資産価格付けの基本定理
—ポートフォリオと確率の双対性—

後藤　順哉

金融工学における価格付けではリスク中立確率に基づく評価が行われる．本稿では有限個のシナリオをもつ1期間の市場モデルが無裁定であることが，リスク中立確率ベクトルが存在するための必要十分条件であることを，線形計画 (LP) の双対定理を用いて紹介する．

キーワード：非完備市場，無裁定条件，リスク中立確率，LP の双対定理

1. 非完備市場と複製ポートフォリオ

本特集の西原氏の記事 [1] で見たように，2 項モデルに基づく派生商品の価格はリスク中立確率と呼ばれる確率ベクトルを用い，現在価値に割り引かれた将来価格の期待値として与えられる．リスク中立確率はより一般的な市場モデルでも現れ，価格付けにおいて重要な役割を演じる．本稿では，より一般的な市場モデルにおいてリスク中立確率の存在と市場モデルの密接な関係を述べた，価格付けの基本定理と呼ばれる命題について説明する．

まず簡単な価格付けの例から始めよう．

2 資産 3 シナリオの例　6 月初旬現在，A 社株が 1 単位 55 万円で取引されている．株価は次の冬のありうるシナリオ「暖冬 ω_1」「平年並み ω_2」「厳冬 ω_3」に応じて半年後に 25 万円，40 万円，60 万円のいずれかである．なお，各シナリオの生起確率は $\frac{1}{3}$ ずつとする（が，[1] でそうであったように，この確率は無裁定の価格付けに影響を与えない）．また，安全資産である銀行に投資（預金・借入）可能であり，簡単のため金利は 0%であるとする．（この単純化については本稿終盤で補足する．）この状況は図 1 のような三分木で表すことができる．ただし，各状態に付された数値のペアは銀行預金（左）と A 社株（右）の投資 1 単位当たりの価値を表すとする．たとえば，安全資産である銀行預金については半年後どのシナリオでも 1 となっていて，当初単位価値 1 が半年後も確実に 1 のままであることを表現している．

現在		半年後	シナリオ
	$\overset{\frac{1}{3}}{\nearrow}$	$(1,25)$	暖冬 ω_1
$(1,55)$	$\overset{\frac{1}{3}}{\rightarrow}$	$(1,40)$	平年並み ω_2
	$\underset{\frac{1}{3}}{\searrow}$	$(1,60)$	厳冬 ω_3

図 1　3 シナリオに対する 2 資産の価格変化

$$
c \;\begin{cases} \nearrow \max\{45-25,0\}=20 & \text{：シナリオ } \omega_1 \\ \rightarrow \max\{45-40,0\}=5 & \text{：シナリオ } \omega_2 \\ \searrow \max\{45-60,0\}=0 & \text{：シナリオ } \omega_3 \end{cases}
$$

図 2　株式 A のプットオプションの価格変化

$$
y_1+55y_2 \;\begin{cases} \nearrow y_1+25y_2 & \text{：シナリオ } \omega_1 \\ \rightarrow y_1+40y_2 & \text{：シナリオ } \omega_2 \\ \searrow y_1+60y_2 & \text{：シナリオ } \omega_3 \end{cases}
$$

図 3　ポートフォリオの価値変化

このとき，半年後に A 社株 1 単位を 45 万円で売る権利（ヨーロピアンプットオプション）の価格付けを考えたい．このプットの価格の変化は図 2 のように表される．

プットの適正価格 c を求めるため，本特集の記事 [1] で登場した複製ポートフォリオの議論を適用してみよう．つまり，将来時点（この例では半年後）において価値が等しい資産は現在も同じ価値を有するという，いわゆる一物一価の原則を用いる．銀行預金額と株式の購入単位数をそれぞれ y_1, y_2 とする．ただし資産は任意の実数の単位で投資可能とする．なお，$y_1 < 0$ は銀行借入，$y_2 < 0$ は空売りを意味する．ポートフォリオ (y_1, y_2) の価値が

$$
\text{預金の単位価値} \times y_1 + \text{株式 A の価格} \times y_2
$$

と表されることから，その変化は図 3 のようになる．

半年後のプット 1 単位の価値を複製するポートフォ

ごとう　じゅんや
中央大学理工学部
〒112–8551 東京都文京区春日 1–13–27
jgoto@indsys.chuo-u.ac.jp

リオは，次の連立一次方程式の解として得られる：

$$\begin{cases} y_1 + 25y_2 = 20 & \text{：シナリオ } \omega_1 \\ y_1 + 40y_2 = 5 & \text{：シナリオ } \omega_2 \\ y_1 + 60y_2 = 0 & \text{：シナリオ } \omega_3 \end{cases}$$

しかしこれには解が存在しない．このプットオプションのような，複製できない資産がある状況を非完備市場と呼ぶ．本特集枇々木氏の記事 [2] で見たポートフォリオ最適化が扱うような，頻度高く取引できない状況では非完備市場モデルを考える意義が生じる．また，現実の取引においても厳密な意味で完全な複製はできない．この点については本特集山田氏の記事 [3] を参照していただきたい．

さて，非完備市場で適切な価格を見いだすにはどうしたらよいであろうか？　できるだけ「複製」に近づけるという立場から，最小 2 乗法に基づく方法が考えられるかもしれない．つまり，半年後におけるポートフォリオとプットの価値の差の 2 乗

$$(y_1+25y_2-20)^2+(y_1+40y_2-5)^2+(y_1+60y_2-0)^2$$

を最小にするポートフォリオ (y_1, y_2) を求め，その当初の価値 y_1+55y_2 をプットの価格 c とするのである．この場合，$(y_1, y_2) = (\frac{2325}{74}, -\frac{41}{74}) \approx (31.42, -0.55), c = \frac{35}{37}$ となる．

実はこの方法は重大な欠点を有している．それを明らかにするために，保守的な立場から c の上限と下限を求めることを考えよう．まず，半年後のどのシナリオにおいてもプット 1 単位の価値以上となるポートフォリオ (y_1, y_2) を考えよう．したがって，その当初の価値 $y_1 + 55y_2$ もプットのそれ以上，つまり $y_1 + 55y_2 \geq c$ が成り立つと考えるのは自然であろう．これより c の上限は次の LP の最適値 $\overline{c}$ として得られる：

$$\overline{c} = \left|\begin{array}{lll} \underset{y_1, y_2}{\text{最小化}} & y_1 + 55y_2 & \\ \text{条　件} & y_1 + 25y_2 \geq 20 & \text{：シナリオ } \omega_1 \\ & y_1 + 40y_2 \geq 5 & \text{：シナリオ } \omega_2 \\ & y_1 + 60y_2 \geq 0 & \text{：シナリオ } \omega_3 \end{array}\right. \tag{1}$$

この LP はプット 1 単位を売却すると同時に，半年後の支払いに充てる資金を最小コストで市場から調達しようとする，プットの売り手の問題としても解釈できる．もし最小値 $\overline{c}$ が売値 c よりも小さければ ($\overline{c} < c$)，その売り手はプット 1 単位当たり c で売ると同時にプット 1 単位につきポートフォリオ (y_1, y_2) を $\overline{c}$ で購入することで，現時点でまず正の利益を上げたうえに，「半年後にどのシナリオが起こっても支払いが受け取りを超過することはない」という状況を手にすることができる．どんなシナリオが起こっても儲けることができるので，誰もが売り手になりたがるだろう．したがって，c が均衡価格，すなわち需要と供給が釣り合う価格であるためには，$c \leq \overline{c}$ である必要がある．これが，$\overline{c}$ が c の上限を与えるロジックである．ちなみに LP(1) の解は $(y_1^\star, y_2^\star) = (\frac{240}{7}, -\frac{4}{7}) \approx (34.29, -0.57)$ で，最適値は $\overline{c} = \frac{20}{7} \approx 2.857$ である．

逆に価格の下限は，プットを購入すると同時に，半年後のお金の受け取りをあてにして，現在調達できる資金を最大にしようとするプットの買い手の問題であり，次の LP の最適値 $\underline{c}$ で与えられる：

$$\underline{c} = \left|\begin{array}{lll} \underset{y_1, y_2}{\text{最大化}} & y_1 + 55y_2 & \\ \text{条　件} & y_1 + 25y_2 \leq 20 & \text{：シナリオ } \omega_1 \\ & y_1 + 40y_2 \leq 5 & \text{：シナリオ } \omega_2 \\ & y_1 + 60y_2 \leq 0 & \text{：シナリオ } \omega_3 \end{array}\right. \tag{2}$$

この解は $(y_1, y_2) = (15, -0.25)$, $\underline{c} = 1.25$ となる．

二つの LP の結果から c は $1.25 \leq c \leq \frac{20}{7}$ を満たさなければならないことがわかる．よって，先に提示した最小 2 乗法に基づく価格 $c = \frac{35}{37} \approx 0.946$ は過小評価である．つまり，その価格を売り手として提示すれば，買い手が殺到し必ず損をする．このように均衡価格をもたらすとは限らないという事実は最小 2 乗法に基づく複製近似法の問題点である．

以上の観察は [1] で見た完備市場とは異なり非完備市場では複製が必ずしもできないこと，そしてそのことによって無裁定概念だけでは価格が一つに定まらない可能性があることを示唆している．そこで以降ではまず，非完備市場の特徴付けを行い，[1] で見たリスク中立確率がどのように関わるかを見てみよう．

2. 資産価格付けの基本定理

図 1 の状況を一般的に記述しておこう．市場で n 資産が取引されていて，現時点の資産価格と 1 期間後の m 個のシナリオにおける資産価格の現在価値が，以下のようなベクトル $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ と行列 $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ でそれぞれ与えられているとする：

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \text{資産} & & & \\
 & & 1 & \cdots & n & & \\
\boxed{\boldsymbol{s}^\top} & := & s_1 & \cdots & s_n & \text{現在} & \\
 & & S_{11} & \cdots & S_{1n} & \omega_1 & \leftarrow p_1 \\
 & & S_{21} & \cdots & S_{2n} & \omega_2 & \leftarrow p_2 \\
\boxed{\boldsymbol{S}} & := & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\
 & & S_{m1} & \cdots & S_{mn} & \omega_m & \leftarrow p_m \\
 & & \uparrow & \cdots & \uparrow & \text{シナリオ} & \text{確率} \\
 & & y_1 & \cdots & y_n\ \} & \text{ポートフォリオ} &
\end{array}
$$

ここでシナリオ ω_i が起こる確率を $p_i > 0$ とする．簡単のため，資産 1 を安全資産とする．すべての価格は現在価値で表されている，すなわち資産 1 の価格で割って基準化されているので，$\boldsymbol{s}$ の第 1 要素と行列 $\boldsymbol{S}$ の 1 列目の要素はいずれも 1 である $(s_1 = S_{11} = \cdots = S_{m1} = 1)$ ことに注意しよう．このような役割をする資産は価値尺度財あるいはニュメレールと呼ばれる[1]．

このような価格のテーブルは不確実な市場価格を表現する市場モデルであり，$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ で表すことにする．市場モデル $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ はどんなものでもよいかというとそうではない．まずそれを特徴付けておこう．

$$\sum_{j=1}^{n} (S_{ij} - s_j) y_j \geq 0,\ i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

かつ，少なくとも一つの不等式が $>$ で成り立つとき，$\boldsymbol{y}$ は裁定ポートフォリオという．(3) はどのシナリオ ω_i が起こっても，1 期後のポートフォリオ価値 $\sum_{j=1}^{n} S_{ij} y_j$ が当初価値 $\sum_{j=1}^{n} s_j y_j$ 以上であることを記述している[2]ことから，裁定ポートフォリオは「絶対に損をすることなく，かつ，あわよくば儲かる投資戦略」である．「ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ の要素が全部非負で少なくとも一つの要素で正」という条件をまとめて $\boldsymbol{x} \gneq \boldsymbol{0}$ と書くことにすると，裁定ポートフォリオの条件は

$$(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{1}\boldsymbol{s}^\top)\boldsymbol{y} \gneq \boldsymbol{0} \tag{4}$$

と簡潔に表すことができる．ただし $\boldsymbol{1}$ は 1 を m 個並べた列ベクトルを表す．

裁定ポートフォリオが存在すると合理的な投資家はできる限りそれを需要するため，$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ は均衡価格たりえない．したがって，金融工学ではしばしば市場モデルが無裁定であることを仮定する．たとえば，図 1 の 2 資産 3 シナリオの例について条件 (3) 式は

$$
\begin{cases}
0 \cdot y_1 + (25 - 55) y_2 \geq 0 & \text{：シナリオ } \omega_1 \\
0 \cdot y_1 + (40 - 55) y_2 \geq 0 & \text{：シナリオ } \omega_2 \\
0 \cdot y_1 + (60 - 55) y_2 \geq 0 & \text{：シナリオ } \omega_3
\end{cases}
$$

となるが，これを満たすには $y_2 = 0$ が必要である．しかし，そのとき三つの $\geq$ はすべて $=$ になってしまうので裁定ポートフォリオは存在しない．

一般に無裁定条件は以下のように特徴付けられる．

定理 1（資産価格付けの基本定理）． 市場に裁定ポートフォリオが存在しないことと，以下を満たす $\boldsymbol{q} := (q_1, \ldots, q_m)^\top$ が存在することは必要かつ十分である：

$$\sum_{i=1}^{m} q_i S_{ij} = s_j,\ j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$q_i > 0,\ i = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

条件 (5) の 1 本目が $q_1 + \cdots + q_m = 1$ であることに注意しよう．条件 (6) と併せれば，各 $\boldsymbol{q}$ は形式的にシナリオ $\omega_1, \ldots, \omega_m$ の上の確率ベクトルとみなせる．すると，(5) の 2〜n 本目の等式はそれぞれ資産 $2, \ldots, n$ の 1 期後の価格の確率ベクトル $\boldsymbol{q}$ の下での期待値が当初価格と等しいことを意味している．すなわち，$\boldsymbol{S}_j$ を行列 $\boldsymbol{S}$ の第 j 列ベクトルとし，$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^m$ に対して $\mathbb{E}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{X}$ とすれば，(5) は

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{S}_j) = s_j,\ j = 1, \ldots, n,$$

のように書くことができる．これは資産 j の当初価値 s_j として将来の価値 $\boldsymbol{S}_j$ の期待値を採用する，リスク中立と呼ばれる投資家の態度と共通点をもつことから，$\boldsymbol{q}$ はリスク中立確率（ベクトル）と呼ばれる．ちなみにすでに無裁定であることを確認した図 1 の例については，条件 (5) が

$$
\begin{cases}
q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\
25 q_1 + 40 q_2 + 60 q_3 = 55
\end{cases}
$$

となり，これを解くと $\frac{3}{4} < t < \frac{6}{7}$ に対し

$$(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{4}{3} t - 1, 2 - \frac{7}{3} t, t \right) \tag{7}$$

[1] ニュメレールは「全シナリオで正の価値を有する資産」であれば，安全資産（つまり，価値がシナリオに依らず一定）でなくともよい．

[2] なお $s_1 = S_{11} = \cdots = S_{m1}$ より (3) 式 1 項目の係数は 0 である．

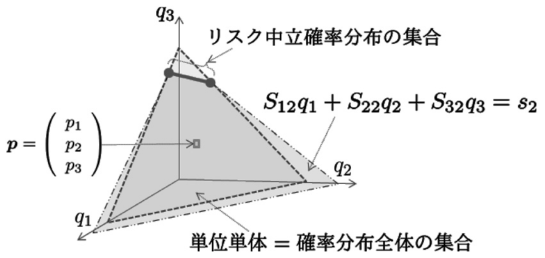

図 4　リスク中立確率

なるリスク中立確率が存在している．図 4 はこの集合を図示しているが，リスク中立確率ベクトルが無限個存在している．リスク中立確率 $\boldsymbol{q}$ は元々想定していた確率 $\boldsymbol{p}$ とは別物であることに注意されたい．

では図 1 の 2 資産に加えて最小 2 乗法に基づく複製で得られた $c = \frac{35}{37}$ を当初価格とする図 2 のプットを三つ目の資産として考えた市場モデルを考えてみよう．このとき条件 (3) 式は

$$\begin{cases} -30y_2 + (20 - \frac{35}{37})y_3 \geq 0 & ：シナリオ\ \omega_1 \\ -15y_2 + \ \ (5 - \frac{35}{37})y_3 \geq 0 & ：シナリオ\ \omega_2 \\ \quad 5y_2 + \ \ (0 - \frac{35}{37})y_3 \geq 0 & ：シナリオ\ \omega_3 \end{cases}$$

となるが，領域の図を描くなどすると $0 < \frac{7}{37}y_3 \leq y_2 \leq \frac{10}{37}y_3$ なる (y_1, y_2, y_3) がこれを満たす裁定ポートフォリオであることが確認できる．また対応するリスク中立確率の条件 (5) は

$$\begin{cases} q_1 + \quad q_2 + \quad q_3 = 1 \\ 25q_1 + 40q_2 + 60q_3 = 55 \\ 20q_1 + \ 5q_2 \qquad\quad = \frac{35}{37} \end{cases}$$

であるが，1 番目と 2 番目の 2 式を満たす解は (7) で与えられるからこれを 3 番目の式左辺に代入すると，左辺は $\frac{5}{4}$ より大きく $\frac{20}{7}$ より小さくなければならない．$c = \frac{35}{37}$ はこれを満たさないので，リスク中立確率が存在しないことがわかる．ここで出てきた下限 $\frac{5}{4}$ と上限 $\frac{20}{7}$ は前節で出てきた $\underline{c}$, $\overline{c}$ に一致していることに注意しておこう．これは後で双対問題を考えるときに再登場する事実である．

裁定ポートフォリオの非存在とリスク中立確率の存在が等価であることを主張する定理 1 は資産価格付けの第 1 基本定理と呼ばれる命題の単純なケースである．ちなみに，第 2 基本定理は無裁定条件の下，市場が完備であることが行列 $\boldsymbol{S}$ の階数が m であることと必要十分であるというものである．二つの基本定理の幾何的な解釈については [4] などを参考にしていただきたい．

命題は Stiemke の補題として知られる二者択一の定理そのものであるが，LP の教材としても興味深いと思われるので証明を記しておこう．

定理 1 の証明　まず “$\Leftarrow$” 方向を背理法で示す．リスク中立確率 $\hat{\boldsymbol{q}}$ と裁定ポートフォリオ $\hat{\boldsymbol{y}}$ が存在するとする．後者の定義 (4) 式から $(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{1}\boldsymbol{s}^\top)\hat{\boldsymbol{y}} \gneq \boldsymbol{0}$ である．これと条件 (6) より，$\hat{\boldsymbol{q}}^\top(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{1}\boldsymbol{s}^\top)\hat{\boldsymbol{y}} > 0$ が成り立つ．一方 (5) 式の両辺を y_j 倍して j について足し合わせると $\sum_{j=1}^n(\sum_{i=1}^m \hat{q}_i S_{ij} - s_j)\hat{y}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \hat{q}_i(S_{ij} - s_j)\hat{y}_j = \hat{\boldsymbol{q}}^\top(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{1}\boldsymbol{s}^\top)\hat{\boldsymbol{y}} = 0$ であるから矛盾する．

次に “$\Rightarrow$” 方向を示す．まず LP の双対定理について復習しておこう．LP の双対定理とは一組の LP

$$\left|\begin{array}{l} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{最小化}}\ \boldsymbol{d}^\top\boldsymbol{x} \\ \text{条　件}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \underset{\boldsymbol{z}}{\text{最大化}}\ \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{z} \\ \text{条　件}\ \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right. \tag{8}$$

について「一方が最適解をもつとき，もう一方も最適解をもち，そのとき両者の最適値は一致する」というものである．

まず，少なくとも一つの要素で正である非負ベクトル $\boldsymbol{C} \gneq \boldsymbol{0}$ に対し，次の LP を導入する：

$$\left|\begin{array}{l} \underset{\boldsymbol{y}, c}{\text{最小化}}\ c \\ \text{条　件}\ (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{1}\boldsymbol{s}^\top)\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{C} - c\boldsymbol{1}. \end{array}\right. \tag{9}$$

ここで任意の $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{C}$ に対して

$$(\boldsymbol{y}, c) = (\boldsymbol{0}, \max\{C_1, \ldots, C_m\}) \tag{10}$$

が (9) の実行可能解であることに注意しよう．つまり，(9) は常に実行可能な LP である．また，実行可能解 (10) の目的関数値が $c = \max\{C_1, \ldots, C_m\} > 0$ であることに注意する．ここまでで (9) は非有界（いくらでも目的関数を小さくできる）か，($\max\{C_1, \ldots, C_m\}$ 以下の）最小値を達成する最適解をもつかのいずれかであることになる．

ここで無裁定の仮定から (9) は最適解をもち，しかもその目的関数値（最適値）は正でなければならない．なぜならば，もし $\hat{c} \leq 0$ なる実行可能解 $(\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{c})$ が存在すると，$(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{1}\boldsymbol{s}^\top)\hat{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{C} - \hat{c}\boldsymbol{1} \gneq \boldsymbol{0}$ であり，$\hat{\boldsymbol{y}}$ が裁定ポートフォリオとなってしまうからである．

ここで (8) において

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ c \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{l} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S} - \boldsymbol{1}\boldsymbol{s}^\top & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{C} \end{array}$$

と設定し整理すると，(9) とその双対問題

$$\left|\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{q}}{\text{最大化}} & \boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{q} \\ \text{条　件} & \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{q} = \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{q} = 1,\ \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right. \tag{11}$$

が得られることに注意する．LP の双対定理より，(9) が最適解をもつときその双対問題 (11) も最適解をもち，(9) と (11) の最適値は一致する．ここまででリスク中立確率の条件 (5) と $\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}$ を満たす確率ベクトルが存在することがいえた．証明を完了にするには (6) を満たすベクトルが存在することを示せばよい．

さて，各シナリオ ω_k に対し，$a_i^k = 1$（$i = k$ のとき），0（その他の i）なる $\boldsymbol{a}^k \gneq \boldsymbol{0}$ を定義する．$\boldsymbol{a}^k$ はシナリオ ω_k のとき価値 1 をもつので，シナリオ k の価値を表すと解釈できる．$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}^k$ に対する (11) の最適解を $\boldsymbol{q}^k$ とする．ちなみにこのような $\boldsymbol{C}$ をもつ資産は Arrow–Debreu 証券と呼ばれる．$\boldsymbol{a}^k \gneq \boldsymbol{0}$ であるから，上記の議論よりその最適値は正である．

$$(\boldsymbol{a}^k)^\top \boldsymbol{q}^k = q_k^k > 0. \tag{12}$$

これを踏まえ，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ それぞれに対する (11) の解 $\boldsymbol{q}^1, \ldots, \boldsymbol{q}^m$ の重心 $\bar{\boldsymbol{q}} := \sum_{k=1}^m \boldsymbol{q}^k/m$ を考える．$\bar{\boldsymbol{q}}$ は (11) の制約を満たし，$\bar{\boldsymbol{q}}$ の作り方と (12) から k 番目の要素に正のものを含むため，各成分は正である．よって，$\bar{\boldsymbol{q}}$ はリスク中立確率となっている．（証明終）

3. 非完備市場における価格付け

前節で，無裁定を仮定することとリスク中立確率が存在することが等価であることがわかった．そこで無裁定を仮定したとして，新しい資産の価格付けにリスク中立確率がどのような役割を果たすかを理解していこう．無裁定の市場モデル $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ に追加された，$\boldsymbol{C} := (C_1, \ldots, C_m)^\top$ なる（現在価値評価の）将来価格ベクトルをもつ新しい資産の現在の価格 c を求めるのが，１節の問題を一般化した問題である．

１節と同じロジックに基づくと，新しい資産の売り手と買い手の問題 (1), (2) はそれぞれ

$$\overline{c} = \left|\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{y}}{\text{最小化}} & \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{条　件} & \boldsymbol{S}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{C}, \end{array}\right. \qquad \underline{c} = \left|\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{y}}{\text{最大化}} & \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{条　件} & \boldsymbol{S}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{C} \end{array}\right. \tag{13}$$

と書ける．また，(13) の双対問題はそれぞれ

$$\begin{array}{lll} & \nearrow 35 & ：シナリオ\ \omega_1 \\ b & \rightarrow 50 & ：シナリオ\ \omega_2 \\ & \searrow 70 & ：シナリオ\ \omega_3 \end{array}$$

図 5　あるオプションの価格変化

$$\left|\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{q}}{\text{最大化}} \text{ or } \underset{\boldsymbol{q}}{\text{最小化}} & \mathbb{E}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{C}) \\ \text{条　件} & \mathbb{E}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{S}_j) = s_j,\ j = 2, \ldots, n, \\ & \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{q} = 1,\ \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right.$$

とシンボリックに表すことができる．定理 1 より，$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ が無裁定ならば条件 (5), (6) を満たす解が存在するため，双対問題は実行可能解をもつ．また実行可能領域は有界のためこの双対問題は最適解をもつ．また双対定理より主問題も最適解をもつ．よって次の命題が得られる．

> **命題 1.**　市場モデル $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ が無裁定のとき，LP (13) はいずれも最適解をもつ．

命題 1 と冒頭の例題のロジックより，無裁定の仮定の下で $\underline{c} \leq c \leq \overline{c}$ が成り立つことに注意しよう．

命題 1 でも無裁定条件が効いていることに注意しよう．実際，(13) が非有界になるように裁定のある市場の例を作ることは難しくない．（演習問題としておく．）

次に $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ が無裁定で，複製ポートフォリオ $\hat{\boldsymbol{y}}$ が存在，つまり $\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}$ なる $\hat{\boldsymbol{y}}$ が (13) で実行可能とする．このとき売り手の問題の最適値 $\overline{c}$ は上から $\boldsymbol{s}^\top \hat{\boldsymbol{y}}$ で抑えられ，買い手の問題の最適値 $\underline{c}$ は下から抑えられるので，$\overline{c} \leq \boldsymbol{s}^\top \hat{\boldsymbol{y}} \leq \underline{c}$ が成り立つ．一方双対定理および二つの双対問題が同じ目的関数と実行可能領域をもつことから $\underline{c} \leq \overline{c}$ であるので，$c = \underline{c} = \overline{c} = \boldsymbol{s}^\top \hat{\boldsymbol{y}}$ を得る．これをまとめると次のようになる．

> **命題 2.**　市場モデル $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ が無裁定で，$\boldsymbol{C}$ の複製ポートフォリオ $\hat{\boldsymbol{y}}$ が存在するとき，(13) の最適値は $\boldsymbol{s}^\top \hat{\boldsymbol{y}}$ と一致する．同時にそれは任意のリスク中立確率 $\boldsymbol{q}$ に対して $\mathbb{E}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{C})$ と一致する．つまり，$c = \boldsymbol{s}^\top \hat{\boldsymbol{y}} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{C})$.

たとえば図 5 に示す例は図 1 の 2 資産で複製可能 $((\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (10, 1))$ であり，$b = 65$ と一意に定まる．実際 (7) を満たす任意のリスク中立確率に対して

$$65 = 35q_1 + 50q_2 + 70q_3$$

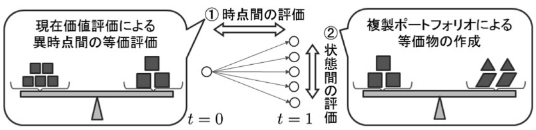

図 6　時点間の評価とシナリオ間の評価

を満たす．（ただし，対応するリスク中立確率は一意ではない．）

以上より，無裁定の市場で複製可能ならば，[1] で見たリスク中立確率に基づく評価式

$$c = \mathbb{E}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{C}) \tag{14}$$

はシナリオ数が増えても資産数が増えても成り立つことがわかる．興味深いのは「価格付けに必要なのがリスク中立確率 $\boldsymbol{q}$ であり，実際の確率 $\boldsymbol{p}$ は一見何の影響も与えていない」という点である．

では $\boldsymbol{q}$ はどのような経済的意味をもつのであろうか．ヒントは定理 1 の証明にある．いま Arrow–Debreu 証券 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}^k$，つまりシナリオ ω_k が起こったときにのみ 1 という価値をもち，それ以外は価値をもたない資産を考えてみよう．式 (14) より，この資産の価格 c は q_k，つまりリスク中立確率の第 k 成分に等しい．このことから，リスク中立確率（の各成分）は各シナリオ（が起こること）の価格を表しているとみなせる．逆に言えば，2 項モデルなどで行ったリスク中立確率を求める手続きは，すでに市場で評価されている資産の価格体系 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ から売り手と買い手が各シナリオをどう評価しているかを逆算する手続きともいえる．もし仮に期待効用理論などで市場価格を説明するとすれば，売り手と買い手が収益をどう感じるかを記述する効用関数や $\boldsymbol{p}$ の情報など，追加の仮定が必要になるだろう．その意味で，確率 $\boldsymbol{p}$ の情報は $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ に陰に織り込まれていたと見ることもできる．しかし，実現した価格体系 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ から買い手と売り手の評価を見いだせれば価格付けには十分である．したがって $\boldsymbol{p}$ を陽には必要としないのである．

本稿では簡単のため予め現在価値で価格が表示されている（あるいは安全資産の金利を 0%）とした．これについて若干補足しておこう．金融資産の価格付けは，①時間を超える部分の評価と ②将来におけるシナリオの不確実性の評価に分割して理解するとよい． 時間を超える評価①については，いわゆる現在価値評価により行う．これは（安全資産の）将来時点の価格の現在価値と現時点での価格を等しくする手続きである． 本稿はこの部分をすでに行ったうえで ②の将来のシナリオ間の評価に限定したものといえる．すでに詳しく見たように，②はすでに価値が定まっているものを組み合わせることで等しい価値をもつ資産（ポートフォリオ）を見つける手続きである．図 6 にあるように，金融工学における価格評価の基本は時間とシナリオそれぞれについて，等価物を見つけることにある．

なおここでは 1 期間モデルの結果を述べたが，多期間 [5] や連続時間に拡張しても基本は同じであり，同様の命題が成り立つことが知られている．

一方，$\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{S}$ から複製できない場合には $\underline{c} < \overline{c}$ となり，$\mathbb{E}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{C})$ は一意に定まらない．これは売り手と買い手双方が絶対に損をしないことを前提として $\underline{c}$ と $\overline{c}$ を求めているからであるといえる．逆に，売り手や買い手がある程度の「リスク」，すなわち損失の可能性を許容できれば，取引の余地が生じる．実際売り手と買い手が [2] で登場した CVaR のような適当なリスク尺度を用いるとすれば無裁定価格の区間 $[\underline{c}, \overline{c}]$ を狭めることができる [6]．ほかにもさまざまな価格付けの方法が提案されている．たとえば，[7] の 7 章には資本資産価格付けモデル CAPM（キャップエム）のほか，8 章や 19 章にはいくつかの方法論が示されている．本稿で紹介した無裁定に基づく価格付けの議論では投資家の不確実性に対する態度（リスク回避性向）を導入することなく，利益は大きければ大きいほど好ましいという性質のみから導かれていた．これに対し，価格を限定するこれらの方法はいずれも，リスク回避性向という，投資家行動に対して一歩踏み込んだ仮定を導入することで価格の可能性を限定する方法といえる．

参考文献

[1] 西原理，“デリバティブ理論入門，”オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**61**, pp. 341–344, 2016.
[2] 枇々木規雄，“ポートフォリオ最適化入門，”オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**61**, pp. 335–340, 2016.
[3] 山田雄二，“連続時間モデルによるオプション価格付けとヘッジ，”オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**61**, pp. 351–358, 2016.
[4] 田中敬一，“資産価格の基本定理，”オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**52**, pp. 558–562, 2007.
[5] A. King, “Duality and martingales: A stochastic programming perspective on contingent claims,” *Mathematical Programming*, Series B **91**, pp. 543–562, 2002.
[6] J. Gotoh, Y. Yamamoto and W. Yao, “Bounding contingent claim prices via hedging strategy with coherent risk measures,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, **151**, pp. 613–632, 2011.
[7] D. Luenberger, *Investment Science*, 2nd edition, Oxford University Press, 2012.（今野浩，枇々木規雄，鈴木賢一訳，『金融工学入門』，日本経済新聞社，2014.）

