経路問題と離散数学
—重みのあるグラフとないグラフ—

小田　芳彰

本稿では，最短路問題に代表される経路問題とその背景にある基本的な問題，性質について紹介する．経路問題においては各 2 都市間の距離が重要な要素になり，各辺に重みと呼ばれる実数値を割り当てた重み付きグラフが対象になるが，重みのないグラフでの性質を利用することで，見通しがよくなることが多く，本稿ではこのような部分に目を向けていく．

キーワード：最短路問題，マッチング，中国郵便配達人問題，巡回セールスマン問題，ハミルトン閉路

1.　はじめに

道路網と見つけたいものが満たすべき条件が与えられたときに，距離などが最小になる経路を求める問題は実社会への応用もあることから，盛んに研究されてきた．こうした経路問題は，課す条件によりいろいろな問題が知られているが，本稿では，最短路問題，中国郵便配達人問題，巡回セールスマン問題を考える．まず，道路網を表現するにはグラフを用いることが多い．各都市を頂点で表し，2 都市間を結ぶ道路がある場合には対応する 2 頂点間を辺で結ぶことにより道路網をグラフで表現することができる．ここでは，距離を考慮するので，各辺に重みと呼ばれる実数値を割り当てた重み付きグラフを用いることにする（図 1）．すなわち，2 都市間の距離を対応する辺の重みとすることで，道路網を表すことが可能となる．負の値の重みを考えることもあるが，本稿では特に断らない限り各辺の重みは非負と仮定する．辺の向きの有無に応じて，それぞれ有向グラフ，無向グラフと呼ばれる 2 種類のグラフがある．本稿では特に断らない限り，無向グラフを対象にする．

2.　グラフの探索—幅優先探索と最短路問題

グラフが与えられたとき，そのグラフがどのような構造をしているのか（たとえば，連結か）や，われわれがほしい対象を含んでいるか（たとえば，閉路を含むか）を知りたいとき，グラフ内の頂点や辺を順次探索しながら処理を進めていくことになる．この節では，グラフの幅優先探索の話から始める．アルゴリズムの基礎について学習したことのある方なら聞いたことがあるかもしれない．

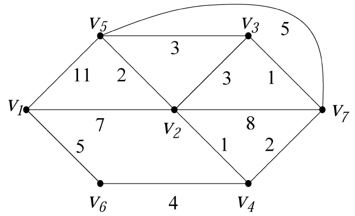

図 1　重み付きグラフ

$G = (V(G), E(G))$ を無向グラフとする（$V(G)$：頂点集合，$E(G)$：辺集合）．ある頂点 $s \in V(G)$ を出発点とし，まず s に隣接する頂点をすべて訪れる．次に，いま訪れた各頂点を新たな出発点としてさらに隣接する頂点，すなわち s から 2 本の辺でたどることができる頂点をすべて訪れる．これを繰り返して可能な限り頂点を探索していく方法を幅優先探索と言う．出発点から「近い」順に訪れていく探索法である．

アルゴリズム 1（幅優先探索）
入力：無向グラフ $G = (V(G), E(G))$, $s \in V(G)$
出力：任意の頂点 $v \in V(G)$ に対する s からの最短道の長さ（辺の数）$d(v)$
手続き：
1. $d(s) \leftarrow 0$.
2. 任意の $v \in V(G) \setminus \{s\}$ に対し，$d(v) \leftarrow \infty$.
3. $A \leftarrow \{s\}$.
4. A の中で最も早く加えられた頂点を u とし，$A \leftarrow A \setminus \{u\}$.

おだ　よしあき
慶應義塾大学理工学部
〒 223–8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3–14–1
oda@math.keio.ac.jp

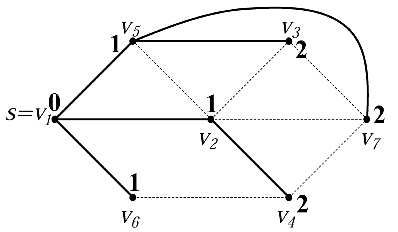

図 2　幅優先探索

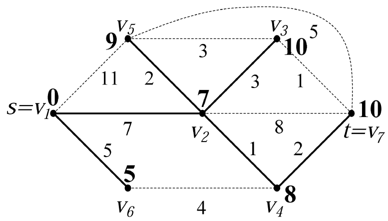

図 3　最短路問題（最短 s,t–道）

5. u に隣接する各頂点 v に対し，

   $d(v)=\infty$ ならば $A \leftarrow A \cup \{v\}$, $d(v) \leftarrow d(u)+1$.

6. $A=\emptyset$ ならば，任意の $v \in V(G)$ に対し $d(v)$ を出力し終了.
7. 4 へ戻る.

図 2 は，図 1 のグラフの各辺の重みを無視した重みのないグラフに対して $s=v_1$ として幅優先探索を行った例である．各頂点 v のそばの値は $d(v)$ を表している．

幅優先探索と対で紹介されるものとして深さ優先探索がある．組合せに関する問題で解を探索する場合にこの二つの探索のいずれかが用いられることが多い．次に，最短路問題について考える．

問題 1（最短路問題）**.**　重み付きグラフ $G=(V(G),E(G))$ と 2 頂点 $s,t \in V(G)$ が与えられたとき，s と t を結ぶ道の中で辺の重みの和が最小のものを求めよ．

s を出発点，t を目的点とすれば，最短ルートを求めることに対応し，カーナビゲーションシステムで調べさせることに対応している．この問題を解くアルゴリズムの中では，Dijkstra のアルゴリズムが基本的である．Dijkstra のアルゴリズムでは，グラフに対し各辺の重みが非負であることを仮定している．負の重みをもつグラフについてはもう少し詳細な探索が必要になる．また，目的点が 1 点 t だけではなく，任意の頂点への最短路問題（一出発点，全目的点最短路問題）を解いていることに注意しよう．

アルゴリズム 2（**Dijkstra** のアルゴリズム）

入力：重み付きグラフ $G=(V(G),E(G))$, $\ell(u,v)$：辺 $uv \in E(G)$ の重み．$s \in V(G)$.

出力：任意の頂点 $v \in V(G)$ に対し，s,v–道の中で辺の重みの和の最小値 $d(v)$

手続き：

1. $d(s) \leftarrow 0$.
2. 任意の $v \in V(G) \setminus \{s\}$ に対し，$d(v) \leftarrow \infty$.
3. $A \leftarrow \{s\}$.
4. A の中で d の値が最小の頂点を u とし，$A \leftarrow A \setminus \{u\}$.
5. u に隣接する各頂点 v に対し，

   $d(v)=\infty$ ならば $A \leftarrow A \cup \{v\}$, $d(v) \leftarrow d(u)+\ell(u,v)$.

   $d(v)<\infty$ かつ $d(v)>d(u)+\ell(u,v)$ ならば，$d(v) \leftarrow d(u)+\ell(u,v)$.

6. $A=\emptyset$ ならば，任意の $v \in V(G)$ に対し $d(v)$ を出力し終了.
7. 4 へ戻る.

図 3 は図 1 のグラフに対し，$s=v_1$ から $t=v_7$ への最短路を求めたものである．各頂点 v のそばの値は $d(v)$ を表しており，s から t へは v_2, v_4 を経由し，重みの和 10 の道が最短であることを示している．

幅優先探索のアルゴリズムと Dijkstra のアルゴリズムを比べると，いずれも出発点から「近い」順に探索をしている．ここでの「近い」の尺度は，前者は辺の本数であるのに対し，後者は辺の重みの和になっている．Dijkstra のアルゴリズムのほうが探索を進めるうちにさらによい道が見つかる可能性があるため，d の値の更新や最小の d を考える操作が含まれ，若干複雑に見える．

時間計算量について見てみると，頂点数 n，辺数 m のグラフについて，幅優先探索では $O(n+m)$ 時間，Dijkstra のアルゴリズムでは素朴には $O(n^2)$ 時間かかるが，d に対しフィボナッチヒープと呼ばれるデータ構造を用いることで $O(m+n\log n)$ 時間で解を得られることが知られている．このあたりは実社会への応用にも直結することから，かなり研究されている．たとえば，探索の目安となるヒューリスティック関数を用いた A^* アルゴリズムなどがある [1]．また，Dijkstra

のアルゴリズムは一出発点，全目的点最短路問題を解くアルゴリズムだが，全出発点，全目的点最短路問題を解くアルゴリズムとして Floyd–Warshall のアルゴリズムがよく知られている [2, 3]．このアルゴリズムの時間計算量は $O(n^3)$ であるが，動的計画法と呼ばれる手法を用いており，プログラムの記述が容易などの長所もある．

3. 最小重みマッチング

ここでは，マッチングについて考える．マッチングは次節の中国郵便配達人問題，次々節の巡回セールスマン問題でも登場する重要な概念である．重みのないグラフのマッチングについては本特集の土屋氏の記事でも触れられている．与えられたグラフが完全マッチングをもつための必要十分条件が Tutte により与えられている．そして，次の判定問題は多項式時間で解くことが可能であり，時間計算量の観点では簡単に解ける問題に該当している．

問題 2（完全マッチング問題）**.** 与えられたグラフ $G = (V(G), E(G))$ に対し，完全マッチングが存在するか否かを判定せよ．

完全マッチングが存在しないならば，辺数ができるだけ多いマッチングを見つけることがおもしろくなる．そこで，次の問題が考えられる．

問題 3（最大マッチング問題）**.** 与えられたグラフ $G = (V(G), E(G))$ に対し，（辺数）最大マッチングを求めよ．

マッチング M の辺と M に含まれない辺が交互に現れる道を M–交互道と言い，特に，この交互道の両端点とも M の辺に接続していないとき M–増大道と言う．Berge は次の定理を示した（本特集の土屋氏の記事を参照）．

定理 1 (Berge, 1957)**.** グラフ G のマッチング M が最大マッチングであるための必要十分条件は，G が M–増大道を含まないことである．

G に対しあるマッチング M があるとき，M–増大道 P が存在すれば，M と $E(P)$ の対称差を取ることで M より辺数が 1 本多いマッチングが得られる．このBerge の定理から，M–増大道を見つけ，マッチングの辺数を増やす操作を繰り返すことで，最大マッチングが求められることがわかる．最大マッチングを求める Edmonds のアルゴリズム [4] は，この M–増大道を見つけるために，花 (blossom) と呼ばれるあるグラフとその縮約という概念を導入している．これらの話題については，文献 [5] が詳しい．

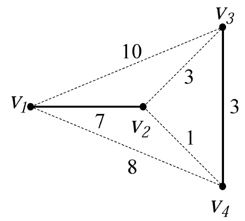

図 4 最小重みマッチング

このアルゴリズムの基本概念を踏襲することで，重み付きグラフに対する最小重み完全マッチング問題も解くことができる [6]．

問題 4（最小重み完全マッチング問題）**.** 与えられた重み付きグラフ $G = (V(G), E(G))$ に対し，重みの和が最小となる完全マッチングを求めるか，完全マッチングがないと判定せよ．

図 4 は 4 頂点のグラフにおける最小重み完全マッチングの例である．この問題を解く Edmonds のアルゴリズムは $O(n^3)$ 時間で解を得ることができる．したがって，多項式時間で解ける容易な問題に属するが，多項式時間で解ける組合せ最適化問題の中では最も “hard” な問題の一つとも言われ [5]，香り高いアルゴリズムの一つである．

4. 中国郵便配達人問題

この節では，中国郵便配達人問題について考える．

問題 5（中国郵便配達人問題）**.** 与えられた重み付きグラフ $G = (V(G), E(G))$ に対し，ある頂点を出発し，すべての辺を少なくとも一度通り出発点に戻る歩道のうち重みの和が最小のものを求めよ．

中国人研究者 Kwan がこの問題を発表したことから，問題に「中国」が付けられている（英語では Chinese Postman Problem）．郵便配達人は指定されたすべての道路を少なくとも一度ずつ通り郵便物を配達する必要があることからこの名前が付いたのだろう．ここで，まず少し都合のよい場合を考えてみる．すべての辺を

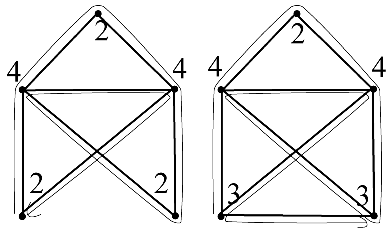

図 5　オイラー回路（左）とオイラー小道（右）

ちょうど一度通って出発点に戻ってくることができるのはどんな場合だろうか？　それは考えているグラフが一筆書き可能，すなわちオイラー回路をもつグラフである．

オイラー回路　グラフのすべての辺をちょうど一度ずつ通り，出発点に戻ってくる回路

グラフがオイラー回路をもつための必要十分条件はよく知られている．

定理 2.　グラフ G がオイラー回路をもつための必要十分条件は，G が連結かつ任意の頂点の次数が偶数であることである．

図 5 の左のグラフにおいて，各頂点そばの値は次数を表している．上の定理からこのグラフはオイラー回路をもつことが保証され，実際に矢印に沿ってたどるとオイラー回路になっている．定理 2 におけるグラフはループと呼ばれる同じ頂点を端点とする辺や，多重辺と呼ばれる同じ 2 頂点を端点とする辺を含む多重グラフに対しても成り立つ．

ここで，元の中国郵便配達人問題に戻る．オイラー回路をもつグラフであれば，すべての辺をちょうど一度ずつ通り出発点に戻ってくることができるので，それが重みの和最小の経路であることがわかる．

しかし，オイラー回路をもたないグラフの場合はどうだろうか？　オイラー回路に近い概念で，オイラー小道がある．

オイラー小道　グラフのすべての辺をちょうど一度ずつ通る小道

オイラー小道は，すべての辺をちょうど一度ずつ通る必要はあるが，出発点と終点が一致していなくてもかまわない．すなわち，最初と最後は異なる場所でもかまわない一筆書きにあたる．グラフがオイラー小道をもつための必要十分条件もまたよく知られている．

定理 3.　グラフ G がオイラー小道をもつための必要十分条件は，G が連結かつ次数が奇数の頂点が高々 2 点である．

図 5 の右のグラフでは，次数が奇数の頂点がちょうど 2 頂点ある．定理 3 からオイラー小道をもつことが保証される．次数が奇数の頂点がないときは，すべての頂点の次数が偶数になり，これはオイラー回路をもつ場合になる．また，次数が奇数の頂点が 1 点であるグラフは存在しない．それは，次の基本的な事実からわかる．

命題 1（握手補題）**.**　任意のグラフに対し，各頂点の次数の和は辺の数の 2 倍に等しい．

この握手補題から，各頂点の次数の和は常に偶数であることがわかるので，任意のグラフに対し，次数が奇数の頂点は偶数個である．したがって，次数が奇数の頂点が 1 点であるグラフは存在しない．さらに，オイラー回路はもたないがオイラー小道をもつグラフは次数が奇数の頂点をちょうど 2 点もつことがわかる．

再び，中国郵便配達人問題に戻る．次数が奇数の頂点をちょうど二つもつ場合，その一方 u を出発点とし，他方 v を終点とするオイラー小道が存在する．そのオイラー小道に v から u への道を加えればすべての辺を少なくとも 1 回通る回路ができる．このとき，v から u に戻ってくるとき，いくつかの辺を二度通ってしまう．そこをなるべく重みが少ない辺を通ることができればうれしい．それは，2 節で考えた最短路問題を解くことで解決できる．

では，次数が奇数の頂点が 4 点以上ある場合はどうだろうか？　いろいろな頂点を結ぶ道を考える必要が生じるので，一見膨大な組合せの数になり，解くことは難しいとも思える．しかし，3 節で考えたマッチングを用いることで解決できる．そのアルゴリズムの概要は下記のとおりである．

アルゴリズム 3　中国郵便配達人問題を解くアルゴリズム（の流れ）

入力：重み付きグラフ $G = (V(G), E(G))$

出力：すべての辺を少なくとも一度通る，重みの和が最小の回路

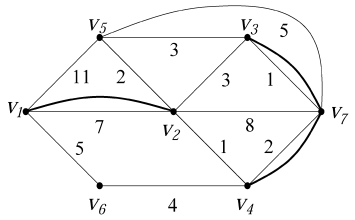

図 6　中国郵便配達人問題

手続き：

1. G において次数が奇数の頂点全体を V' とする．
2. 任意の $u, v \in V'$ に対し，G における u, v–最短道を求める．
3. 重み付き完全グラフ $G' = (V(G'), E(G'))$ を次のように定める：
   $V(G') = V'$．各 $e = uv \in E(G')$ に対し，
   $\ell(e)$: G での u, v–最短道の辺の重みの和．
4. G' における最小重み完全マッチング M を求める．
5. M の各辺 uv は G での u, v–最短道に対応する．これらの道を構成するすべての辺を G に追加した（多重）グラフを G'' とする．
6. G'' のオイラー回路を求める．

ここで，冒頭の図 1 のグラフを例に考えてみる．まず，次数が奇数の頂点は v_1, v_2, v_3, v_4 の 4 頂点ある．これらのうちの 2 頂点を端点とする最短道を求め，その重みの和を辺の重みとする 4 頂点の完全グラフを考えると，この場合，3 節の図 4 のグラフになる．したがって，v_1 と v_2，v_3 と v_4 の最短道をなす辺 v_1v_2, v_3v_7, v_7v_4 を図 1 に追加することでオイラー回路をもつグラフが得られ，このグラフのオイラー回路が中国郵便配達人問題の解である（図 6）．

このアルゴリズムの時間計算量について考える．グラフ G の頂点数を n，辺数を m とするとき，$|V'| \leq n$ であるので 2 は 2 節で触れた Floyd–Warshall のアルゴリズムを用いることで $O(n^3)$ 時間で実行できる．4 は 3 節で述べた Edmonds のアルゴリズムにより $O(n^3)$ 時間で実行可能である．また，6 でオイラー回路を求めるアルゴリズムとして，$O(|E(G'')|)$ 時間のものが存在する．ここで，G'' は G に対し，一般に，いくつかの辺を足した多重グラフになるが，どの辺も多重度（多重辺の本数）は高々 2 と考えてよい．なぜならば，3 辺以上であれば，そのうちの 2 辺を取り除いても次数が偶数である性質を保つため，オイラー回路をもつはずだからである．したがって，$|E(G'')| \leq 2m$ が成り立つ．よって，6 における時間計算量は $O(m)$ である．以上のことから，総時間計算量は $O(n^3)$ 時間であり，この問題も時間計算量の観点では容易な分類に入ることがわかる．

最後に，無向グラフ以外の場合について述べておく．与えられたグラフが有向グラフの場合も，基本的に同様の流れで解くことができ，多項式時間で解を得ることができる．有向グラフは一方通行路がある道路網を表現することができるので，現実に即した対象とも言える．さらに，道路網は一方通行路と双方向通行路の両方があるので，無向辺と有向辺が混在したグラフを対象にするほうがもっと現実に近いかもしれない．しかし，こうしたグラフ（混合グラフ）に対しては，中国郵便配達人問題は NP 困難に属することが知られ，多項式時間アルゴリズムは見つかっていない．

5.　巡回セールスマン問題

この節では次の問題を考える．

問題 6（巡回セールスマン問題）**．** 与えられた重み付き完全グラフ $G = (V(G), E(G))$ に対し，すべての頂点をちょうど一度ずつ通る閉路の中で重みの和が最小のものを求めよ．

セールスマンが会社を出発し，顧客がいるすべての都市を一度ずつ通り，会社に戻ってくる場合の総移動距離最小の周り方を求めたいというところからこの名前が付いたと考えられる．この問題はドリルによる基板の穴あけなどさまざまな場面で応用されている．巡回セールスマン問題は NP 困難に属し，最適化問題の中でもよく知られた問題の一つなので，ご存知の方も多いと思う．前節までに述べた以下のさまざまな概念が巡回セールスマン問題に対して使われる場面があるので，一つだけ紹介したいと思う．

・全域木（本特集の土屋氏の記事を参照）
・最短路問題（2 節）
・マッチング（3 節）
・オイラー回路（4 節）

平面上の頂点配置に対し，2 頂点間の重みをそのユークリッド距離で与えた重み付きグラフを考える．平面上の頂点配置であるこの問題はユークリッド巡回セールスマン問題とも呼ばれている．この問題に対し，近似解を求める Christofides のアルゴリズムの流れは下記のとおりである [7]．

アルゴリズム 4　Christofides のアルゴリズム（の流れ）
入力：重み付き完全グラフ $G = (V(G), E(G))$

出力：巡回セールスマン問題の近似解（閉路）
手続き：

1. G に対する重みの和最小の全域木 T を求める．
2. T において次数が奇数の頂点全体を V' とする．
3. 任意の $u, v \in V'$ に対し，T における u, v–最短道を求める．
4. 重み付き完全グラフ $G' = (V(G'), E(G'))$ を次のように定める：
   $V(G') = V'$．各 $e = uv \in E(G')$ に対し，
   $\ell(e)$: T での u, v–最短道の辺の重みの和.
5. G' における最小重み完全マッチング M を求める．
6. M の各辺 uv は T での u, v–最短道に対応する．これらの道を構成するすべての辺を T に追加した（多重）グラフを G'' とする．
7. G'' のオイラー回路を求める．そのオイラー回路をたどりつつ，同じ頂点を二度目に通ろうとするときはスキップ（近道）をし，最終的にすべての頂点を通る閉路を求める．

このアルゴリズムも中国郵便配達人問題と同様に次数が奇数の頂点に着目し，最短路問題および最小重みマッチングを求めることで巡回セールスマン問題を解いている．最適解を得る保証はないが，近似の精度が 1.5 倍以内に保証された多項式時間アルゴリズムとして有名である．

6. ハミルトン閉路問題

グラフのすべての頂点をちょうど一度ずつ通る閉路のことをハミルトン閉路と言う．図 7 はハミルトン閉路の例を表している．したがって，前節で紹介した巡回セールスマン問題は重み付き完全グラフに対し重みの和最小のハミルトン閉路を求める問題と述べることもできる．また，辺の重みが 2 種類に制限された巡回セールスマン問題はハミルトン閉路問題と等価であるとも言える．与えられたグラフに対し，ハミルトン閉路の存在を判定する問題（ハミルトン閉路問題）は NP 完全に属し，多項式時間アルゴリズムは期待できない．ハミルトン閉路に関しては本特集の小関氏の記事で触れられているが，ここでは時間計算量に関して筆者が関心をもっている部分について述べたい．巡回セールスマン問題と同じように，ハミルトン閉路の存在を保証するグラフに対する十分条件について盛んに研究されてきた．その際，各頂点の次数やグラフの頂点間の辺の多さ（密な度合い）を仮定することが多い．そのため，ループ，多重辺を含まない単純グラフを対象にするのが一般的である．

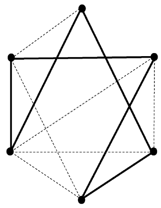

図 7　ハミルトン閉路

以下に，よく知られている定理を三つ挙げる．

定理 4 (Dirac [8])**．** G を n (≥ 3) 頂点の単純グラフとする．G の任意の頂点の次数が $n/2$ 以上ならば，G にはハミルトン閉路が存在する．

定理 5 (Ore [9])**．** G を n (≥ 3) 頂点の単純グラフとする．G の任意の非隣接 2 頂点の次数の和が n 以上ならば，G にはハミルトン閉路が存在する．

頂点数 $k+1$ 以上のグラフ G に対し，どの $k-1$ 点以下の頂点を取り除いても連結であるとき，G を k–連結と言う．さらに，この k の最大値を G の連結度と言う．また，グラフ $G = (V(G), E(G))$ の頂点部分集合 $S \subseteq V(G)$ のどの 2 頂点も非隣接であるとき，S を G の独立頂点集合と言う．最大独立頂点集合の位数を G の独立数と言う．

定理 6 (Chvátal and Erdős [10])**．** G を n (≥ 3) 頂点の単純グラフとする．G の連結度が G の独立数以上ならば，G にはハミルトン閉路が存在する．

定理 5 が定理 4 の拡張になっていることは容易にわかる．定理 6 が定理 5 の拡張であることも知られている [11].

いずれも頂点間の辺の多さ（密な度合い）が高いことを仮定することで，ハミルトン閉路の存在を示している．いずれの定理も背理法による証明がよく知られている．すなわち，最長道あるいは最長閉路を出発点とし，それが全頂点を含んでいない場合には，仮定を用いることでより長い道や閉路の存在を示すことで矛盾を導く．このあたりは証明をエレガントにすべく背理法で記述されることが多いが，証明を洗いなおすと，具体的にハミルトン閉路を求める多項式時間アルゴリズムを与えていることがわかる．すると，グラフが与えられたとき，上の定理（のいずれか）の仮定を満た

すことがわかれば，多項式時間で実際にハミルトン閉路を得ることができる．したがって，与えられたグラフに対し上の各定理の仮定を満たすかどうかを多項式時間で判定できればうれしい．定理 4, 5 は，各頂点あるいは非隣接 2 頂点の次数を調べることで容易に判定できる．しかし，定理 6 は容易ではない．グラフの連結度は多項式時間で得られるものの，独立数を求める問題は NP 困難であることが知られている．したがって，定理 4 から仮定を弱めていく過程で，仮定の判定において，定理 5 と 6 の間に時間計算量の大きな差がある．このあたりに目を向けると離散数学における結果がアルゴリズム的にもおもしろいものに見えてくる．この定理 6 の仮定の判定の難しさの周辺に関する研究は，文献 [12] にもある．

参考文献

[1] P. E. Hart, N. J. Nilsson and B. Raphael, "A formal basis for the heuristic determination of minimal cost paths," *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, **4**, pp. 100–107, 1968.
[2] R. W. Floyd, "Algorithm 97: Shortest path," *Communications of the ACM*, **5**, p. 345, 1962.
[3] S. Warshall, "A theorem on Boolean matrices," *Journal of the ACM*, **9**, pp. 11–12, 1962.
[4] J. Edmonds, "Paths, trees, and flowers," *Canadian Journal of Mathematics*, **17**, pp. 449–467, 1965.
[5] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*, 5th edition, Springer, 2012.
[6] J. Edmonds, "Maximum matching and a polyhedron with $0, 1$-vertices," *Journal of Research of the National Bureau of Standards-B*, **69B**, pp. 125–130, 1965.
[7] N. Christofides, "Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem," Management Sciences Research Report No. 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, 1976.
[8] G. A. Dirac, "Some theorems on abstract graphs," In *Proceedings of the London Mathematical Society*, **s3-2**, pp. 69–81, 1952.
[9] O. Ore, "Note on hamiltonian circuits," *The American Mathematical Monthly*, **67**, p. 55, 1960.
[10] V. Chvátal and P. Erdős, "A note on Hamiltonian circuits," *Discrete Mathematics*, **2**, pp. 111–113, 1972.
[11] J. A. Bondy, "A remark on two sufficient conditions for Hamilton cycles," *Discrete Mathematics*, **22**, pp. 191–193, 1978.
[12] D. Bauer, H. J. Broersma, A. Morgana and E. Schmeichel, "Polynomial algorithms that prove an NP-hard hypothesis implies an NP-hard conclusion," *Discrete Applied Mathematics*, **120**, pp. 13–23, 2002.