デリバティブ理論入門

西原　理

デリバティブとは，株価や金利，為替レートといった資産価格や指数の変動に基づいて，売り手から買い手への支払い額が決まる金融派生商品である．本稿では，最初に，ヨーロピアンとアメリカンのコールオプションとプットオプション，その他のデリバティブについて紹介する．その後，1 期間 2 項モデルを用いて，ヨーロピアンとアメリカンのプットオプションの価格を求める．

キーワード：デリバティブ，2 項モデル，オプション価格付け理論

1. デリバティブとは

デリバティブとは，株価や金利，為替レートといった資産価格や指数の変動に基づいて，売り手から買い手への支払い額が決まる金融派生商品である．売り手から買い手への支払い額をペイオフと呼ぶ．すなわち，デリバティブの取引では，パッケージに入った商品ではなく将来時点におけるペイオフを売買するのである．主に金融機関を中心として，リスクを軽減する目的や資産運用の収益性を高める目的で，先物やスワップ，オプションなどのデリバティブが取引されている（実際の取引データについては，たとえば日本銀行ホームページの定例市場報告 [1] を参照）．本節では，代表的なデリバティブであるヨーロピアンとアメリカンのコールオプションとプットオプションについて説明する．

1.1 ヨーロピアンコール・プットオプション

資産 S，満期時点 T，行使価格 K のヨーロピアンコール（プット）オプションとは，満期時点 T に資産 S の 1 単位を市場価格に関係なく価格 K で購入する（売却する）権利である．「オプション」は権利を意味し，権利を行使できる時点が満期時点のみであるオプションが「ヨーロピアン」と呼ばれる．「コール」は購入する権利を意味し，「プット」は売却する権利を意味する．購入する（売却する）権利を行使できる価格という意味で，価格 K をオプションの行使価格と呼ぶ．

オプションがその上に派生するという意味で，資産 S をオプションの原資産と呼ぶ．$S(t)$ を原資産の時点 t における市場価格とする．満期時点 T で，原資産価格 $S(T)$ が行使価格 K よりも安ければ，権利を行使するよりも，市場で原資産を購入するほうが安いので，コールオプションの保有者は権利を行使しない．逆に，$S(T)$ が K よりも高ければ，コールオプションの保有者は権利を行使する．通常，権利行使の際には原資産の受渡しの代わりに清算が行われ，コールオプションの保有者は，市場価格と行使価格との差額 $S(T)-K$ を得る．すなわち，ヨーロピアンコールオプションの保有者は，満期時点 T にペイオフ $\max\{S(T)-K,0\}$ を得る．一般に，コールオプションの価格は原資産価格に比べて低いため，オプション投資は，少額の投資資金から大きな利益を得る可能性をもたらす．

一方，売却する権利であるヨーロピアンプットオプションの保有者のペイオフは $\max\{K-S(T),0\}$ である．したがって，投資家は，プットオプションに投資することで，原資産価格が下落した場合に利益を得ることができる．また，原資産の保有者は，プットオプションに投資することで，満期時点 T でのペイオフを $S(T)+\max\{K-S(T),0\}=\max\{S(T),K\}$ とすることができる．この場合のプットオプションは，原資産価格が下落した場合の損失を一定額に抑える保険の役割を果たす．このように，投資家は，オプション投資を組合せることで，自身の目的に合ったペイオフを設計でき，ポートフォリオのリスクを軽減したり収益性を高めたりすることができる．

1.2 アメリカンコール・プットオプション

「ヨーロピアン」が権利を行使できる時点が満期時点のみであるのに対し，満期時点までの期間にいつでも権利を行使できるオプションを「アメリカン」と呼ぶ．つまり，原資産 S，満期時点 T，行使価格 K のアメリカンコール（プット）オプションとは，満期時点 T までの任意のタイミングで原資産 S の 1 単位を価格 K で購入する（売却する）権利を意味する．ただし，オプションの保有者は，満期時点 T までの原資産価格の情報 $\{S(t)\}_{0\le t\le T}$ を知ったうえで権利行使のタイミング τ を選べるのではなく，τ 時点までの情報

にしはら　みち
大阪大学大学院経済学研究科
〒 560–0043 大阪府豊中市待兼山町 1–7
nishihara@econ.osaka-u.ac.jp

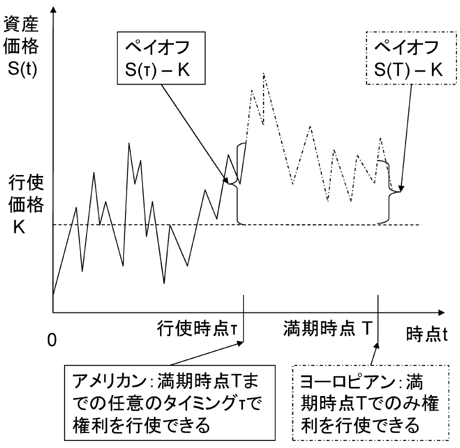

図 1　アメリカンコールオプション

$\{S(t)\}_{0\le t\le \tau}$ で権利を行使するか否かの判断を行わなければいけない（図 1 を参照）．また，一度権利を行使してしまえば，あとから取り消すことはできない．本特集号の今井氏の解説 [2] にあるように，アメリカンオプションは，企業の実物投資戦略の理論（リアルオプション）に用いられることも多い．

2.　さまざまな種類のデリバティブ

本節では，1 節で説明したオプションよりも複雑なペイオフをもつデリバティブについて説明する．特に断らない限り，以下では，各デリバティブについて，原資産 S，満期時点 T，行使価格 K のコールオプションの場合を説明する．

2.1　アジアンオプション

原資産価格 $S(t)$ の期中の平均値に依存するペイオフをもつオプションが「アジアン」と呼ばれる．たとえば，アジアンコールオプションのペイオフは $\max\{T^{-1}\int_0^T S(t)\mathrm{d}t - K, 0\}$ である．ここでは原資産価格 $S(t)$ の連続時間での平均値を用いたが，離散時点（たとえば 1 カ月ごと）$(0\le)t_1, t_2, \ldots, t_n(\le T)$ での平均値を用いる場合，ペイオフは $\max\{n^{-1}\sum_{i=1}^n S(t_i) - K, 0\}$ となる．また，行使価格を期中の平均値とするようなペイオフ $\max\{S(T) - T^{-1}\int_0^T S(t)\mathrm{d}t, 0\}$ をもつアジアンオプションもある．

2.2　バリアオプション

原資産価格 $S(t)$ があらかじめ定められた境界に到達した時点で権利が消滅あるいは発生するようなオプションを「バリア」オプションと呼ぶ．たとえば，定数 B を境界とするアップかつアウト型のヨーロピアンバリアコールオプションのペイオフは $\max\{1_{\{\tau>T\}}S(T) - K, 0\}$ である（図 2）．ただし，τ は境界 B への到達時刻

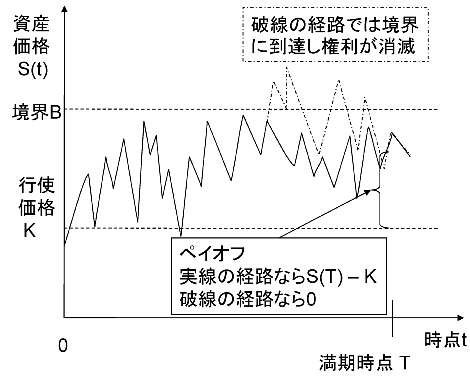

図 2　ヨーロピアンバリアコールオプション

$\tau = \inf\{t \ge 0 \mid S(t) \ge B\}$ を表し，$1_{\{\tau>T\}}$ は，集合 $\{\tau > T\}$ 上で 1 となり，その他の場合には 0 となる定義関数を表す．「アップ」は $S(0)$ より上方の境界を意味し，「アウト」は境界への到達時点で権利が消滅することを意味する．逆に，「ダウン」は $S(0)$ より下方の境界を意味し，「イン」は境界への到達時点で権利が発生することを意味する．アップ・ダウンとアウト・インの組合せによってさまざまなバリアオプションがある．ほかにも，境界が定数でないものや複数の境界をもつものもある．

2.3　複数の原資産をもつオプション

これまで一つの原資産からなるオプションを紹介してきたが，複数の原資産をもつオプションも取引されている．「バスケット」オプションとは，複数の原資産価格の和に依存するペイオフをもつオプションを意味する．たとえば，原資産 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ をもつヨーロピアンバスケットコールオプションのペイオフは $\max\{\sum_{i=1}^n S_i(T) - K, 0\}$ である．一方，「スプレッド」オプションとは，複数の原資産価格の差に依存するペイオフをもつオプションを意味する．原資産 S_1 と S_2 のヨーロピアンスプレッドコールオプションのペイオフは $\max\{S_1(T) - S_2(T) - K, 0\}$ である．複数の原資産をもつオプションは企業の実物投資戦略の理論（リアルオプション）にも現れる [3]．

3.　2 項モデル

これまでさまざまなデリバティブについて紹介してきたが，取引をするうえで重要となるのはデリバティブの適正な価格評価である．デリバティブの価格を求める理論がオプション価格付け理論と呼ばれる．本節では，原資産の市場価格 $S(t)$ を 1 期間 2 項モデルでモデル化し，ヨーロピアンプットオプションとアメリカンプットオプションの価格を求める．

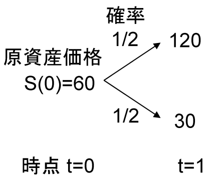

図 3　原資産価格 $S(t)$ のモデル

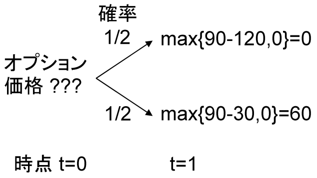

図 4　ヨーロピアンプットオプション

3.1　ヨーロピアンプットオプションの価格

図 3 で示すように，原資産価格 $S(t)$ が離散時点 0 と 1 からなる 2 項モデルに従って変動すると仮定する．すなわち，$S(0)=60$ は，時点 1 になると確率 1/2 で 2 倍の価格に上昇し，確率 1/2 で半額に下落する．また，時点 0 から 1 になるときに 1.2 倍だけ確実に価値が増加する資産があると仮定する．このように価格の上下動リスクがない資産は無リスク資産と呼ばれ，銀行預金などに対応する．無リスク資産の利率 0.2 を無リスク利率と呼ぶ．本稿では，投資家は原資産や無リスク資産，オプションを摩擦（取引費用や流動性など）なく自由に売買できると仮定する．

図 3 の 2 項モデルに従う $S(t)$ と無リスク利率 0.2 の無リスク資産を仮定したうえで，原資産 S，満期時点 $T=1$，行使価格 $K=90$ のヨーロピアンプットオプションの時点 0 での価格 P_E を考えてみよう．図 4 で示すように，満期時点 1 におけるオプションのペイオフは原資産価格 $S(1)$ に依存する．具体的には，$S(1)=30$ のときにはペイオフは $\max\{90-30,0\}=60$ となる一方，$S(1)=120$ のときにはペイオフは $\max\{90-120,0\}=0$ となる．プットオプションは売る権利であるため，原資産価格が下落したときに高いペイオフが得られることに注意する．ペイオフが確率 1/2 で 60，確率 1/2 で 0 となるので，オプション価格 P_E はその期待値

$$P_E = 1/2\times 60 + 1/2\times 0 = 30 \tag{1}$$

になるだろうと素直な読者は考えるかもしれない．しかし，賢明な読者は式 (1) の誤りに気づくのではないだろうか．時点 1 で金額 60 を得るためには，時点 0 で無リスク資産に金額 $60\div 1.2=50$ だけ投資すればよい．すなわち，時点 1 におけるペイオフ 60 の時点 0 における価値は 50 である．このように将来のペイオフを無リスク利率分だけ割引いて現時点での価値を計算したものを割引現在価値と呼ぶ．では式 (1) を修正して将来のペイオフの割引現在価値の期待値

$$P_E = 1/2\times 60\div 1.2 + 1/2\times 0\div 1.2 = 25 \tag{2}$$

を計算すればよいのだろうか？　残念ながら式 (2) も間違いである．

以下では，無裁定条件と複製ポートフォリオという考え方で，オプション価格 P_E を求めてみよう．このために，金額 y_1 の無リスク資産と y_2 単位の原資産 S からなるポートフォリオで，満期時点 1 において，オプションのペイオフと同じ価値になるものを作成することを考える．このポートフォリオの時点 1 での価値は，$S(1)=30$ のときには $1.2y_1+30y_2$ となり，$S(1)=120$ のときには $1.2y_1+120y_2$ となるので，このポートフォリオの価値がオプションのペイオフと一致する条件は

$$1.2y_1 + 30y_2 = 60$$
$$1.2y_1 + 120y_2 = 0$$

である．この連立一次方程式の解は $(y_1,y_2)=(200/3,-2/3)$ である．マイナスの符号は売りポジションを意味する．金額 200/3 の無リスク資産と −2/3 単位の原資産 S からなるポートフォリオの価値は，満期時点 1 では，オプションのペイオフと完全に一致する．このように，満期時点においてオプションのペイオフを複製するポートフォリオを「複製ポートフォリオ」と呼ぶ．

複製ポートフォリオの時点 0 での価格は，$200/3+60\times(-2/3)=80/3$ である．もしオプション価格 P_E が複製ポートフォリオの価格 80/3 より高（低）ければ，時点 0 でオプションを売る（買う）と同時に複製ポートフォリオを買う（売る）ことによって，投資家は確実に差額を得ることができる．たとえば，オプション価格が式 (2) ならば，オプションを 1 単位買い，複製ポートフォリオを 1 単位売ることによって，確実に，投資家は時点 0 で差額 $80/3-25=5/3$ を得ることができ，時点 1 でのペイオフは 0 となる．当然，1000 単位の取引をすれば，差額 5000/3 を確実に得ることができる．このような確実な利益の機会を排除するため，損失するリスクなしには利益を得られないという「無裁定条件」を仮定したうえで，オプション価格付けは行われる．無裁定条件より，オプション価格 P_E は複製

ポートフォリオの価格 80/3 と一致しなければならない．すなわち，式 (1) でも式 (2) でもなく $P_E = 80/3$ が正解である．

3.2　リスク中立確率

式 (2) の誤りの原因はどこにあったのだろうか？　これを調べるには，原資産価格 $S(t)$ の将来価格の期待割引現在価値を計算してみればよい．実際，$S(1)$ の期待割引現在価値は

$$1/2 \times 120 \div 1.2 + 1/2 \times 30 \div 1.2 = 62.5$$

となり，$S(0) = 60$ とは異なる．すなわち，原資産は，価格下落リスクのために，将来価格の期待割引現在価値 62.5 よりも低い価格 $S(0) = 60$ になっている．式 (2) の誤りの原因は，このような原資産価格のリスク評価を反映していない点にある．

そこで，$S(1)$ の期待割引現在価値が $S(0)$ と等しくなるような上昇確率 p を考えてみよう．具体的には，

$$p \times 120 \div 1.2 + (1-p) \times 30 \div 1.2 = 60$$

を解いて，$p = 7/15$ を得る．この確率 7/15 は，原資産価格のリスク評価を反映した確率と考えることができ，「リスク中立確率」と呼ばれる．式 (2) で上昇確率 1/2 をリスク中立確率 7/15 に修正すると，正しい式が得られる．すなわち，オプション価格は，

$$P_E = 7/15 \times 60 \div 1.2 + 8/15 \times 0 \div 1.2 = 80/3 \tag{3}$$

と表現できる．式 (3) に限らず，リスク中立確率を考えると，あらゆるオプション価格は将来のペイオフの期待割引現在価値として表現される．

本節の 2 項モデルでは，複製ポートフォリオを求められる（リスク中立確率が一意的に求められる）ため，あらゆるオプション価格を一意的に求められる．しかし，本特集号の後藤氏の解説 [4] にあるように，複製ポートフォリオを求められない（リスク中立確率が一意的に求まらない）モデルもある．そのような場合には，一般的には無裁定条件だけではオプション価格を一意的に求められない．

3.3　アメリカンプットオプションの価格

本節では，図 3 のモデルを仮定したうえで，原資産 S，満期時点 $T = 1$，行使価格 $K = 90$ のアメリカンプットオプションの時点 0 での価格 P_A を考えてみよう．1.2 節で説明したように，アメリカンオプションの場合には，満期時点 $T = 1$ ではなく時点 0 で権利を行使することも可能である．時点 0 で権利を行使するとき，ペイオフは $\max\{90-60, 0\} = 30$ となる．一方，時点 0 で権利を行使しないとき，満期時点 1 において，アメリカンオプションは 3.1 節と 3.2 節で扱ったヨーロピアンオプションと同じペイオフをもつ．したがって，時点 0 で権利を行使しない場合のオプション価値は $P_E = 80/3$ である．30 のほうが 80/3 よりも大きいので，アメリカンオプションの保有者は，時点 0 で権利を行使する．したがって，オプション価格は $P_A = 30$ である．このように，アメリカンオプションの価格は，対応するヨーロピアンオプションの価格よりも大きくなる場合があり，その差額は早期行使プレミアムと呼ばれる．今回のケースでは，時点 0 における早期行使プレミアムは $30 - 80/3 = 10/3$ である．

4.　おわりに

本稿では，さまざまなデリバティブを紹介した後，2 項モデルを用いてヨーロピアンとアメリカンのプットオプションの価格付けについて説明した．説明を簡単にするため 1 期間 2 項モデルのみを説明したが，多期間 2 項モデルにおいても，満期時点から 1 時点ずつさかのぼって，3.1 節のように複製ポートフォリオを作成してオプションの価格付けを行うことができる．多期間 2 項モデルにおいても，リスク中立確率を用いると，3.2 節と同様にオプション価格は将来のペイオフの期待割引現在価値として表現できる．また，多期間 2 項モデルの時間間隔を 0 に近付けた極限に対応するのが，オプション価格付け理論において最も重要な Black–Scholes モデルである（詳細については，本特集号の山田氏の解説 [5] を参照）．Black–Scholes モデル以降，実際の資産価格の変動を適切に表現するために多くのモデルが提案され，オプション価格付け理論は発展を遂げている．

参考文献

[1] 日本銀行，デリバティブ取引に関する定例市場報告，https://www.boj.or.jp/statistics/bis/yoshi/index.htm/（2016 年 3 月 1 日閲覧）

[2] 今井潤一，“リアルオプション—金融工学とのつながり—，” オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**61**, pp. 371–377, 2016.

[3] M. Nishihara, “Real options with synergies: Static versus dynamic policies,” *Journal of the Operational Research Society*, **63**, pp. 107–121, 2012.

[4] 後藤順哉，“資産価格付けの基本定理—ポートフォリオと確率の双対性—，” オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**61**, pp. 345–350, 2016.

[5] 山田雄二，“連続時間モデルによるオプション価格付けとヘッジ，” オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**61**, pp. 351–358, 2016.

