オプションで構成される市場のように，「資産価値を，当該市場のその他の資産から構成されるポートフォリオの価値で複製できる市場」のことを，完備市場と呼ぶ．Black–Scholes モデルでは，「原資産は幾何ブラウン運動という連続時間モデルに従う」，および「連続的に資産取引を行うことができる」という仮定の下で市場が完備であることを示し，オプションの理論価格が導かれる．ところが，これらの前提が成り立たない場合に，市場は非完備となる．取引頻度に制約がある際に市場が非完備となり，複製ポートフォリオとオプション価値にかい離（ヘッジ誤差）が生じることについては，5 節でシミュレーションを用いて検証する．

2. 資産価格変化の連続時間表現

連続時間モデルとは，連続的に推移する時点 $t \in [0, \infty)$ の関数として資産価格を表現するモデルであり，通常は，これらの資産に対する取引も連続的に行うことができると仮定される．このような連続時間モデルを用いた定式化において，無限小時間 (infinitesimal time) と呼ばれる $\mathrm{d}t$ の概念が重要な役割を果たす．ただし，$\mathrm{d}t$ は正かつ限りなく 0 に近い量であり，$\mathrm{d}t$ の

やまだ　ゆうじ
筑波大学ビジネスサイエンス系
http://www2.gssm.otsuka.tsukuba.ac.jp/staff/yuji/

高次項 $((\mathrm{d}t)^m,\ m>1)$ はすべて 0 という性質を満たす．また，t と $t+\mathrm{d}t$ は時間軸上で隣同士という，ある意味理想的な関係にあるものと考えて差し支えない．

まず，無リスク資産を例にして，時点 t から $t+\mathrm{d}t$ にかけての，資産価値の推移を表現することを考える．$M(0)$ を無リスク資産に対する初期時点投資額とすると，時点 t における無リスク資産価値は，

$$M(t)=M(0)\exp(rt) \tag{1}$$

で与えられる．ただし，r は無リスク利子率である．また，時点 $t+\mathrm{d}t$ における無リスク資産価値は，

$$M(t+\mathrm{d}t)=M(0)\exp\{r(t+\mathrm{d}t)\}=M(t)\exp(r\mathrm{d}t)$$

であるが，$\exp(r\mathrm{d}t)$ のテーラー展開において $\mathrm{d}t$ の高次項は 0 であるので，次式が成り立つ．

$$M(t+\mathrm{d}t)=(1+r\mathrm{d}t)\,M(t)$$

このように無リスク資産価値は，時点 t から $t+\mathrm{d}t$ にかけて $(1+r\mathrm{d}t)$ 倍される．

次に，無リスク資産と原資産株式のポートフォリオを構成する際の，時点 t と時点 $t+\mathrm{d}t$ におけるポートフォリオ価値の関係について見てみよう．時点 t の原資産価格を $S(t)$，ポートフォリオ価値を $\Omega(t)$，ポートフォリオにおける原資産投資単位を $\Delta(t)$ とすると，時点 t における原資産投資額は $\Delta(t)S(t)$，無リスク資産への投資額は $\Omega(t)-\Delta(t)S(t)$ である．このとき，時点 $t+\mathrm{d}t$ における原資産投資額は $\Delta(t)S(t+\mathrm{d}t)$ であり，無リスク資産投資額は $(1+r\mathrm{d}t)$ 倍されるので，時点 $t+\mathrm{d}t$ におけるポートフォリオ価値 $\Omega(t+\mathrm{d}t)$ は次式を満たす．

$$\begin{aligned}&\Omega(t+\mathrm{d}t)\\&\quad=\Delta(t)S(t+\mathrm{d}t)+(1+r\mathrm{d}t)\left[\Omega(t)-\Delta(t)S(t)\right]\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，時点 t から時点 $t+\mathrm{d}t$ にかけての，資産価値の変化量を表す演算子を d とする．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega(t)&=\Omega(t+\mathrm{d}t)-\Omega(t)\\ \mathrm{d}S(t)&=S(t+\mathrm{d}t)-S(t)\end{aligned}$$

であり，(2) 式は，以下のように書き直される．

$$\mathrm{d}\Omega(t)=\Delta(t)\mathrm{d}S(t)+r\left[\Omega(t)-\Delta(t)S(t)\right]\mathrm{d}t \tag{3}$$

時点 t において変数 $S(t)$, $\Omega(t)$ が観測され，原資産投資単位 $\Delta(t)$ が決まれば，(3) 式において，ポートフォリオ価値の変化量 $\mathrm{d}\Omega(t)$ は，原資産価値の変化量 $\mathrm{d}S(t)$ と時間の変化量 $\mathrm{d}t$ に比例する．本稿では，便宜上，このような形式で表現されるモデルを比例モデルと呼ぶ．

さらに，時点 $t\in[0,\ T]$ におけるヨーロピアンオプション価値を $V(t)$ と表記する．ただし，ヨーロピアンオプションの場合，K を行使価格とすれば，満期時点 T におけるペイオフは次式を満たす．

$$V(T)=\begin{cases}\max\{S(T)-K,\ 0\} & \text{（コールの場合）}\\ \max\{K-S(T),\ 0\} & \text{（プットの場合）}\end{cases} \tag{4}$$

仮に，オプション価値の変化量 $\mathrm{d}V(t)$ が $\mathrm{d}S(t)$ と $\mathrm{d}t$ の比例モデルとして表現され，かつ (3) 式と係数項が等しくなるように $\Delta(t)$ や $\Omega(t)$ を調整できるのであれば，すべての時点において価値が等しくなる複製ポートフォリオが構成される．次節で示すように，このような複製ポートフォリオが存在するための必要十分条件を与えるのが Black–Scholes 方程式であり，ヨーロピアンオプションについては，原資産価格が幾何ブラウン運動に従うとの仮定の下，与えられたパラメータを用いて解析的にオプション価値 $V(t)$ や複製ポートフォリオの原資産保有単位 $\Delta(t)$ を表現することができる．

3. Black–Scholes モデル

3.1 幾何ブラウン運動

一般に，株式価格などの変動を考える場合，何パーセント上昇とか何パーセント下落とか，事前の価格に対して相対的な変動を考えることが多い．また，株式価格そのものは，通常正の値しかとらない．幾何ブラウン運動は，このような株式価格変動の特性を表現する確率過程であり，以下で導入するブラウン運動と呼ばれる基本変動を用いて定義される．

コインを投げて表がでれば +1，裏がでれば −1 を試行の結果として割り当てるベルヌーイ試行の和の分散は，試行回数を無限回とすれば発散する．一方，和の分散が非零定数となるように，割り当てる数字を試行回数で正規化すると，中心極限定理により，ベルヌーイ試行の和は正規分布に分布収束する．ブラウン運動の一つの解釈として，このようなベルヌーイ試行の和における試行回数を，時間と関連付けながら極限をとることによって定義される確率過程と捉えることができる．

ベルヌーイ試行の各回において $\pm 1/\sqrt{N}$ を割り当てるとすると，$k\in\{0,1,\dots,N\}$ 回の試行が与える確率変数の和の分散は k/N である．以上を踏まえて，

$B^{(N)}(t_k)$, $t_k := k/N$ を次式のように定義する.

$$B^{(N)}(t_k) = \text{"}\pm 1/\sqrt{N}\text{ を割り当てる試行 }k\text{ 回の和"}$$

ただし, $B^{(N)}(0) = 0$ とする. $B^{(N)}(t_k)$ の極限をとる際, k を固定したまま $N \to \infty$ とすると $t_k \to 0$ となってしまい, 任意に与えられる時点 t に対する確率過程を定義するうえで適当ではない. そこで, $0 < t \leq 1$ を満たす t が与えられるとして, k と t に $k = \lceil tN \rceil$ の関係が成り立つように $N \to \infty$ の極限をとることを考える. さらに, $t \in (t_k,\ t_{k+1})$ においては, 以下のように $B^{(N)}(t_k)$ と $B^{(N)}(t_{k+1})$ を線形補間することによって $B^{(N)}(t)$ を定義する.

$$B^{(N)}(t) = \frac{(t_{k+1} - t)\, B^{(N)}(t_k) + (t - t_k)\, B^{(N)}(t_{k+1})}{t_{k+1} - t_k}$$

このとき, ブラウン運動は $N \to \infty$ とした極限, すなわち, $B^{(\infty)}(t)$ によって与えられる [2].

なお, ここでは記法を簡単にするため, $t \in [0,\ 1]$ の範囲でブラウン運動を定義したが, $t \in [0,\ \infty)$ でも同様に, 標準ブラウン運動と呼ぶ, 以下の $B(t)$ を定義することができる.

1. 時刻 $t \in [0,\ \infty)$ に対し, $B(t)$ は連続, かつ $B(0) = 0$ を満たす.
2. $B(t)$ の増加分は平均 0 の正規分布に従い[1], かつ, 増加分同士は独立である[2].

ブラウン運動 $B(t)$ を用いると, 原資産価格 $S(t)$ を与える幾何ブラウン運動は, 次式で定義される.

$$S(t) = S(0) \exp\{\nu t + \sigma B(t)\} \tag{5}$$

ただし, $S(0)$, ν および σ は既知の定数である.

(5) 式の両辺の対数をとると,

$$\ln S(t) - \ln S(0) = \nu t + \sigma B(t) \tag{6}$$

であるので, (5) 式は, 原資産価格の時刻 0 からの対数変化量が, 平均 νt, 分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従うことを示す. 一般に, $0 \leq s < t$ を満たす任意の t, s に対し,

$$\ln S(t) - \ln S(s) = \nu (t - s) + \sigma (B(t) - B(s)) \tag{7}$$

が成り立ち, 任意の時間間隔における原資産価格の対数変化量が, 平均 $\nu (t - s)$, 分散 $\sigma^2 (t - s)$ の正規確率変数として与えられることが確認できる.

3.2 確率微分方程式の導出

再び, ベルヌーイ試行の和によって与えられる $B^{(N)}(t)$ の定義に戻るが, $\delta_k := t_{k+1} - t_k$ $(= 1/N)$, $\delta B_k := B^{(N)}(t_{k+1}) - B^{(N)}(t_k)$ とすれば, $(\delta B_k)^2$ は以下の関係を満たしている.

$$(\delta B_k)^2 = \left(\pm 1/\sqrt{N}\right)^2 = 1/N = \delta_k$$

厳密な表現ではないが, $N \to \infty$ とすれば, 右辺の δ_k は $\mathrm{d}t$ に, 左辺の δB_k は $\mathrm{d}B(t) = B(t + \mathrm{d}t) - B(t)$ に収束するものと考えられるので,

$$(\mathrm{d}B(t))^2 = \mathrm{d}t \tag{8}$$

が成り立つ. また, $\mathrm{d}t\mathrm{d}B(t)$ は, 平均 0, 分散 $(\mathrm{d}t)^3 = 0$ の確率変数であるので, $\mathrm{d}t\mathrm{d}B(t) = 0$ を満たす. さらにこれらの項より高次の $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}B(t)$ に関する積, あるいは累乗を含む項は 0 である.

以上を念頭に, 2 変数関数 $f(t,\ x)$ のテーラー展開

$$\begin{aligned} &f(t + \delta_t,\ x + \delta_x) - f(t,\ x) \\ &\quad = f_t(t,\ x)\delta_t + f_x(t,\ x)\delta_x + \frac{1}{2} f_{tt}(t,\ x)\delta_t^2 \\ &\qquad + f_{tx}(t,\ x)\delta_t\delta_x + \frac{1}{2} f_{xx}(t,\ x)\delta_x^2 + \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

において[3] $f(t,\ x) \equiv S(0)\exp(\nu t + \sigma x)$, $x \equiv B(t)$, $\delta_t \equiv \mathrm{d}t$, $\delta_x \equiv \mathrm{d}B(t)$ とすることを考える. このとき $f(t,\ B(t)) = S(t)$ であり, $f_t = \nu S$, $f_x = \sigma S$, $f_{xx} = \sigma^2 S$, および $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}B$ の積や累乗の高次項が 0 になることに注意して, (9) 式に (8) 式を代入して整理すると次式を得る.

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}B(t) \tag{10}$$

ただし, $\mu := \nu + \sigma^2/2$ と置いた. (10) 式は, 幾何ブラウン運動に対する確率微分方程式であり, (5) 式を唯一解としてもつことが知られている [2].

次に, オプション価格が従う確率微分方程式を導く. オプション価格 $V(t)$ はこれまでのところ未知の変数であるが, ここでは, 時点 t と原資産価格 $S(t)$ の関数, すなわち $V(t) = v(t,\ S(t))$ で与えられるものとして議論を進める. (9) 式において, $f \equiv v$, $x \equiv S(t)$, $\delta_t \equiv \mathrm{d}t$, $\delta_x \equiv \mathrm{d}S(t)$ と置き直すと,

---

[1] $0 < t_1 < t_2$ を満たす任意の t_1, t_2 に対し, $B(t_2) - B(t_1)$ は, 平均 0, 分散 $t_2 - t_1$ の正規分布に従う.

[2] $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ を満たす任意の t_1, t_2, t_3, t_4 に対して, $B(t_2) - B(t_1)$ と $B(t_4) - B(t_3)$ は独立である.

[3] ただし, 添え字は当該変数についての偏微分, 添え字の個数は偏微分の回数である. なお, 記法が煩雑になる場合, 以降, 引数を適宜省略して記述することがある.

$$
\begin{aligned}
&v(t+\mathrm{d}t,\ S(t)+\mathrm{d}S(t))-v(t,\ S(t))\\
&\quad=v_t(t,\ S(t))\mathrm{d}t+v_x(t,\ S(t))\mathrm{d}S(t)\\
&\qquad+\frac{1}{2}v_{xx}(t,\ S(t))\,(\mathrm{d}S(t))^2+\cdots
\end{aligned}
$$

である．また，(10) 式より，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}S(t))^2&=\mu^2S^2(\mathrm{d}t)^2+2\mu\sigma S^2\mathrm{d}t\mathrm{d}B+\sigma^2S^2(\mathrm{d}B)^2\\
&=\sigma^2S^2\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

であるので，$V(t)$ は次式を満たす．

$$
\mathrm{d}V=v_x\mathrm{d}S+\left(v_t+\frac{1}{2}\sigma^2S^2v_{xx}\right)\mathrm{d}t \tag{11}
$$

さらに，(10) 式右辺を代入して整理すると，オプション価格 $V(t)$ が従う確率微分方程式として次式を得る．

$$
\mathrm{d}V(t)=\left(v_t+\mu Sv_x+\frac{1}{2}\sigma^2S^2v_{xx}\right)\mathrm{d}t+\sigma Sv_x\mathrm{d}B \tag{12}
$$

3.3 Black–Scholes 方程式

(11) 式において，オプション価格が $\mathrm{d}S, \mathrm{d}t$ の比例モデルとして記述されるので，係数項が等しくなるように (3) 式の $\Delta(t), \Omega(t)$ を設定することができれば，無裁定条件の下で，複製ポートフォリオ価値がオプション価値を与える．まず，$\mathrm{d}S, \mathrm{d}t$ の係数が等しいとすると，

$$
\Delta(t)=v_x\,(t,\ S(t)) \tag{13}
$$

$$
v_t+\frac{1}{2}\sigma^2S^2v_{xx}=r\,[\Omega-\Delta S] \tag{14}
$$

である．(14) 式において，ポートフォリオ価値がオプション価値を複製する場合，$\Omega(t)=V(t)=v\,(t,\ S(t))$ であり，さらに (13) 式 $\Delta=v_x$ を代入すると，

$$
v_t+\frac{1}{2}\sigma^2S^2v_{xx}=r\,[V-v_xS]
$$

となり，移項して次式を得る．

$$
\begin{aligned}
rv\,(t,\ S)=&v_t\,(t,\ S)+rSv_x\,(t,\ S)\\
&+\frac{1}{2}\sigma^2S^2v_{xx}\,(t,\ S)
\end{aligned} \tag{15}
$$

(15) 式は Black–Scholes 方程式と呼ばれ，適当な境界条件を適用して解くことができる [2].

4. Black–Scholes 価格公式の導出

ヨーロピアンオプションの場合，オプション価格の終端条件は (4) 式で与えられ，コール・プットに対して，Black–Scholes 価格公式と呼ばれる以下の解析解 $V(t)=C_{BS}(t), V(t)=P_{BS}(t)$ が得られる．

$$
C_{BS}\,(t)=S\,(t)\,\mathbf{N}\,(d_{1,t})-Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}\,(d_{2,t}) \tag{16}
$$

$$
P_{BS}(t)=-S\,(t)\,\mathbf{N}(-d_{1,t})+Ke^{-r(T-t)}\mathbf{N}(-d_{2,t}) \tag{17}
$$

ただし，$\mathbf{N}\,(\cdot)$ は標準正規分布関数であり，$d_{1,t}$，$d_{2,t}$ は次のように定義される．

$$
d_{1,t}:=\frac{\ln\left(S\,(t)\,/K\right)+\left(r+\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{18}
$$

$$
d_{2,t}:=d_{1,t}-\sigma\sqrt{T-t} \tag{19}
$$

以下，ヨーロピアンコールオプションに対して，(16) 式が Black–Scholes 方程式の解であることを示そう．ただし，コールオプションの価格が求まれば，プット・コールパリティからヨーロピアンプットオプションの価格も算出されることに注意する．

4.1 マルチンゲールと測度変換

(10) 式や (12) 式などの確率微分方程式において，第 1 項は無限小時間 $\mathrm{d}t$ が経過した際の確定的な変化量，第 2 項は確率的変化量を表している．特に確率的変化を表す第 2 項の平均は 0 であるので[4]，第 1 項は資産価格の平均的増加量（あるいは減少量）を与え，ドリフト項と呼ばれる．ドリフト項が 0 であれば，資産価格は平均的には増加も減少もしない確率過程に従う．このような確率過程をマルチンゲールといい，資産価格過程がマルチンゲールであれば，任意の将来時点 $T>0$ における期待資産価格は，現時点 $(=0)$ における資産価格に等しいという性質をもつ．すなわち，マルチンゲールである資産価格の現時点価値を求める問題は，将来時点資産価値の期待値を求める問題に帰着される．

3 節で定義した δB_k は，コインの表 (Hit)，あるいは裏 (Tail) によって，$\delta B_k^{(H)}=\sqrt{\delta_k}$, $\delta B_k^{(T)}=-\sqrt{\delta_k}$ のいずれかの値をとる確率変数であり，その平均は

$$
\frac{1}{2}\delta B_k^{(H)}+\frac{1}{2}\delta B_k^{(T)}=\frac{1}{2}\sqrt{\delta_k}-\frac{1}{2}\sqrt{\delta_k}=0
$$

である．今，コインの表裏の出方に偏りがあり，パラ

[4] 正式には伊藤積分の平均が 0 であることから成り立つ性質であるが，直感的には $\mathrm{d}B(t)$ の平均が 0 であることから成り立つものと考えて差し支えない．

メータ $\theta\ (\neq 0)$ に対し，表裏の出る確率が，それぞれ，

$$q_\theta = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2}\sqrt{\delta_k},\ \ 1 - q_\theta$$

であるものとしよう．このとき δB_k の平均は，

$$\begin{aligned} q_\theta \delta B_k^{(H)} + (1-q_\theta)\delta B_k^{(T)} &= (2q_\theta - 1)\sqrt{\delta_k} \\ &= \theta\delta_k \end{aligned}$$

で与えられる．このように，θ を用いて確率を変化させることで，δB_k の平均が 0 から $\theta\delta_k$ にシフトする．

3.1 節で，標準ブラウン運動を生成するベルヌーイ試行の和の極限について述べたが，コイン投げの表の確率が q_θ である場合，同じような手順で，次式を満たすドリフト付きブラウン運動 $B_\theta(t)$ が生成される．

$$\mathrm{d}B_\theta(t) = \theta \mathrm{d}t + \mathrm{d}B(t) \tag{20}$$

これらの手続きは，「確率を $q = 1/2$ から $q = q_\theta$ に変換することによって，標準ブラウン運動がドリフト付きブラウン運動に変換される」と表現され，その際の確率の変換は，測度変換と呼ばれる．同様に，ドリフト付きブラウン運動を標準ブラウン運動にする測度変換が存在するのであるが，連続時間設定における測度変換の存在条件は，一般に Girsanov の定理（文献 [2] 参照）によって与えられる．西原氏の解説記事で，二項モデルにおいては物理確率ではなくリスク中立確率を用いた割引期待値によって，オプション価格が定義されることが述べられているが，このようなリスク中立確率の導出は，測度変換の重要な応用例の一つである．

4.2　リスク中立化法の適用

(20) 式において，$\theta = (\mu - r)/\sigma$ の場合を $\tilde{B}(t)$ と表記する．このとき，$\tilde{B}(t)$ を標準ブラウン運動とする確率測度をリスク中立確率測度，$\tilde{B}(t)$ をリスク中立確率上のブラウン運動と呼ぶ．$\tilde{B}(t)$ を用いると，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{B}(t) &= \frac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}t + \mathrm{d}B(t) \\ \Leftrightarrow \mathrm{d}B(t) &= -\frac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{B}(t) \end{aligned}$$

より，原資産価格の確率微分方程式 (10) は以下のように書き直される．

$$\mathrm{d}S(t) = rS(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}\tilde{B}(t) \tag{21}$$

さらに，リスク中立確率の下では，$U(t) = u(t,\ S(t))$ が従う確率微分方程式は以下のように与えられる．

$$\mathrm{d}U(t) = \left(u_t + rSu_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 u_{xx}\right)\mathrm{d}t + \sigma S u_x \mathrm{d}\tilde{B} \tag{22}$$

ここで，Black–Scholes 方程式 (15) の解を与える関数 v に対し，関数 u が次式を満たすものとしよう．

$$u(t,\ x) := e^{r(T-t)}v(t,\ x) \tag{23}$$

このとき，$v(t,\ x) = e^{-r(T-t)}u(t,\ x)$ より，

$$\begin{aligned} v_t &= re^{-r(T-t)}u + e^{-r(T-t)}u_t \\ v_x &= e^{-r(T-t)}u_x \\ v_{xx} &= e^{-r(T-t)}u_{xx} \end{aligned}$$

を Black–Scholes 方程式 (15) に代入して整理すると，次式が成り立つ．

$$u_t + rSu_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 u_{xx} = 0 \tag{24}$$

(24) 式は，(22) 式のドリフト項が 0 であること，すなわち，$U(t) = u(t,\ S(t))$ がリスク中立確率上でマルチンゲールであることを意味する．また，(23) 式より，$U(t)$ は以下の終端条件を満たしている．

$$U(T) = e^{-r(T-T)}v(T,\ S) = v(T,\ S) = V(T) \tag{25}$$

さらに，$U(t)$ はリスク中立確率上でマルチンゲールであるので，$\tilde{\mathbb{E}}$ をリスク中立確率上の期待値とすると，

$$U(0) = \tilde{\mathbb{E}}\left[U(T)\right] = \tilde{\mathbb{E}}\left[V(T)\right] \tag{26}$$

が成り立つ．結果として，オプションの初期価値 $V(0)$ は次式を満たす．

$$V(0) = e^{-rT}U(0) = e^{-rT}\tilde{\mathbb{E}}\left[V(T)\right] \tag{27}$$

ヨーロピアンコールオプションについて，

$$V(0) = e^{-rT}\tilde{\mathbb{E}}\left[(S(T) - K)^+\right]$$

であるので（ただし $(x)^+ = \max\{x,\ 0\}$），(21) 式の解

$$S(T) = S(0)\exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\tilde{B}(T)\right\}$$

を代入すると，$\tilde{B}(T)$ は平均 0，分散 T の正規確率変数であることから，$V(0)$ は以下のように与えられる．

$$V(0) = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{rT}S(0)\phi(x) - K\right)^{+} p_s(x)\mathrm{d}x \tag{28}$$

ただし，$p_s(x)$ は標準正規確率密度関数

$$p_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

であり，$\phi(x)$ は次式で定義される．

$$\phi(x) := \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\sqrt{T}x\right\}$$

(28) 式は $e^{rT}S(0)\phi(x) - K \geq 0$ の範囲で積分すれば十分なので，$e^{rT}S(0)\phi(x) = K$ を満たす x を計算すると，そのような x は (19) 式で $t = 0$ とした $x = -d_{2,0}$ で与えられる．また，積分区間が $x \geq -d_{2,0}$ であれば (28) 式の被積分関数は非負なので積分内の $()^{+}$ を外すことができること，および，$\phi(x)$ と $p_s(x)$ に，

$$\begin{aligned}\phi(x)p_s(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\sigma\sqrt{T})^2}{2}\right\} \\ &= p_s\left(x - \sigma\sqrt{T}\right)\end{aligned} \tag{29}$$

の関係が成り立つことに注意すると，(28) 式右辺は以下のように書き表される．

$$\begin{aligned}&S(0)\int_{-d_{2,0}}^{\infty}\phi(x)p_s(x)\mathrm{d}x - Ke^{-rT}\int_{-d_{2,0}}^{\infty}p_s(x)\mathrm{d}x \\ &= S(0)\int_{-d_{1,0}}^{\infty}p_s(x)\mathrm{d}x - Ke^{-rT}\int_{-d_{2,0}}^{\infty}p_s(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{30}$$

ただし，(30) 式においては，$\phi(x)p_s(x)$ に (29) 式の関係を代入し，積分変数と付随する積分区間の変換 $-d_{2,0} \to -d_{1,0} = -\left(d_{2,0} + \sigma\sqrt{T}\right)$ を施した．さらに $p_s(x)$ の対称性から，標準正規分布関数 $\mathbf{N}(\cdot)$ の定義に従うように (30) 式の積分区間を変更すると，最終的には次式のように $V(0)$ を求めることができる．

$$\begin{aligned}V(0) &= S(0)\int_{-\infty}^{d_{1,0}}p_s(x)\mathrm{d}x - Ke^{-rT}\int_{-\infty}^{d_{2,0}}p_s(x)\mathrm{d}x \\ &= S(0)\mathbf{N}(d_{1,0}) - Ke^{-rT}\mathbf{N}(d_{2,0})\end{aligned} \tag{31}$$

なお，(31) 式において，初期時刻 0 を t で，満期 T を時刻 t から満期までの期間 $T - t$ で置き換えたものが，時刻 t におけるコールオプション価格 $C_{BS}(t)$ である．

5. ヘッジ・シミュレーション

5.1 デルタヘッジ

複製ポートフォリオの原資産保有単位である $\Delta(t)$ は (13) 式を満たし，オプション価格の原資産価格に対する 1 階偏微分として与えられる．このような値はオプションデルタと呼ばれ，(16), (17) 式の下では，以下のように求めることができる．

$$\Delta(t) = \begin{cases}\mathbf{N}(d_{1,t}) & \text{（コールの場合）} \\ \mathbf{N}(d_{1,t}) - 1 & \text{（プットの場合）}\end{cases} \tag{32}$$

また，デルタを用いて売り手側が複製ポートフォリオを構成するヘッジ手法は，デルタヘッジと呼ばれる．

デルタヘッジにおいて，原資産保有単位 $\Delta(t)$ は時点 t や原資産価格 $S(t)$ によって変化する．$\Delta(t)$ が変化すれば，原資産を売買することで，複製ポートフォリオの原資産保有単位を調整（リバランス）する必要が生じる．Black–Scholes モデルにおいて複製ポートフォリオを構成する際，理論的には連続的にリバランスを行う必要があるが，現実の市場で連続的に取引を行うことは不可能である．また，取引コストが存在する場合，連続的もしくはそれに近い頻度のリバランスは，必要資金面においても効率的とはいえない．このようにリバランス回数に制約があれば，仮に原資産が幾何ブラウン運動に従うとしても市場は非完備になる．本節では，リバランス回数に制約がある場合に生じるヘッジ誤差を，シミュレーションを用いて検証する[5]．

5.2 原資産サンプルパスの生成

まず，(5) 式の幾何ブラウン運動に従う原資産価格 $S(t)$ について，時点 $t \in [0,\ T]$ におけるサンプルパスをシミュレーションすることを考える．

時間軸 $t \in [0,\ T]$ を，以下のように N 分割する．

$$\begin{gathered}0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T \\ t_i - t_{i-1} = T/N,\ i = 1, \ldots, N\end{gathered} \tag{33}$$

このとき，$Z_i := B(t_i) - B(t_{i-1})$ とすると，$Z_i,\ i = 1, \ldots, N$ は互いに独立かつ同一の確率分布に従う，すな

[5] 本稿のプログラムは，文献 [3] の MATLAB ファイルを改良したものであり，筆者の HP から入手することができる．

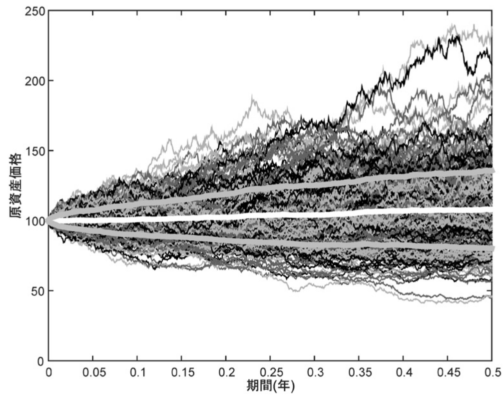

図 2　原資産サンプルパス

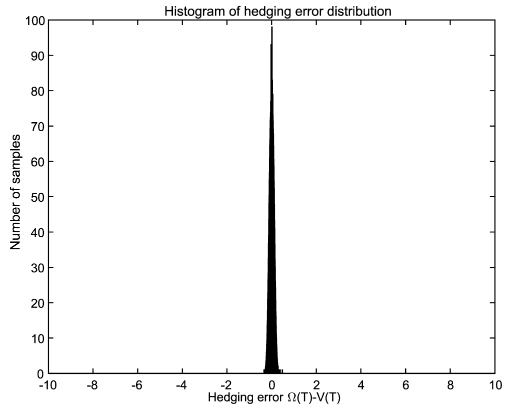

図 3　ヘッジ誤差分布（リバランス頻度：1 日 80 回，最大損失：0.35，標準偏差：0.09）

わち $i.i.d.$ (independent and identically distributed) 正規確率変数であり，

$$B(t_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[B\left(t_i\right) - B\left(t_{i-1}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} Z_i \quad (34)$$

が成り立つ．(34) 式は，離散時間上のブラウン運動のサンプルパスは，N 個の $i.i.d.$ 正規乱数の和によって生成されることを示す．また，ブラウン運動のサンプルパスが生成されれば，(5) 式に代入することで，幾何ブラウン運動のサンプルパスが生成される．

図 2 は，$\mu = 0.15$, $\sigma = 0.35$, $T = 0.5$, $N = 10{,}000$ としたうえで原資産のサンプルパスを 1,000 本生成したシミュレーション結果である．ただし，白線は各時点の平均価格，グレーの線は ±1 標準偏差を表している．

5.3　ヘッジ誤差の計算

幾何ブラウン運動のサンプルパスが生成されれば，Black–Scholes 価格公式を適用することで，各時点のオプション価格が計算される．ここでは，このようなオプションに対し，リバランス回数を指定したうえで (32) 式のオプションデルタを計算し，複製ポートフォリオを構築することを考える．このときオプションの売り手側は，複製ポートフォリオ価値からオプションペイオフを支払うことでポジションの清算を行うので，ヘッジ誤差は，満期時点におけるポートフォリオ価値からペイオフを引いた $\Omega(T) - V(T)$ によって与えられる．

満期に至るまで M 回リバランスが行われるとした際の，リバランス間隔を δ_M，m 番目のリバランスにおいて計算されるデルタを Δ_m，その時点の原資産価値を S_m とすれば，m 番目と $m+1$ 番目のリバランス時点におけるポートフォリオ価値 Ω_m と Ω_{m+1} $(m = 1, \ldots, M-1)$ の間に以下の関係が成り立つ．

$$\Omega_{m+1} = \Delta_m S_m + e^{r\delta_M}\left(\Omega_m - \Delta_m S_m\right)$$

このとき，満期時点におけるポートフォリオ価値 $\Omega(T)$ とヘッジ誤差 $H_e^{(M)}$ は，次式を満たす．

$$\begin{aligned} \Omega(T) &= \Delta_M S(T) + e^{r\hat{\delta}_M}\left(\Omega_M - \Delta_M S_M\right) \\ H_e^{(M)} &= \Omega(T) - V(T) \end{aligned}$$

ただし，$\hat{\delta}_M$ は，M 回目のリバランスが行われた時点から満期までの期間である．

図 3 は，図 2 で生成した原資産価格のサンプルパスについて，リバランス回数を，連続取引に近いと考えられる 10,000 回（1 日につき 80 回程度）に設定し，コールオプションの複製ポートフォリオを構築した際のヘッジ誤差分布の例である．ただし，$K = 100$, $r = 0.02$ であり，コールオプションの初期価格は $V(0) \simeq 10$ を満たしている．また，$V(0)$ を基準に横軸の範囲を $[-10, 10]$ として表示していることに注意する．この場合，ヘッジ誤差の絶対値はオプション価格 $V(0) \simeq 10$ に対して 0.5 以内に収まっており，複製ポートフォリオの高い追従性能が達成されていることがわかる．

一方，リバランス回数を 1 日 1 回（0.5 年で 126 回）とすると，図 4 に示すように，ヘッジ誤差のヒストグラムは正負の方向にばらつきをもつ．特に，ヘッジ誤差による損失は最大で約 2.9 と相対的に大きな値となる．さらに，リバランス回数を週 1 回（0.5 年で 18 回）とした場合，ヘッジ誤差のヒストグラムは図 5 で与えられ，最大ヘッジ誤差は絶対値で約 9.8 とほぼオプション価格と同額の損失を与える．また，標準偏差は 2.0 と，

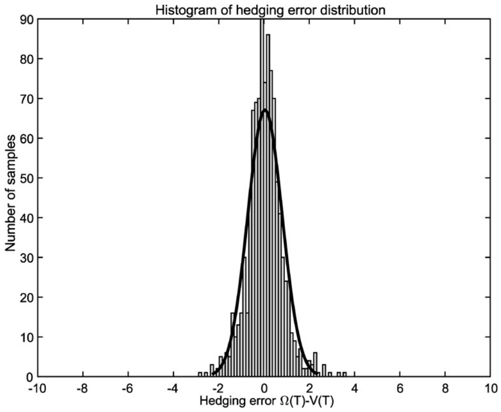

図 4　ヘッジ誤差分布（リバランス頻度：1 日 1 回，最大損失：2.9，標準偏差：0.76）

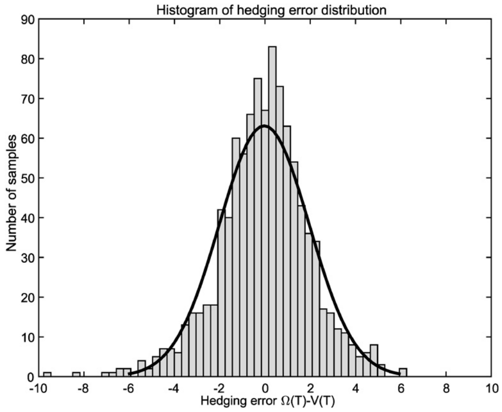

図 5　ヘッジ誤差分布（リバランス頻度：週 1 回，最大損失：9.8，標準偏差：2.0）

ヘッジ誤差のばらつきもほかと比べて高い．

6.　おわりに

本稿では，連続時間モデルに基づくオプション価格付け・ヘッジについて説明したうえで，シミュレーションを用いて実際に結果を確認しながら，ヘッジ誤差分布の分析を行った．なお，本稿では，複製ポートフォリオを構築するオプションの売り手側が，ボラティリティや無リスク金利など，パラメータの真値が既知であるとの設定で分析を行ったが，本来，これらのパラメータも市場データから推定する必要があり，パラメータ推定誤差もヘッジ精度に影響を与える可能性がある．配布プログラムに修正を加えることで，このような，パラメータ推定誤差に対するロバスト性の検証を行うことができるので，興味のある人は実施してほしい．

参考文献

[1] F. Black and M. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy*, **81**, pp. 637–654, 1973.

[2] S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004.

[3] 山田雄二, 牧本直樹,『計算で学ぶファイナンス—MATLAB による実装—』，朝倉書店，2008.

