

移動距離と並び方が混雑に及ぼす影響について

柳澤 大地, 小林 正弘, 佐久間 大

人やモノの関わる施設には必ずといってよいほど混雑が生じ、それは一般に安全上好ましくない現象であるといえる。多くの施設において混雑を処理するための資源（空間的なスペース、混雑処理のための人員数、資金など）には限りがあり、施設の手もちの資源で混雑に対処せざるを得ない。本稿では空港の入国審査をイメージさせる混雑現象について、施設の資源および形状（移動距離、並び方、サーバ数）が与える影響について再考する。

キーワード：待ち行列、移動距離、並び方、エージェントシミュレーション、行列解析法

1. はじめに

人やモノの関わる施設には必ずといってよいほど混雑が生じる。わが国を訪れる外国人観光客数は増加傾向にあり、今後あらゆる施設（空港、交通、商業施設など）における混雑の増加が容易に想像できることだろう。たとえば、空港の入国・出国審査においては混雑が発生しやすく、これは心理面だけでなく安全上好ましくない現象であるといえる。一般に混雑が発生する施設において、混雑を処理するための資源（空間的なスペース、処理のための人員数、資金など）には限りがある。そのために施設の管理・運用者は手もちの資源を上手くやり繰りして（並ばせ方を工夫、スタッフ配置計画を練る、などして）混雑に対処せざるを得ない。（混雑の例を挙げればきりがなく本紙には収まらないため、興味のある方は [1] を参照されたい。）そこで本稿では、空港の入国審査をイメージさせる混雑現象について、施設の資源および形状（移動距離、並び方、サーバ数）が混雑に与える影響について再考してみようと思う。そのために 2 節では、サーバ数および並び方が、混雑にどのように影響するのかについて概説する。さらに 3 節では、移動距離を考慮した並び方の異なる二つの複数サーバモデルを紹介する。そして 4 節では、移動距離および並び方が混雑に与える影響について、エージェントシミュレーションによる性能評価および数値例を示し、5 節では、性能評価の数値計算アルゴリズム（行列解析法）についても概説する。

やなぎざわ だいち
 東京大学先端科学技術研究センター
 〒 153-8904 東京都目黒区駒場 4-6-1
 こばやし まさひろ
 東海大学理学部情報数学科
 〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1
 さくま ゆたか
 防衛大学校情報工学科
 〒 239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20

2. サーバ数や並び方の混雑への影響

本稿では、移動距離、並び方、サーバ数が混雑に及ぼす影響について再考する。そのために 2.1 節では、単一サーバモデルと複数サーバモデル（いずれも待ち行列は 1 本）について、サーバ数が混雑に及ぼす影響について概説する。本稿で考える複数サーバのサーバ数は 2 に限定するため、これ以降、単一サーバモデル、複数サーバモデルをそれぞれ 1 サーバモデル、2 サーバモデルと呼ぶことにする。2.2 節では、2 サーバモデルにおいて、さらに、並び方（待ち行列が 1 本もしくは 2 本）が混雑に及ぼす影響について説明する。ここで、実際の施設では、サーバ数、並び方だけでなく、移動距離が混雑に与える影響は無視できない。そのため 3 節以降では、モデルに移動距離を考慮する。

本節では、図を使って直感的な説明を行うので、理論的な話は避けて通る。「待ち行列についてしっかり学びたい」という人は、最近出版された本として [2] や [3] などがお勧めである。また、本節は [1] を参考にし執筆した。[1] は直感的に待ち行列を理解したい人にお勧めできる本である。

2.1 1 サーバモデルと 2 サーバモデルの比較

1 サーバモデルと 2 サーバモデルは、それぞれ図 1 および図 2 のような待ち行列モデルのことを指す。ここでは 2 サーバに対して、待ち行列は 1 本であると仮定する。さらにシステムとして、

「1 サーバモデルと 2 サーバモデルの処理能力が同じ」
 (2.1)

と仮定する。すなわち、1 サーバモデルのサーバの処理速度を 1[人/分] とした場合、2 サーバモデルでは各サーバの処理速度を 0.5[人/分] とする（つまり、2 サーバモデルのシステムとしての処理能力は、 $0.5 \times 2 = 1$ [人/分]）。一見すると二つのモデルに「性能の違い」はあ



図 1 1 サーバモデル

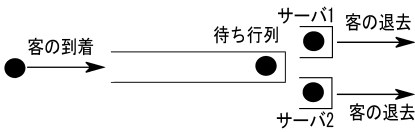


図 2 2 サーバモデル

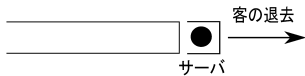


図 3 1 サーバモデル (系内容数が 1 人)

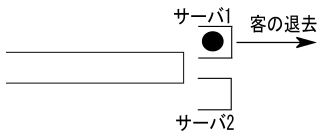


図 4 2 サーバモデル (系内容数が 1 人)

まり現れないように見える。つまり、図 1 および図 2 の混雑 (3 人) では、それぞれ解消するまでにかかる時間は、直感的には約 3 分といったところである。

ではどのような場合、これらのモデルに「性能の違い」が現れるのであろうか？ それぞれのモデルに対して図 3 と図 4 のような系内容数が 1 人の状況を考えてみよう。ここで、系内容数とは、待ち行列内の客数とサービス中の客数の和、つまり、システム内に存在する総客数のことを指す。図 3 および図 4 の状況は、たとえば、空のシステムに対して最初の客が到着したときや、混雑が解消した後に再び混雑が始まる時などに起こる。このような状況では、明らかに、2 サーバモデルは 1 サーバモデルに比べ、システムの半分の能力しか発揮できないと見ることができ、モデルとして「性能の違い」が現れる。

よって、1 サーバモデルと 2 サーバモデルでは、時間平均的には「性能の違い」が生まれ、1 サーバモデルのほうが優れているといえる。ただしこれは、非常に強い仮定 (2.1) の下で成り立つことである。

2.2 2 サーバモデルにおける並び方 (フォーク型・並列型) の比較

2.1 節では、それぞれ待ち行列を 1 本だけもつ場合の 1 サーバモデルと 2 サーバモデルについて述べた。本節では、2 サーバモデルにのみ注目し、客の並び方

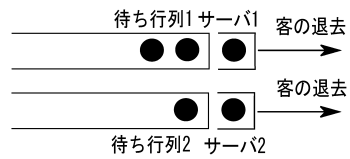


図 5 並列型モデル

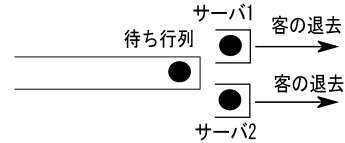


図 6 フォーク型モデル (系内容数が 3 人)

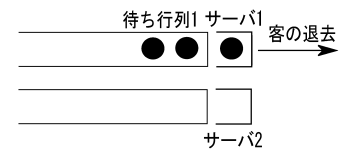


図 7 並列型モデル (系内容数が 3 人)

が性能へ与える影響について考えていく。2 サーバモデルに対しては、図 5 のように各サーバに待ち行列を作ることも可能である。

これ以降、図 2 と図 5 のモデルを区別するために、それぞれを、フォーク型モデル (図 2)、並列型モデル (図 5) と呼ぶこととする。2 サーバに限定せずにと考えると、フォーク型モデルは、銀行の ATM などに代表されるモデルであり、病院の会計時の呼び出しシステムなども、潜在的にフォーク型モデルと捉えることができる。一方、並列型モデルは、スーパーマーケット、空港の入国審査、高速道路の料金所などによく現れるモデルである。

では、2.1 節と同様に、二つの待ち行列モデルの「性能の違い」を見ていこう。2.1 節では、客が少ないときに「性能の違い」が現れることを図を用いて説明した。ここでも図を用いて、直感的な解釈により「性能の違い」を見ることができる。以下の図 6 および図 7 の状況を考えてみよう。

図 6 と図 7 では系内容数は 3 人である。並列型モデルでは図 7 の状況において、待ち行列間の客の移動は許さず、図 7 の状況でも、客は一度並んだ待ち行列で待つと仮定する。ゆえに図 7 の状況では、一つのサーバしか使用されない。図 7 のような状況は、客のサーバを占拠する時間が不確実であるとき十分に起こりうる。一方、フォーク型モデルでは、客が 2 人以上いれば、待ち行列が 1 本であるため、二つのサーバが必ず使用される。よって、明らかにフォーク型モデルのほ

うが並列型モデルよりも優れているといえる。

なぜフォーク型のほうが優れているにもかかわらず、現実のすべての施設でフォーク型を採用しないのであろうか？ 主に次の二つを挙げることができる。一つ目は、スペースの問題である。フォーク型モデルは、待ち行列が1本であるため、並列型モデルに比べて、行列が長くなる傾向にある。そのため、十分なスペースを確保できないとフォーク型を採用できず、スーパーマーケットや高速道路の料金所などはこれに適していないといえる。

本稿では、次の理由が重要となる。二つ目の理由として、移動距離が関わってくる。ここまでの話は、客の移動距離は考えず、サーバが空いたら瞬時に次の客はサーバに入ると仮定した。この仮定は、通信ネットワークなどでは当てはまるかもしれないが、スーパーマーケットや空港の待ち行列など、われわれが現実を目にする待ち行列、すなわち人が直接並ぶ行列においては多少違和感のある仮定である。では、移動距離はどのような影響を及ぼすのであろうか？ たとえば、空港の入国や出国審査などは、行列が1本であると、端のサーバへの移動距離も長く、その移動距離に時間がかかってしまい、システムの性能を落とすであろうと感覚的にも理解できる。つまり、移動距離を考慮するならば、並列型モデルのほうが性能としてよくなる場合もあると期待できる。この理由により、入国審査などの施設において、並列型が採用されている場合があると考えられる。

次節以降では、移動距離を考慮した場合について、フォーク型モデルと並列型モデルの比較を行い、移動距離がどのくらいならば、どちらの並び方（フォーク型・並列型）を採用したほうがよいのかについて考えていく。

3. 並列型とフォーク型の離散時間モデル

3.1 並列型モデルの定義

二つのサーバ（サーバ1および2）に対してそれぞれ待ち行列が1本ずつ存在し、待ち行列の先頭からサーバまで距離がある離散時間型の待ち行列モデルを考える（図8参照）。各サーバへの客の到着は独立（互いに依存関係がない）とし、さらに、一度待ち行列に並んだ客は、ほかの待ち行列に並び直せないものとする。よって、ここではサーバ1の待ち行列に関する待ち行列モデルのみを定義する（サーバ2の待ち行列の定義も同じ）。

モデルの時間軸は非負の整数集合であるとし、待ち

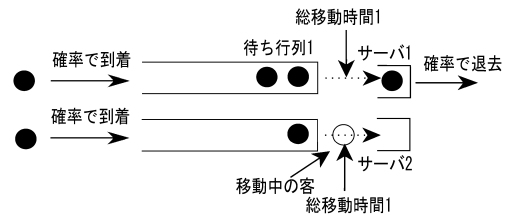


図8 並列型モデル

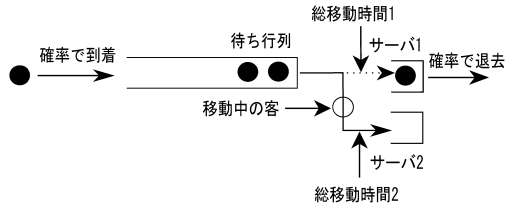


図9 フォーク型モデル

行列1の先頭からサーバ1へ到達するためには歩行時間 $w_1 := 1$ かかるものとする。待ち行列1の先頭客からサーバ1への経路を経路1と呼ぶ。待ち行列1の先頭客は、サーバ1かつその経路1が空いているときのみ、サーバ1へ移動を開始できる。時刻 n から時刻 $n+1$ にかけてのモデルの状態変化は以下の手順で記述される。

1. 客の到着：時刻 n に確率 λ_1 で客が1人到着し、待ち行列1の最後尾に加わる。
2. 経路移動：時刻 n において待ち行列の先頭の客は、サーバ1および経路1が空である場合、サーバ1に向けて移動を開始する。
3. サービス開始・客の種類：時刻 n でサーバ1に向けて移動を開始した客は、時刻 $n+w_1$ に移動を完了かつサービスを受け始める。この際、客の種類が決定され、確率 p （確率 $1-p$ ）で種類1（種類2）であるとする。
4. サービス完了：時刻 n にサーバ1でサービスを受けている種類 j ($j=1,2$) の客は、確率 μ_j でサーバ1を退去し、確率 $1-\mu_j$ でサーバ1に留まるものとする。
5. 時刻の更新：時刻を $n := n+1$ に更新し、手順1に戻る。

3.2 フォーク型モデルの定義

二つのサーバ（サーバ1および2）に対して共通の待ち行列が1本だけ存在する離散時間型の待ち行列モデルを考える（図9参照）。モデルの時間軸は非負の整数、待ち行列の先頭から各サーバへは歩行時間を要し、サーバ1（サーバ2）へは歩行時間 $w_1 := 1$ （歩

行時間 $w_2 := 2$ にかかるものとする。待ち行列の先頭からサーバ $i (i = 1, 2)$ への経路を経路 i と呼ぶ。待ち行列の先頭客は、サーバ i かつその経路 i が空いているときのみ、そのサーバ i へ移動を開始できるものとする（いずれのサーバへの移動が可能である場合、歩行時間の短いほう、つまり、サーバ 1 を選ぶものとする）。3.1 節と同様に、時刻 n から時刻 $n + 1$ にかけてのモデルの状態変化は以下の手順で記述される。

1. 客の到着：時刻 n に確率 λ で客が 1 人到着し、待ち行列の最後尾に加わる。
2. 経路移動：時刻 n において待ち行列の先頭の客は、サーバ i および経路 i が空である場合 ($i = 1$ または 2)、サーバ i に向けて移動を開始する。ただし、二つのサーバへの移動が可能であるとき、歩行時間の短いサーバ 1 を選択する。
3. サービス開始・客の種類：時刻 n でサーバ i に向けて移動を開始した客は、時刻 $n + w_i$ に移動を完了かつサービスを受け始める。この際、客の種類が決定され、確率 p (確率 $1 - p$) で種類 1 (種類 2) であるとする。
4. サービス完了：時刻 n にサーバ $i (i = 1, 2)$ でサービスを受けている種類 $j (j = 1, 2)$ の客は、確率 μ_j でサーバを退去し、確率 $1 - \mu_j$ でサーバに留まるものとする。
5. 時刻の更新：時刻を $n := n + 1$ に更新し、手順 1 に戻る。

4. エージェントシミュレーション

本節では、エージェントシミュレーションを用いて、待ち行列システムの性能評価を行う。エージェントシミュレーションとは、待ち行列に並ぶ客の動きを直接シミュレーションする方法である。ここでのモデルはあまり複雑ではないので、C, C++, Java といったプログラム言語で 3 節に書かれた手順 1~4 を記述することにより、エージェントシミュレータを作成できる。また、artisoc [4] などのシミュレーションプラットフォームを用いれば、アニメーションを表示することも可能である。本稿では、NetLogo [5] というフリーソフトウェアを用いてシミュレータを作成した。エージェントシミュレーションによって定常状態を評価する場合は、平均値の計算の際に、初めの非定常状態の値を含めないようにする必要がある。ここでは、時刻 n_i から n_f までの $n_f - n_i$ ステップのデータを用いて平均値を計算する。また、コンピュータでは無限を表すことができないので、システムの安定条件を求めるため

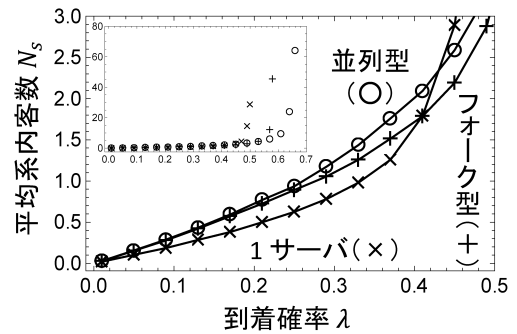


図 10 1 サーバ (図 1), フォーク型 (図 2, 9), 並列型 (図 5, 8) の平均系内客数 $N_s (p = 1, \mu_1 = 0.5, n_i = 10000, n_f = 110000)$

には、系内客数の閾値などを定める必要がある。

4.1 節では、1 サーバ, 2 サーバ (フォーク型), 2 サーバ (並列型) モデルの性能比較を行う。さらに 4.2 節では、サーバが六つの場合について、どのような待ち行列形態 (並列型, フォーク型, もしくは、その混合) で平均系内客数が最小になるかエージェントシミュレーションによって調べる。

4.1 1 サーバ・フォーク型・並列型の比較

まず初めに、サーバ数が 2 の場合のフォーク型 (図 2), 並列型 (図 5) とサーバの処理能力が 2 倍の 1 サーバモデル (図 1) の平均系内客数 N_s を比較する。ここでは、1 サーバ, フォーク型のサーバ 1, 並列型のサーバへの歩行時間を 1, フォーク型のサーバ 2 への歩行時間を 2 とし、客の種類を 1 種類 ($p = 1$), フォーク型と並列型のサービス確率 $\mu_1 = 0.5$, 1 サーバのサービス確率 $2\mu_1 = 1.0$ と設定した。そして、この条件でエージェントシミュレーションを行い、時刻 $n_i = 10000$ から $n_f = 110000$ までの 100000 ステップの間のデータを用いて平均系内客数 N_s を計算した。図 10 は、到着確率 λ に対して平均系内客数がどのように変化するかを調べたものである。

まず、図 10 の大きなほうのグラフを見てみよう。すると、 $\lambda \leq 0.4$ の範囲では、1 サーバ, フォーク型, 並列型の順に平均系内客数 N_s が大きくなっていくことがわかる。これは 2.1 節と 2.2 節の内容で説明できる。1 サーバでは、図 3 のように、系内客数が 1 人のときフォーク型の 2 倍の処理能力でサービスを行うことができる。それに対して、フォーク型では片方のサーバが使われないため、1 サーバの場合に比べてサービスに時間がかかってしまう。これが平均系内客数 N_s の増加に繋がる。また、フォーク型と並列型を比較すると、並列型では図 7 のように客が並んでいるにもか

かわらず使われないサーバが生じてしまうのに対して、フォーク型では図 6 のようにすべてのサーバでサービスが行われるため、平均系内客数 N_s が小さくなると考えられる。

今度は、図 10 の小さなほうのグラフを見てみよう。到着確率 $\lambda = 0.7$ 、平均系内客数 $N_s = 80$ まで表示したこのグラフを見ると、1 サーバ、フォーク型、並列型の順に平均系内客数 N_s が発散していることがわかる。また $\lambda = 0.43$ 付近（大きいほうのグラフの右端）で 1 サーバの平均系内客数 N_s がフォーク型と並列型を抜いて一番大きくなり、さらに $\lambda = 0.57$ 付近（小さいほうのグラフの右部）で、フォーク型の平均系内客数 N_s が並列型より大きくなっている。この結果は、それぞれの待ち行列システムの安定条件

・ 1 サーバ

$$\lambda < \left(1 + \frac{1}{2\mu_1}\right)^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{6}{12} \quad (4.1)$$

・ フォーク型

$$\lambda < \left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right)^{-1} + \left(2 + \frac{1}{\mu_1}\right)^{-1} = \frac{7}{12} \quad (4.2)$$

・ 並列型

$$\lambda < 2 \left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right)^{-1} = \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \quad (4.3)$$

を計算することによっても確認できる。到着確率 λ が大きいときは、たくさんの客が並んでいるので、どの待ち行列システムでもすべてのサーバでサービスが行われることが多くなる。ゆえに、どれだけ多くのサーバがきちんと使われているかではなく、歩行時間を考慮したサーバのサービス能力で平均系内客数 N_s が変わってくる。1 サーバは、フォーク型・並列型のサーバの 2 倍の処理能力をもっているが、歩行時間の 1 は半分にならない。そのため、歩行時間を考慮したサーバのサービス能力は低く、すぐに発散してしまうと考えられる。また、並列型の客はどのサーバに並んでも、歩行時間 1 + サービス時間でサーバを通過できるのに対して、フォーク型の客はサーバ 2 を通過する場合、歩行時間 2 + サービス時間と並列型の場合よりも長い時間がかかる。したがって、フォーク型のほうが平均系内客数 N_s が大きくなってしまふのである。

以上のフォーク型と並列型を比較した結果は、[6] において実際の人による実験によっても確認されている。

4.2 待ち行列の分割方法

サーバ数が 2 の場合は、それぞれのサーバの前に待ち行列を付ける並列型か、一つにまとめてしまうフォーク型かの 2 通りしか考えられない。しかし、サーバ数が 3 以上の場合はさまざまな組み合わせを考えることができる。ここでは、サーバ数が 6 の場合に、どのような待ち行列システムで平均系内客数 N_s が最小になるかエージェントシミュレーションによって調べてみる。

いま、サーバ数 s_i ($i \in [1, N]$) の N 個の部分待ち行列システムをもつサーバ総数 $\sum_{i=1}^N s_i$ の待ち行列システムを、(アルファベット名) (s_1, s_2, \dots, s_N) と書くことにする。すると、サーバ数 6 の場合には、A (1, 1, 1, 1, 1), B (1, 1, 1, 1, 2), C (1, 1, 1, 3), D (1, 1, 2, 2), E (1, 1, 4), F (1, 2, 3), G (2, 2, 2), H (1, 5), I (2, 4), J (3, 3), K (6)。のような 11 通りの待ち行列システムが考えられる。A が完全な並列型、K が完全なフォーク型を表し、ほかの 9 通りは並列型とフォーク型を組み合わせたものになっている。例として、F (1, 2, 3) の模式図を図 11 に示す。

客は確率 λ で待ち行列システムに到着して、同時にいずれかの部分待ち行列システムに振り分けられる。また、各部分待ち行列システムに振り分けられる客の数は、サーバ数に比例する。たとえば、待ち行列システム F (1, 2, 3) の場合、それぞれの部分待ち行列システムに確率 $\lambda/6, 2\lambda/6, 3\lambda/6$ で客が到着することになる。

ここでは、各部分待ち行列システムの入口が端にあり、サーバが等間隔に配置されている場合を考える。そこで、それぞれの部分待ち行列のサーバに、1 から s_n までのサーバ番号 j を付け、サーバまでの歩行時間を $w_j = kj$ と定めることにする。この歩行時間の係数 k は、サーバとサーバの間を移動するのにかかる時間と考えることができる。

図 12 には、到着確率 λ と歩行時間の係数 k に対して、11 通りの待ち行列システムの中で最小の平均系内客数を与えるものが示されている。これを見ると、 λ ,

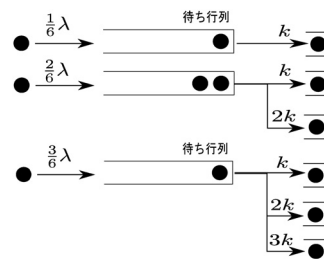


図 11 待ち行列システム F (1, 2, 3) の模式図

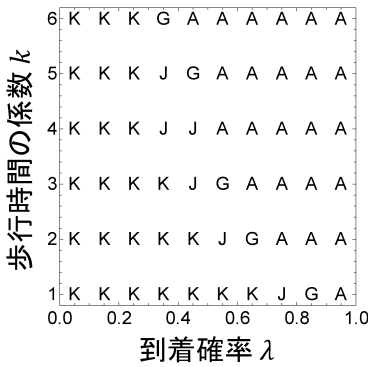


図 12 サーバ数 6 の場合に平均系内客数 N_s を最小にする待ち行列システム ($p = 1, \mu_1 = 0.2, n_i = 50000, n_f = 550000$)

k が共に小さい場合は K (6) すなわち完全なフォーク型がよく、共に大きい場合は A (1, 1, 1, 1, 1, 1) すなわち完全な並列型がよいことがわかる。また間の領域では G (2, 2, 2) と J (3, 3) が最適となっており、サーバ数が均等でないほかの七つのシステムは図中には現れない。

以上より、客の到着率が小さく歩行時間が短い場合は、客の到着のばらつきによって使用されないサーバが出ないように、サーバをまとめて大きな待ち行列システムを構成したほうがよく、逆に客の到着率が大きくサーバ間の間隔が長い場合は、長い歩行時間によってサービスの開始が遅れることがないように、小さな待ち行列システムを多数構成したほうがよいことがわかる。

5. 性能評価の数値計算アルゴリズム (行列解析法)

本稿の最後として、3 節 (および 4.1 節) で扱った待ち行列モデルの推移構造を利用した数値解析法について紹介する。そのために、待ち行列モデルの離散時間マルコフ連鎖による表現を導く。その後、マルコフ連鎖の推移構造を利用した定常分布の計算方法 (行列解析法) を紹介し、性能評価量の数値計算アルゴリズムを与える。なお紙面の都合上、ここではフォーク型の待ち行列モデルについて述べる (1 サーバ、並列型はその特殊例のためここでは省略する)。

5.1 離散時間型マルコフ連鎖による表現

時刻 n における待ち人数を Q_n 、経路 i ($i = 1, 2$) の客があとどれくらいの時間でサーバに到達するか (残り歩行時間ともいう) を $R_{in} \in \{0 \leq r \leq w_i \mid r \text{ は整数}\}$ 、サーバ i でどの種類の客がサービスされているかについて $S_{in} \in \{0, 1, 2\}$ で表す。特に、 $R_{in} = 0$ は時刻 n に経路 i に歩行客がおらず、 $S_{in} = 0$ はサーバ i が非

稼働であることを表す。このとき、

$$(Q_n, (R_{1n}, S_{1n}), (R_{2n}, S_{2n})) \quad (5.1)$$

は離散時間型マルコフ連鎖である。以下では、このマルコフ連鎖の状態空間を述べる。経路 1 およびサーバ 1 の状態 (r_1, s_1) として考えられるパターンを列挙すれば、

$$(r_1, s_1) = \underbrace{(0, 0)}_{(1a)}, \underbrace{(0, 1), (0, 2)}_{(1b)}, \underbrace{(1, 0)}_{(1c)} \quad (5.2)$$

である。同様に、経路 2 およびサーバ 2 の状態 (r_2, s_2) については、

$$(r_2, s_2) = \underbrace{(0, 0)}_{(2a)}, \underbrace{(0, 1), (0, 2)}_{(2b)}, \underbrace{(1, 0)}_{(2c)}, \underbrace{(2, 0)}_{(2d)} \quad (5.3)$$

である。ここで、いずれのサーバへの移動も可能である場合にはサーバ 1 を優先すること、さらに、先頭の待ち客は移動開始の条件が整っているサーバに向けて移動を開始すること、に注意すれば、 $(R_{1n}, S_{1n}), (R_{2n}, S_{2n})$ の取りうる値のパターンとして、上記 (5.2) および (5.3) のすべての組み合わせはあり得ない¹。

$$U_1 = \{(1a), (1b), (1c)\}, \\ U_2 = \{(2a), (2b), (2c), (2d)\}$$

として、マルコフ連鎖 $(Q_n, (R_{1n}, S_{1n}), (R_{2n}, S_{2n}))$ の取りうる状態集合を $Q_n = \ell$ のとき $\{\ell\} \times B_\ell$ で表せば、

$$B_0 = \{(1a)\} \times (U_2 \setminus \{(2d)\}) \cup (U_1 \setminus \{(1a)\}) \times U_2, \\ \ell \geq 1 \text{ のときは},$$

$$B_\ell = (U_1 \setminus \{(1a)\}) \times (U_2 \setminus \{(2a)\})$$

で与えられる ($\ell \geq 1$ のとき、 B_ℓ は ℓ に依存しない)。よってマルコフ連鎖の状態空間は

$$(\{0\} \times B_0) \cup (\cup_{\ell=1}^{\infty} \{\ell\} \times B_\ell) \quad (5.4)$$

で与えられる。以下では、 Q_n を主状態、それ以外 $((R_{1n}, S_{1n}), (R_{2n}, S_{2n}))$ を背後状態と呼ぶことにする。

¹ たとえば、マルコフ連鎖の状態の組み合わせとして、 $(0, (1a), (2d))$ はあり得ない。これは、システムが空であるときに到着した客が、サーバ 1 ではなくサーバ 2 に向けて移動を開始することになり、モデルの定義に反するからである。同様に、 $Q_n \geq 1$ のとき、 $(1a)$ もしくは $(2a)$ を含む組み合わせはあり得ない。これは、移動可能なサーバがあるにもかかわらず、先頭の待ち客が移動を開始しないことになり、これも定義に反するからである。

5.2 平均待ち行列長の計算方法

マルコフ連鎖 (5.1) の推移確率行列 P について、状態空間 (5.4) の表現に従い主状態の値で分割表記すれば、以下の表現を得る²。

$$P = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & & & & \\ B_{10} & A_0 & A_{+1} & & & \\ B_{20} & A_{-1} & A_0 & A_{+1} & & \\ & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_{+1} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

ここで、部分行列 A_m ($m = 0, \pm 1$) は各 $\ell \geq 1$ について、マルコフ連鎖が状態集合 $\{\ell\} \times \mathcal{B}_\ell$ から $\{\ell+m\} \times \mathcal{B}_{\ell+m}$ へ 1 ステップで状態変化する際の推移確率からなる行列である。同様に、 B_{ij} は主状態の推移が 0 に関係する際の部分行列である。たとえば、マルコフ連鎖 (5.1) の時刻 n から時刻 $n+1$ の状態推移が、 $\ell \geq 1$ について、

$$(\ell, \underbrace{(1, 0), (0, 1)}_{:= i \text{ と表記}}) \rightarrow (\ell+1, \underbrace{(0, 2), (0, 1)}_{:= j \text{ と表記}})$$

となるのは、時刻 n から時刻 $n+1$ にかけて到着が発生し (確率 λ)、サーバ 1 へ移動を完了した客が種類 2 のサービスを受け始め (確率 $1-p$)、サーバ 2 で種類 1 のサービス中だった客がまだサービスを継続する (確率 $1-\mu_1$) 場合である。このとき、部分行列 A_{+1} の (i, j) 要素は、 $\lambda(1-p)(1-\mu_1)$ で与えられる。

推移確率行列 (5.5) の構造より、このマルコフ連鎖は $GI/M/1$ 型マルコフ連鎖³の一種であり、その定常分布は以下の手順に従い数値計算可能である [7]。マルコフ連鎖 (5.1) の定常分布を π で表し (つまり、 $\pi = \pi P$, $\pi \mathbf{1} = 1$)、(5.5) と同様に分割表記 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ を用いる。このとき、 π_i ($i = 0, 1$) は方程式

$$(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} + RB_{20} & A_0 + RA_{-1} + R^2A_{-2} \end{pmatrix}$$

の解であり、 π_i ($i \geq 2$) は次の行列幾何表現をもつ：

$$\pi_i = \pi_1 R^{i-1}, \quad (i \geq 2), \quad (5.6)$$

ここで、行列 R は以下のとおり再帰的に計算される： $R_0 = O$ とし、 $n \geq 1$ について、

$$R_{n+1} = A_{+1} + R_n A_0 + R_n^2 A_{-1} + R_n^3 A_{-2}$$

とすれば、 $\{R_n; n \geq 0\}$ は単調増加列であり [7]、 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ として求まる。容易にわかるようにこのモデルでは、単位時間当たりの平均到着客数は λ であり、客が経路 1 およびサーバ 1 (経路 2 およびサーバ 2) を通過する平均時間は $1 + \frac{p}{\mu_1} + \frac{1-p}{\mu_2} \left(2 + \frac{p}{\mu_1} + \frac{1-p}{\mu_2} \right)$ である。そのためシステムの安定条件は、

$$\lambda < \left(1 + \frac{p}{\mu_1} + \frac{1-p}{\mu_2} \right)^{-1} + \left(2 + \frac{p}{\mu_1} + \frac{1-p}{\mu_2} \right)^{-1} \quad (5.7)$$

で与えられる ((4.2) のわずかな一般化である)。安定条件 (5.7) の下での平均待ち行列長 $\mathbb{E}[Q] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_n \mathbf{1}$ は定常分布の行列幾何表現 (5.6) に注意すれば、以下のとおり計算される。

$$\mathbb{E}[Q] = \pi_1 \{ (I - R)^{-1} \}^2 \mathbf{1}. \quad (5.8)$$

6. おわりに

本稿では施設の資源および形状が混雑に与える影響について、日常生活でたびたび見られる場合について再考した。特に、並び方、サーバ数の違いがどのように混雑に影響を与えるのかについて概観し、さらに、移動距離も考慮した場合については、エージェントシミュレーションおよび行列解析法を用いた評価方法を紹介した。

人とモノが関わる施設には必ずといってよいほど混雑が発生している。そのため、混雑とうまく付き合い、施設 (広くは社会) を円滑に運営していくために、何が混雑に影響を与えているのか、定期的に再考していく必要があるのかもしれない。

参考文献

- [1] 高橋幸雄, 森村英典, 『混雑と待ち』, 朝倉書店, 2001.
- [2] 宮沢政清, 『待ち行列の数理とその応用 (改訂版)』, 牧野書店, 2013.
- [3] 川島幸之助監修, 塩田茂雄, 河西憲一, 豊泉洋, 会田雅樹 著, 『待ち行列理論の基礎と応用』, 共立出版, 2014.

² たとえば、 $B_{\ell_1 \ell_2}$ は主状態が ℓ_1 から ℓ_2 に変化したときの背後状態の推移確率行列、同様に A_n は主状態が n 変化したときの背後状態の推移確率行列を表す。

³ $GI/M/1$ 待ち行列モデルに対する隠れマルコフ連鎖の推移確率行列を一般化したマルコフ連鎖のことを指す。

- [4] <http://mas.kke.co.jp/modules/tinyd0/index.php?id=11>
- [5] <http://www2.gssm.otsuka.tsukuba.ac.jp/staff/kurahasi/NetLogo-v5-ja/>
- [6] D. Yanagisawa, Y. Suma, A. Tomoeda, K. Ohtsuka and K. Nishinari, “Walking-distance introduced queueing model for pedestrian queueing system: Theoretical analysis and experimental verification,” *Transportation Research Part C*, **37**, pp. 238–259, 2013.
- [7] 牧本直樹, 『待ち行列アルゴリズム』, 朝倉書店, 2001.