

# 時系列モデルによる商品販促効果の分析

山根 智之, 菅原 光太郎, 西村 直樹, 小林 健, 吉田 佑輔, 高野 祐一, 中田 和秀

## 1. はじめに

近年、顧客の異質性を考慮したマーケティング施策の重要性はますます高まっている [1]. たとえば顧客にポイントカードを発行し、蓄積されたポイントに応じて特典を提供することで、顧客ごとに購買履歴を収集することができる。FSP (Frequent Shopper Program) では、このようにして蓄積された購買履歴を活用して、各顧客に最適なサービスを提供し、優良顧客の維持・拡大を目指す。値引セールやチラシといった不特定多数の顧客を対象とした従来型のマーケティング施策と比較して、顧客一人ひとりの満足度向上を主眼に置いている点が FSP の特徴である。

本研究で分析対象としたスーパーマーケットでは、販促の対象となる商品を顧客ごとに選定する個別販促システムが採用されている。具体的には各顧客の購買履歴から販促対象とする 20 商品を 1 カ月ごとに選定し、クーポン券を発行する。顧客は自身のクーポン券の内容を発券機で確認することができ、販促対象商品を購入すればレジで自動値引やポイント付与などの特典が受けられる。

このような特典は顧客の購買を促進すると考えられるが、その効果の大きさは顧客や商品ごとに異なる。そのため、商品販促の効果を顧客や商品ごとに推定することができれば、顧客の購買を促進する効果的な販促を行うための有益な知見となる。

広告や値引が購買行動に与える影響を推定する先行研究では、時系列モデルを適用した研究が数多く行われている [2-5]. 特に状態空間モデル [6, 7] は、時系列解析で用いられるさまざまなモデルを統一的に扱

ことができ、マーケティングの分野では主に購買の要因を抽出する目的で有効に活用されている [8]. 山口ら [9] は飲食店の売上時系列データをトレンド成分、週周期成分、両効果成分、イベント効果成分などの要因に分解する状態空間モデルを構築している。佐藤と樋口 [10] は状態空間モデルを用いて時系列データの動的特性を抽出するための統一的な枠組みを提案し、実際の POS データへ適用している。本橋ら [11] は状態空間モデルに基づいてインターネット広告のクリック率を予測するモデルを構築し、クリック率に影響を与える要因をトレンド成分、曜日成分、祝日効果などに分解している。Hu et al. [12] は状態空間モデルを利用して、自動車の広告がインターネット上の検索回数と売上に与える影響を分解して分析している。

しかし、本研究で分析対象としたスーパーマーケットでは、過去の購買履歴から購買される可能性が高い商品を販促しており、顧客の購買が販促の効果によるものなのか、元々の購買意欲によるものなのかをデータから直接判断することは難しい。そのため、本研究が対象とする事例では「商品販促による購買の増減」を分析するだけでは不十分であり、「商品への元々の購買意欲」も考慮した分析を行う必要がある。

そこで本研究では、個別販促システムの「商品販促効果」と顧客固有の「購買意欲」が商品購買数に与える影響を分解して分析する時系列モデルを提案する。提案モデルでは顧客の購買意欲には 3 期の自己回帰性を仮定し、購買意欲と販促効果の和として購買数が観測されることとする。提案モデルによる分析の結果、反復購買度（購買意欲の継続度）と販促効果の 2 軸から各商品の購買特性を明らかにすることができた。また商品販促効果によって顧客を分類し、各顧客群に対して有効な販促施策を提案することができた。

本論文の構成は以下のとおりである。2 節では、販促効果と購買意欲を分解するための時系列モデルを提案する。3 節では、分析データの概要を説明し、提案モデルによる分析結果を報告する。最後に 4 節でまとめと今後の課題を述べる。

やまね ともゆき, すがわら こうたろう,  
にしむら なおき, こばやし けん, なかた かずひで  
東京工業大学大学院社会理工学研究科経営工学専攻  
〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1  
よしだ ゆうすけ  
東京工業大学大学院イノベーションマネジメント研究科  
技術経営専攻  
〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1  
たかの ゆういち  
専修大学ネットワーク情報学部  
〒 214-8580 神奈川県川崎市多摩区東三田 2-1-1

## 2. 提案モデル

本節では顧客の商品購買数に与える影響を「商品販促効果」と「購買意欲」に分解して分析するための、提案モデルと推定手法を説明する。

### 2.1 定式化

期間  $t \in \mathcal{T}$  における顧客  $u \in \mathcal{U}$  の商品  $i \in \mathcal{I}$  の購買数を  $y_{tu}^{(i)}$  とし、各顧客の購買数を成分とするベクトルを

$$\mathbf{y}_t^{(i)} = \left( y_{t1}^{(i)}, y_{t2}^{(i)}, \dots, y_{t|\mathcal{U}|}^{(i)} \right)^\top$$

とする。同様に各顧客に対する商品販促の有無を成分とするベクトルを以下のように定義する：

$$\mathbf{z}_t^{(i)} = \left( z_{t1}^{(i)}, z_{t2}^{(i)}, \dots, z_{t|\mathcal{U}|}^{(i)} \right)^\top.$$

ただし、期間  $t \in \mathcal{T}$  に顧客  $u \in \mathcal{U}$  に商品  $i \in \mathcal{I}$  が販促された場合に  $z_{tu}^{(i)} = 1$  とし、それ以外は  $z_{tu}^{(i)} = 0$  とする。

ここで、顧客の購買意欲  $x_{tu}^{(i)}$  を成分とするベクトル

$$\mathbf{x}_t^{(i)} = \left( x_{t1}^{(i)}, x_{t2}^{(i)}, \dots, x_{t|\mathcal{U}|}^{(i)} \right)^\top$$

を導入する。購買数  $y_t^{(i)}$  と商品販促の有無  $z_t^{(i)}$  は直接観測できるが、購買意欲  $x_t^{(i)}$  は直接観測することができない潜在的な変数であることに注意する。

本研究では顧客の購買意欲  $x_t^{(i)}$  に対して3期の自己回帰性を仮定する：

$$\mathbf{x}_t^{(i)} = \sum_{k=1}^3 a_k^{(i)} \mathbf{x}_{t-k}^{(i)} + \mathbf{e}_t^{(i)}. \quad (1)$$

ただし、 $a_k^{(i)}$  は商品  $i$  の  $k$  期前の購買意欲の影響を表すスカラー値のパラメータとし、 $\mathbf{e}_t^{(i)}$  は残差を表すベクトルとする。

また購買数  $y_t^{(i)}$  は顧客の購買意欲  $x_t^{(i)}$  に商品販促  $z_t^{(i)}$  の効果が加わって観測されることとする：

$$\mathbf{y}_t^{(i)} = \mathbf{x}_t^{(i)} + b^{(i)} \mathbf{z}_t^{(i)}. \quad (2)$$

ただし、 $b^{(i)}$  は商品  $i$  の販促効果を表すスカラー値のパラメータとする。

提案モデルは、システムモデル (1) と観測モデル (2) から成る状態空間モデル [6, 7] の一種である。また顧客ごとに見ると、自己回帰モデル (1) と伝達関数 (2) により構成される伝達関数モデル [1] となっている。

### 2.2 推定手法

本研究では、提案モデル (1), (2) のパラメータ  $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b^{(i)}$  を最小2乗法により推定する。観測モデル (2) をシステムモデル (1) に代入して、購買意欲  $x_t^{(i)}$  を消去すると以下ようになる：

$$\mathbf{y}_t^{(i)} - b^{(i)} \mathbf{z}_t^{(i)} = \sum_{k=1}^3 a_k^{(i)} \left( \mathbf{y}_{t-k}^{(i)} - b^{(i)} \mathbf{z}_{t-k}^{(i)} \right) + \mathbf{e}_t^{(i)}. \quad (3)$$

本研究では式 (3) の残差2乗和  $\sum_{t \in \mathcal{T}} (\mathbf{e}_t^{(i)})^\top \mathbf{e}_t^{(i)}$  が最小となるように、商品  $i \in \mathcal{I}$  ごとにパラメータを推定する。

## 3. 分析結果

本節では提案モデル (1), (2) を用いて推定した、顧客の購買意欲と商品販促効果の分析結果を報告する。

### 3.1 分析データ

本研究では経営科学系研究部会連合協議会主催、平成26年度データ解析コンペティションで提供されたデータを利用した。データ期間は2013年7月から2014年6月の1年間であり、札幌市内のスーパーマーケット1店舗における顧客の購買履歴と、個別販促システムによる販促履歴を使用した。1カ月を1期間と設定し、対象店舗で毎月購買実績のある3,401名の会員顧客を分析対象とした。個別販促システムによる販促の対象は475商品であり、これらの商品について分析を行った。各商品には「パン」、「飲料」、「麺類」などの商品カテゴリを表す中分類が与えられている。

本研究では提案モデル (1), (2) のパラメータを推定するために、データ解析環境 R の `optim` 関数を使用した。初期点は  $(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b^{(i)}) = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$  とし、アルゴリズムは BFGS 公式を用いた準ニュートン法 [13] を採用した。以降では、決定係数が0.2以上となった155商品を分析対象とする。

### 3.2 パラメータの推定結果と考察

購買数が上位の20商品の推定結果を表1に示す。購買意欲の影響  $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}$  の値を比較すると、前月の購買意欲の影響  $a_1^{(i)}$  の値が比較的大きく、特に「ブレンド茶 600ml」、「たまご L 10個」、「のど飴 125g」などの商品でその傾向が顕著であった。これらの商品を購入した顧客は翌月も購買する可能性が高いが、1~2カ月間購買間隔が空くと購買する可能性は大きく減少する。販促効果  $b^{(i)}$  については、「たまご L 10個」と「きゅうり漬物 120g」の値が非常に高い。一方で「ブレンド茶 600ml」、「チョコレート 191g」、「野菜

表 1 購買数上位 20 商品の推定結果

商品名	購買意欲の影響			販促効果	決定係数
	$a_1^{(i)}$	$a_2^{(i)}$	$a_3^{(i)}$	$b^{(i)}$	
ブレンド茶 600 ml	0.580	0.170	0.179	-0.148	0.720
ソース焼きそば 135 g×2	0.254	0.177	0.163	0.007	0.221
絹豆腐 300 g	0.333	0.130	0.117	0.022	0.304
牛乳 A 1,000 ml	0.443	0.182	0.168	0.008	0.492
ウィンナー 2 束	0.341	0.227	0.178	0.027	0.375
ヨーグルト A 400 g	0.393	0.178	0.153	0.017	0.437
牛乳 B 200 ml	0.448	0.341	0.172	-0.127	0.749
袋ラーメン 110 g×3	0.291	0.222	0.152	0.119	0.209
かにかまぼこ A 136 g	0.296	0.303	0.200	-0.101	0.339
豆乳 900 ml	0.286	0.170	0.167	-0.053	0.282
ごま・しそ昆布 87 g	0.244	0.245	0.183	-0.077	0.210
ヨーグルト B 450 g	0.370	0.209	0.270	0.020	0.559
たまご L 10 個	0.250	0.117	0.039	0.199	0.318
チョコレート 191 g	0.384	0.249	0.248	-0.153	0.273
片栗粉 220 g	0.242	0.300	0.263	-0.112	0.356
野菜ジュース 200 ml	0.422	0.316	0.151	-0.163	0.682
きゅうり漬物 120 g	0.409	-0.095	0.196	0.195	0.279
のど飴 125 g	0.452	0.217	0.102	-0.012	0.576
絹豆腐・木綿豆腐パック 200 g×2	0.373	0.269	0.270	-0.074	0.677
かにかまぼこ B	0.312	0.123	0.105	0.042	0.326

表 2 2 期以上前の購買意欲の影響が大きい商品の推定結果

商品名	購買意欲の影響			販促効果	決定係数
	$a_1^{(i)}$	$a_2^{(i)}$	$a_3^{(i)}$	$b^{(i)}$	
いか焼きそば	0.204	0.314	0.303	0.014	0.215
飴	0.231	0.126	0.503	-0.063	0.405
缶コーヒー	0.240	0.366	0.262	-0.149	0.566
味噌 750 g	0.176	0.241	0.247	-0.064	0.206
片栗粉 220 g	0.242	0.300	0.263	-0.112	0.356
コーヒークリーム (粉末) 250 g	0.186	0.236	0.226	-0.018	0.206
レトルトカレー	0.251	0.209	0.376	-0.138	0.277
乳酸菌飲料 112 ml	0.274	0.224	0.389	0.360	0.678
インスタント味噌汁 10P	0.209	0.344	0.134	-0.078	0.298

ジュース 200 ml] など販促効果が負の値となり、販促が購買数の増加に寄与していない商品も多かった。

表 2 では 2 期以上前の購買意欲の影響  $a_2^{(i)}, a_3^{(i)}$  の値が比較的大きい商品の推定結果を示している。「味噌 750 g」, 「コーヒークリーム (粉末) 250 g」など、これらの多くは購買周期が比較的最長と考えられる商品であり、販促効果  $b^{(i)}$  も小さい商品が多かった。この結果から、これらの商品では購買した顧客に対して翌月から販促することは有効ではないことが示唆される。したがって購買周期と合わせて 2 カ月後に販促するなど、推定されたパラメータの値を参考に販促のタイミングを調整することが効果的だと考えられる。

### 3.3 反復購買度と販促効果に基づく商品の分類

本節では反復購買度と販促効果の 2 軸に着目して商品の特性を分析する。ここで、商品  $i \in \mathcal{I}$  の反復購買度  $a_{\text{sum}}^{(i)}$  は過去の購買意欲が継続する程度を表すものとし、以下のように定義する：

$$a_{\text{sum}}^{(i)} = a_1^{(i)} + a_2^{(i)} + a_3^{(i)}.$$

反復購買度  $a_{\text{sum}}^{(i)}$  と販促効果  $b^{(i)}$  を 2 軸とした商品の散布図を図 1 に示す。ただし、図 1 では 2 軸の値をそれぞれ平均 0、分散 1 に正規化している。販促効果が  $-1$  から  $0$  の範囲に多くの商品が分布しているが、一方で販促効果が非常に高い商品も存在することがわ

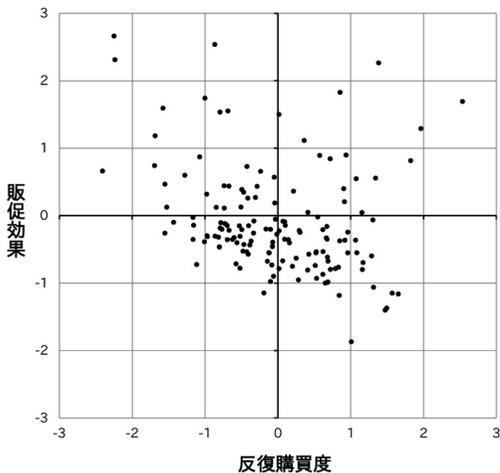


図1 反復購買度と販促効果の散布図 (商品単位)

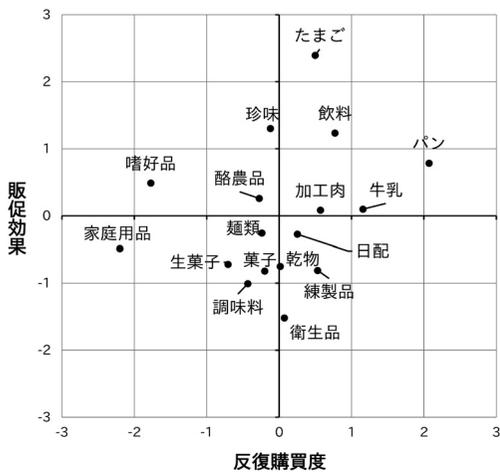


図2 反復購買度と販促効果の散布図 (中分類単位)

かる。

中分類ごとに2軸の平均値を計算して作成した散布図を図2に示す。たまご、珍味、飲料などは販促効果が高く、特典を与えることによる購買数の増加が期待できる。一方で衛生品や調味料などは販促効果が低く、購買周期の長さその原因として考えられる。またパンの反復購買度は非常に高く、家庭用品や嗜好品は反復購買度が低かった。

次に、個々の商品の特性をより詳しく調べるために、反復購買度の大小と販促効果の大小によって商品を四つのセグメントに分類して分析する：

**セグメント1 (反復購買度：大，販促効果：大)**

たまご、緑茶、牛乳などの商品が含まれる。これらの商品は継続して購買される可能性が高いことに加えて、販促による購買数の増加が期待できる

商品である。したがってこれらの商品の販促は優良顧客の育成につながると考えられ、顧客に対し積極的に販促すべき商品だといえる。

**セグメント2 (反復購買度：大，販促効果：小)**

豆腐、野菜ジュース、柿の種などの商品が含まれる。これらの商品は定期的に購買されるが、販促が購買数の増加に結びつきにくい商品である。したがって、これらの商品の販促は短期的な購買数の増加という目的には合致しない。一方で顧客がいつも買う商品に対して特典を与えることによる顧客の満足度向上が目的ならば、販促する価値のある商品だといえる。

**セグメント3 (反復購買度：小，販促効果：大)**

缶コーヒー、冷凍餃子、ヨーグルトなどの商品が含まれる。これらの商品は頻繁には購買されないが、販促により一時的に購買数を増やすことができる商品である。これらの商品の購買数は販促の有無に敏感に反応するため、販促施策の目玉商品とすると効果的だと考えられる。

**セグメント4 (反復購買度：小，販促効果：小)**

砂糖、栄養ドリンク、トイレトペーパーなどの商品が含まれる。これらの商品が頻繁に購買されることは少なく、販促されたとしても効果の小さい商品である。したがってこれらの商品に関しては、販促の優先度を低くすべきだといえる。

**3.4 販促効果に基づく顧客の分類**

前節では商品の販促効果は顧客間で差がないことを仮定し、商品の購買特性を分析した。本節では顧客ごとに商品の販促効果が異なることを考慮し、顧客の購買特性を分析する。

**3.4.1 分類手法**

顧客ごとに提案モデルを適用すると、推定するパラメータ数が増加し、パラメータ数に対してデータ数が非常に少なくなってしまう。このことによる推定の信頼度が低下することを避けるために、ここでは以下の方針で分析を行う：

- ・各商品に対する購買意欲の影響は全顧客で一定として、推定するパラメータ数の増加を抑える。
- ・顧客ごとに推定した商品の販促効果は、中分類ごとに集計する。
- ・販促効果に基づいて顧客のクラスタを作成し、各クラスタに対して考察する。

具体的には、前節で求めた購買意欲のパラメータの値を  $\bar{a}_1^{(i)}, \bar{a}_2^{(i)}, \bar{a}_3^{(i)}$  とし、これらの値を固定した以下の時系列モデルを考える：

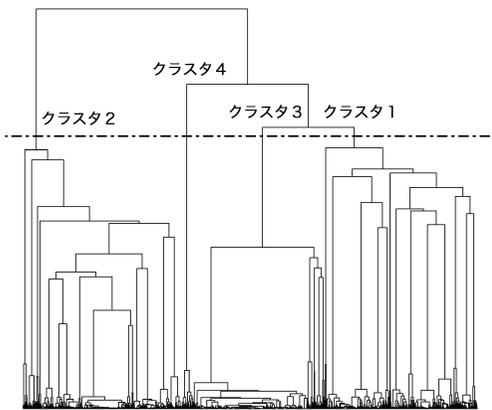


図3 Ward法による顧客のデンドログラム

$$y_{tu}^{(i)} - b_u z_{tu}^{(i)} = \sum_{k=1}^3 \bar{a}_k^{(i)} \left( y_{t-k,u}^{(i)} - b_u z_{t-k,u}^{(i)} \right) + e_{tu}^{(i)}. \quad (4)$$

ここで、各顧客  $u \in \mathcal{U}$  に対する商品  $i \in \mathcal{I}$  の販促効果  $b_u^{(i)}$  は、式 (4) の残差 2 乗和  $\sum_{t \in \mathcal{T}} (e_{tu}^{(i)})^2$  が最小となるように推定した。また顧客  $u$  に販促された実績がない商品  $i$  の販促効果  $b_u^{(i)}$  に関しては、商品  $i$  の販促実績のある顧客の販促効果の平均値で補完した。

次に、推定した販促効果  $b_u^{(i)}$  は中分類  $m \in \mathcal{M}$  ごとに平均値を計算し、 $b_{um}$  とした。そして、各顧客  $u \in \mathcal{U}$  の販促効果のベクトル

$$b_u = (b_{u1}, b_{u2}, \dots, b_{u|\mathcal{M}|})^\top$$

を利用して、Ward 法による顧客のクラスタリングを行った。ただしクラスタリングの際、 $b_{um}$  は中分類  $m \in \mathcal{M}$  ごとに分散が 1 となるように正規化し、顧客間の距離にはユークリッド平方距離を用いた。作成されたデンドログラムを図 3 に示す。このデンドログラムを参考に、以下ではクラスタ数を 4 とした場合の分類結果について分析する。

### 3.4.2 分類結果と考察

各顧客クラスタに対する中分類ごとの販促効果の平均を図 4 に示す。クラスタ 1 (1,142 名) は日配、牛乳、麺類、飲料などの多くの中分類の販促効果が高く、このクラスタを「好反応クラスタ」とする。クラスタ 2 (1,186 名) は全体的に販促効果が小さく、このクラスタを「無反応クラスタ」とする。クラスタ 3 (982 名) はたまごの販促効果が非常に高く、このクラスタを「たまごクラスタ」とする。クラスタ 4 (91 名) は人数が極端に少ないため、本研究では分析の対象外とした。分析対象の 3 クラスタに属する顧客の来店数、購買商品数、購買金額の平均を表 3 に示す。これらの結果に基

表 3 顧客クラスタの購買傾向

	来店数 (1 カ月)	購買商品数 (1 回)	購買金額 (1 回)
クラスタ 1	8.6 回	11.0 個	2,039 円
クラスタ 2	7.6 回	10.0 個	1,905 円
クラスタ 3	8.1 回	11.5 個	2,149 円

づいて、各顧客クラスタの特性を詳しく分析する：

#### クラスタ 1：好反応クラスタ

このクラスタに対しては販促効果の高い商品が多く、来店数は最も多い顧客群である。したがってこのクラスタの顧客には販促効果の高い商品を中心に販促し、さらなる購買の活性化を目指すべきだと考えられる。

#### クラスタ 2：無反応クラスタ

このクラスタは、販促効果が全体的に小さい顧客群である。しかし来店数や購買金額は他のクラスタと比較しても大きな差はなく、この顧客群に対しては販促の存在や利点が十分に認知されていない可能性がある。したがってこの顧客群には商品販促を認知させるためのキャンペーンの実施や商品の値引の増額など、販促を認知し利点を感じてもらえるような取り組みを行う必要があると考えられる。

#### クラスタ 3：たまごクラスタ

このクラスタは購買商品数と購買金額が最も多く、優良顧客群といえる。したがってこの顧客群に対しては反復購買度の高い商品を販促し、顧客の満足度向上に努めることが重要だと考えられる。

## 4. おわりに

本研究では、顧客ごとに販促商品を選定しているスーパーマーケットを対象とし、時系列モデルを利用して販促効果と購買意欲が商品購買数に与える影響を分析した。パラメータ推定の結果から各商品の購買特性を分析し、商品の購買周期に合わせて販促のタイミングを調整することの必要性が示唆された。また反復購買度と販促効果の 2 軸に着目して商品を分析することで、販促商品を選定する際の指針を与えることができた。さらに商品ごとの販促効果に基づいて顧客の分類を行い、分類後の各顧客群に対する販促施策の提案を行った。

今後の課題としては、先行研究で行われているように販促効果以外の要因をモデルに取り入れることが考えられる。また本研究ではすべての商品に対して購買意欲の 3 期の自己回帰性を仮定したが、商品ごとに自

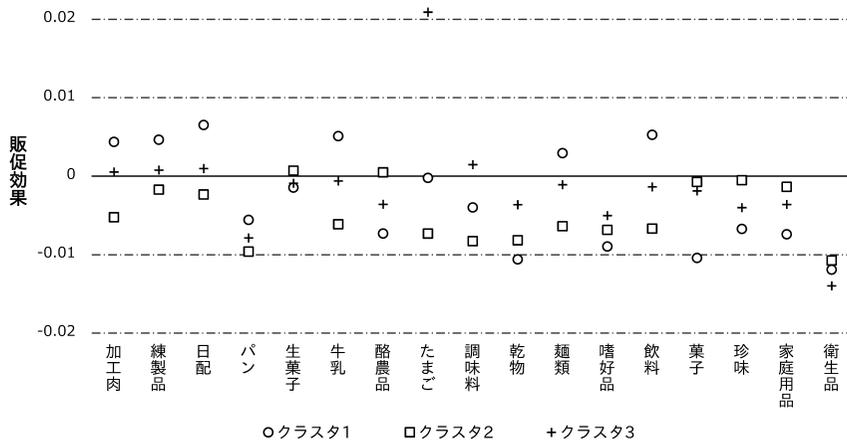


図4 顧客クラスタに対する中分類ごとの販促効果

己回帰の期間数を調整することが有効だと考えられる。先行研究では潜在クラスモデルや階層ベイズモデルなど、顧客の異質性をモデル化するためのさまざまなアプローチが提案されており [1]、これらの手法を組み合わせた分析も今後の課題となる。

#### 参考文献

- [1] 阿部誠, 近藤文代, 『マーケティングの科学—POS データの解析—』, 朝倉書店, 2005.
- [2] M. G. Dekimpe and D. M. Hanssens, “Time-series models in marketing: Past, present and future,” *International Journal of Research in Marketing*, **17**, pp. 183–193, 2000.
- [3] 近藤文代, “デイリー POS データにおける曜日変動および値下げ効果の抽出,” *オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学*, **44**, pp. 154–163, 1999.
- [4] K. Pauwels, I. Currim, M. G. Dekimpe, E. Ghysels, D. M. Hanssens, N. Mizik and P. Naik, “Modeling marketing dynamics by time series econometrics,” *Marketing Letters*, **15**, pp. 167–183, 2004.
- [5] 田島博和, 上田隆穂, 清水聡, “Box & Jenkins 流時系列分析のマーケティングデータへの適用—その有効性と問題点—,” *学習院大学経済論集*, **30**, pp. 231–237, 1993.
- [6] J. Durbin and S. J. Koopman, *Time Series Analysis by State Space Methods*, 2nd edition, Oxford University Press, 2012.
- [7] 北川源四郎, 『時系列解析入門』, 岩波書店, 2005.
- [8] P. S. H. Leeflang, T. H. A. Bijmolt, J. van Doorn, D. M. Hanssens, H. J. van Heerde, P. C. Verhoef and J. E. Wieringa, “Creating lift versus building the base: Current trends in marketing dynamics,” *International Journal of Research in Marketing*, **26**, pp. 13–20, 2009.
- [9] 山口類, 土屋映子, 樋口知之, “状態空間モデルを用いた飲食店売上の要因分解,” *オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学*, **49**, pp. 52–60, 2004.
- [10] 佐藤忠彦, 樋口知之, “POS データの時系列モデリングによる知識発見—新製品投入の消費者価格反応変化に及ぼす影響の解析—,” *人工知能学会論文誌*, **22**, pp. 200–208, 2007.
- [11] 本橋永至, 磯崎直樹, 長尾大道, 樋口知之, “状態空間モデルによるインターネット広告のクリック率予測,” *オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学*, **57**, pp. 574–583, 2012.
- [12] Y. Hu, R. Y. Du and S. Damangir, “Decomposing the impact of advertising: Augmenting sales with online search data,” *Journal of Marketing Research*, **51**, pp. 300–319, 2014.
- [13] 矢部博, 『工学基礎 最適化とその応用』, 数理工学社, 2006.