平面グラフ・曲面上のグラフ

野口　健太

本稿ではグラフ理論の中でも幾何学的な意味をもつグラフにスポットライトを当て，平面グラフと曲面上のグラフに関する話題を扱います．特に主題はグラフを目に見える形で描画すること，およびそこから生まれる問題意識です．グラフの描画方法は用途に応じてさまざまですが，辺の交差を許さない方法に重点を置いて紹介します．

キーワード：グラフ，平面グラフ，閉曲面

1. はじめに

数学は現実の現象をモデル化するのに至るところで役に立っていますが，本稿ではその中の一つである「グラフ」にスポットライトを当てます．グラフとは頂点集合と辺集合からなるネットワークのような構造であり，莫大な情報を扱うための有用なモデルとして昨今注目されています．特にインターネット上では検索エンジン，SNS，Twitter，路線検索などさまざまなツールの中にグラフ理論が用いられています．なおグラフの定義は，2015 年 12 月号の宮本裕一郎氏の記事 [1] も参照するとよいでしょう．

グラフとは頂点集合と，その二元部分集合族である辺集合からなる構造です．記号を用いると，グラフ G は頂点集合 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ と辺集合 $E\subset\binom{V}{2}$ の組 $G=(V,E)$ と表されます．

特に断りがない限り，G の頂点数を n，辺数を m でそれぞれ表します．たとえば図 1 は頂点集合が

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$$

であり，辺集合が

$$E=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_2v_3,v_2v_6,v_2v_7,v_3v_4,v_3v_5,\\ v_3v_6,v_4v_5,v_4v_6,v_5v_6,v_6v_7\}$$

であるグラフ G の例で，$n=7,m=13$ となります．これは 7 人が集まる食事会の，人を頂点で表し知り合い同士の二人の組を辺で結んだモデルと捉えることもできます．グラフは定義のみを考えると目に見えないものとして扱えるため，概念そのものは「抽象グラフ」と呼ぶこともあります．しかし一般的にグラフに触れる機会としては，図 1〜3 のように目に見える形で描画されたものが多いと思います．

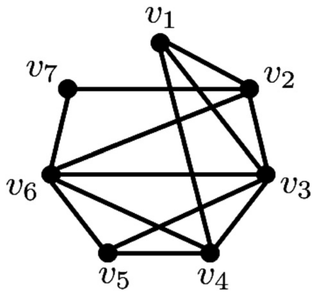

図 1　グラフ G

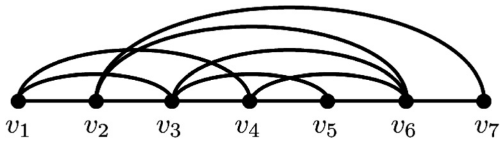

図 2　グラフ G の異なる描画

本稿で特にスポットライトを当てるのは，「平面グラフ」と呼ばれる，幾何（図形）的な意味をもったグラフです．隣接関係に注意すると，図 1 のグラフは図 2 や図 3 のようにも表せます．グラフの頂点同士の距離を気にせず，また辺を線分として描いても曲線で描いてもよいとすると，無数の描画の仕方があることがわかります．ここでは性質の異なるさまざまな描画を考えていきます．

まず気になる点は，同じグラフでも辺の交差が多い描画もあれば少ない描画もあるということです．図 1 のグラフ G の描画は辺の交差が 7 カ所，図 2 の描画も同じく 7 カ所ありますが，図 3 はうまく辺の交差が一つもないように平面に描画されています．これを G の平面への**埋め込み**と呼びます．辺の交差部分を頂点と見間違わないためにも，なるべく辺の交差が少ないように描いたほうがわかりやすいですね．平面上に辺の交

のぐち　けんた
東京電機大学情報環境学部
〒 270–1382 千葉県印西市武西学園台 2–1200
noguchi@mail.dendai.ac.jp

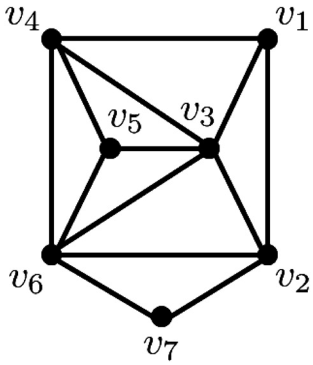

図 3　グラフ G の平面への埋め込み

差なく描くことができるグラフを**平面的グラフ**と呼び，平面的グラフを実際に平面に辺の交差なく描画したものを**平面グラフ**と呼びます．図 1 のグラフ G は平面的グラフであり，その平面への埋め込みである図 3 のグラフは平面グラフです．

2.　平面グラフ

ここで抽象グラフとして与えられたグラフが，平面への埋め込みをもつかどうか考えます．この問題は完全に解決されていて，次の定理があります．ここで**完全グラフ** K_n とは，n 頂点からなり，すべての頂点対が辺で結ばれているグラフを指します．また**完全二部グラフ** $K_{3,3}$ とは，$3+3=6$ 頂点からなるグラフで，3 頂点ずつからなる頂点集合の分割を X, Y とするとき，X と Y の間の任意の二点間にのみ辺が存在するグラフを指します．また**細分**とは，グラフの各辺に 0 頂点以上を追加したもの（すなわち，各辺を二頂点以上からなる道に置き換えたもの．道の定義は本特集の土屋氏の記事を参照）を指します（図 4 参照）．

定理 1 (Kuratowski [2])**.**　グラフ G が平面的であるための必要十分条件は，G が K_5 の細分と $K_{3,3}$ の細分をどちらも含まないことである．

定理 1 の主張をざっくり述べると，グラフを平面へ埋め込むときに邪魔になる構造は K_5 と $K_{3,3}$ の二つだけだということです．定理 1 を踏まえて，与えられたグラフ G が平面的グラフかどうかを判定する問題は，G の頂点数 n の線形時間で解けることが知られています．すなわち，与えられたグラフ G に対し，G が平面的ならば G の平面への埋め込みを与え，そうでないならば G の部分グラフのうち K_5 の細分または $K_{3,3}$ の細分を出力する線形時間アルゴリズムが知られています．

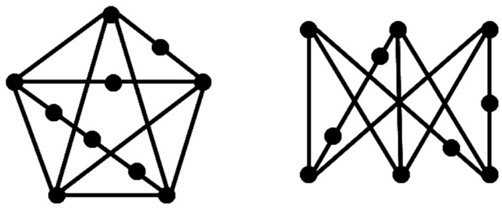

図 4　完全グラフ K_5 の細分と，完全二部グラフ $K_{3,3}$ の細分

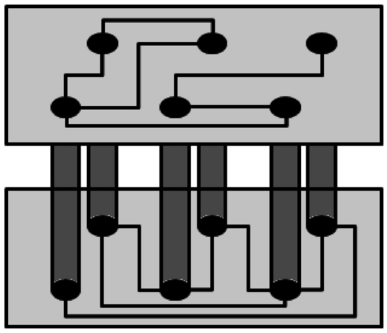

図 5　二枚の基板からなる電子回路の例

一方 G が平面的でない場合に，どのように辺を配置すればよいかという問題があります．これは現実の問題としては，たとえば電子回路に応用されています．複雑な配線をなるべく交差の数を減らして配置するにはどうすればよいかという問題です．図 5 は電子回路の簡略図で，円柱は電子部品を表し，それらを結ぶ配線を上下二枚の基板に配置しています．

基盤の枚数が電子回路全体の厚みだと考えると，枚数をなるべく少なくしたいですね．ここで電子部品を頂点，それらを結ぶ配線を辺とみなすと，電子回路全体で一つのグラフを構成していることがわかります．そのグラフによって最小で何枚の基板に埋め込むことができるかが決まります．たとえば 8 頂点からなる完全グラフ K_8 は，定理 1 より一枚の基板に埋め込むことはできませんが，図 6 のように二枚の基板には埋め込むことができます．（実線で表された辺を一枚目の基板に埋め込み，点線で表された辺を二枚目の基板に埋め込むと，各基盤において辺の交差がないことがわかります．）

一般に n 頂点からなる完全グラフ K_n は，$n=9,10$ の場合を除き，

$$\left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor$$

枚の基板に埋め込めることが知られています [3–7]．ここで $\lfloor x \rfloor$ は床関数と呼ばれ，実数 x に対して x 以下の

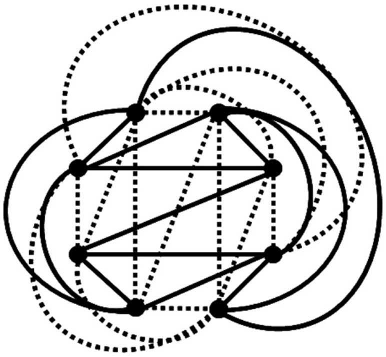

図 6　K_8 の二枚の基板への埋め込み

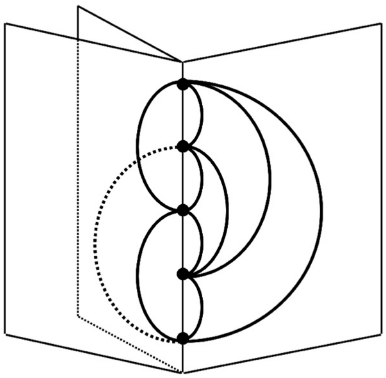

図 7　K_5 の 3 ページ埋め込み

最大の整数を表します．（これは $n \neq 9, 10$ で最良の値であり，$n = 9, 10$ の場合はそれぞれ三枚の基板に埋め込めます．）

この基盤の枚数の最小値を求める問題は，グラフの「厚み (thickness)」を求める問題として知られています．与えられたグラフの厚みを求める問題は NP 困難であることが知られています [8]．

また別の埋め込み方として，グラフの「本型埋め込み (book embedding)」と呼ばれるものがあります．これは頂点を本の背の部分に配置し，各ページに辺を交差がないように埋め込むときに必要なページ数の最小値を考える問題です．これは理論計算機科学の中の VLSI design と呼ばれる問題と関係があります [9, 10]．

たとえば 5 頂点からなる完全グラフ K_5 は，図 7 のように 3 ページ埋め込みをもつことがわかります．（点線で表された辺は 3 ページ目に描かれています．）一般に n 頂点からなる完全グラフ K_n は，

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

ページに埋め込めることが知られています [11]．この

図 8　トーラスと，ダブルトーラス

値は $n = 3$ のときを除き最良です．（K_3 は 1 ページに埋め込めます．）与えられたグラフの最小ページ数を求める問題はやはり NP 困難であることが知られています [9]．なお任意の平面的グラフは，4 ページ以下の本に埋め込めることが知られていますが [12]，4 が最良の値であるかどうかは未解決です．

3.　曲面上のグラフ

少し難しい話になりますが，平面グラフの一般化として，一般の 2 次元閉曲面へグラフを埋め込むことを考えることもできます．つまり 2 次元閉曲面上に辺の交差なく描くことができるグラフを考えます．たとえばトーラスと呼ばれる（図 8 左参照），ドーナツ状の閉曲面へ埋め込めるグラフを考えます．直感的にはトーラスの裏側をぐるっと回って辺を結ぶことができるため，さまざまなグラフが埋め込めそうです．実際に平面的グラフは明らかにトーラスへの埋め込みをもつので，トーラスへの埋め込みをもつグラフの集合は，平面的グラフの集合を含むことがわかります．

3 次元空間で実現可能な閉曲面は，「向き付け可能な閉曲面」と呼ばれています．向き付け可能とはざっくり説明すると，「右」と「左」が定義できるという意味です．向き付け可能な閉曲面は，球面にハンドルと呼ばれる構造をいくつ付けるか，つまり穴の数で分類されることが知られています（閉曲面の分類定理）．穴の数をその閉曲面の**種数**と呼びます．トーラスは種数 1 の向き付け可能な閉曲面です．ハンドルを付けるとは，トーラスをくっつけるイメージです．図 8 右は，トーラスにもう一つのトーラスをくっつけてできるダブルトーラスを表しています．閉曲面の種数をどれだけ大きくしてもよいのならば，どのようなグラフ G もある種数の閉曲面への埋め込みをもつことが次の方法でわかります．G を適当に辺の交差を許して平面に描画し（ただしその際，一点で三本以上の辺が交わらないようにします），その交差部分にトーラスをくっつけると辺の交差が解消されることがわかります（図 9 参照）．

このハンドルの追加を繰り返すことにより，グラフ G の辺の交差をすべて解消することができます．そこで平面的でないグラフを，なるべく種数が小さい向き付け可能な閉曲面へ埋め込みたいという自然な問題を

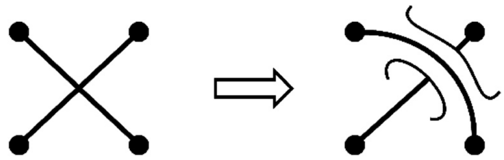

図 9　ハンドルの追加による辺の交差の解消

考えることができ，その最小値をグラフ G の**最小種数**と呼びます．与えられたグラフ G と非負整数 g の組に対し，G が種数 g の向き付け可能な閉曲面へ埋め込めるかどうかを判定する問題は，クラス P に属します．一方で，グラフの最小種数を求める問題は NP 困難であることが知られています [13]．また $n \geq 3$ に対し，完全グラフ K_n の最小種数 g は次の式で表されることが知られています．

$$g = \left\lfloor \frac{n^2 - 7n + 23}{12} \right\rfloor \tag{1}$$

この式は，グラフの頂点に色を塗るグラフ彩色の問題と強い関連があり，閉曲面上の地図の色の塗り分け問題へ解を与える「Map Color Theorem」としても知られています [14]．

なお一般の 2 次元閉曲面は，向き付け可能なものだけでなく向き付け不可能なものも存在し，同様に種数が定義できることが知られています．本稿では触れませんが，向き付け不可能な閉曲面におけるグラフの最小種数についても同様の結果が知られています．

4.　組合せ構造との関係

応用として，閉曲面に埋め込まれたグラフとほかの組合せ構造との関係を述べたいと思います．一般に $n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$ のとき，完全グラフ K_n の最小種数埋め込みは，式 (1) で求められる種数 g の向き付け可能な閉曲面の**三角形分割**となることが知られています．閉曲面 F^2 の三角形分割とは，F^2 に埋め込まれたグラフですべての領域が三辺で囲まれているもののことです．図 10 はトーラスを三角形分割している完全グラフ K_7 の例です．（図はトーラスの展開図を表しており，上と下，左と右をそれぞれ同一視するとトーラスが得られます．）

三角形面の集合を頂点三つ組の集合と捉えると，1 から n のどのペアもちょうど二つの三つ組に含まれていることがわかります．このような構造は組合せ論の中のデザイン理論と呼ばれる分野で扱われています．さらに三角形分割の面が，隣合う面には異なる色が割り当てられるように二色で塗り分けできるとき，片方の

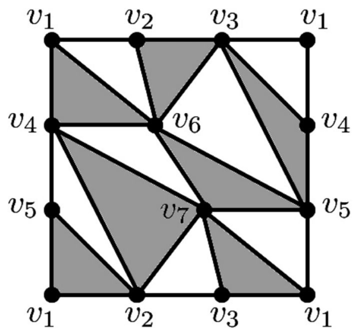

図 10　K_7 のトーラスへの三角形分割埋め込み

色で塗られた面の集合に注目すると，1 から n のどのペアもちょうど一つの三つ組に含まれていることがわかります．これはデザイン理論の中で「Steiner Triple System」と呼ばれるものです．例として再び図 10 を見てみましょう．隣合う面が同色にならないよう白と黒の二色で塗り分けられており，黒で塗られた七面を集めるとその集合は，

$$\bigl\{\{1,2,5\},\{1,3,7\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,7\},\{3,4,5\},\{5,6,7\}\bigr\}$$

となります．この中で 1 から 7 のどのペアも，ちょうど一つの三つ組のペアに含まれていることがわかります．

ここで紹介した組合せ構造を一般化したものは「ブロックデザイン」と呼ばれ，実験計画法に応用されています．

5.　まとめ

本稿ではグラフの描画とその応用に関する話題を集めましたが，いかがでしたでしょうか．ものとものの繋がりを具体的に図形で表現する方法はさまざまであり，理論的な側面と現実的な側面両方向から研究が進められています．その中で，幾何学・グラフ理論を利用したアプローチに少しでも興味をもっていただけたならば幸いです．

参考文献

[1] 宮本裕一郎，“集合・関数・グラフ理論の記法のてほどき—美術館定理を通じて—，”オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**60**(12), pp. 706–713, 2015.
[2] K. Kuratowski, “Sur le problème des courbes gauches en topologie,” *Fundamenta Mathematicae*, **15**, pp. 271–283, 1930.
[3] V. B. Alekseev and V. S. Gončakov, “The thickness of an arbitrary complete graph,” *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **30**, pp. 187–202, 1976.
[4] L. W. Beineke, “The decomposition of complete graphs into planar subgraphs,” *Graph Theory and*

Theoretical Physics, F. Harary (ed.), Academic Press, pp. 139–153, 1967.

[5] L. W. Beineke and F. Harary, "The thickness of the complete graph," *Canadian Journal of Mathematics*, **17**, pp. 850–859, 1965.

[6] J. Mayer, "Decomposition de K_{16} en trois graphes planaires," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **13**, p. 71, 1972.

[7] J. Vasak, "The thickness of the complete graph," Thesis paper (Ph.D.), University of Illinois at Urbana–Champaign, 1976.

[8] A. Mansfield, "Determining the thickness of graphs is NP-hard," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **93**, pp. 9–23, 1983.

[9] F. R. K. Chung, F. T. Leighton and A. L. Rosenberg, "Embedding graphs in books: A layout problem with applications to VLSI design," *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **8**, pp. 33–58, 1987.

[10] A. L. Rosenberg, "The Diogenes approach to testable fault-tolerant arrays of processors," *IEEE Transactions on Computers*, **C-32**, pp. 902–910, 1983.

[11] F. Bernhart, "The book thickness of a graph," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **27**, pp. 320–331, 1979.

[12] M. Yannakakis, "Embedding planar graphs in four pages," *Journal of Computer and System Sciences*, **38**, pp. 36–67, 1989.

[13] C. Thomassen, "The genus problem for cubic graphs," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **69**, pp. 52–58, 1997.

[14] G. Ringel, *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, 1974.

