バス乗務員スケジューリング問題に対する列生成アプローチ

澤井　佑樹

名古屋大学大学院情報科学研究科計算機数理科学専攻（現：(株) デンソー）
指導教員：柳浦睦憲　名古屋大学教授，橋本英樹　東京海洋大学准教授

1. はじめに

バス乗務員スケジューリング問題は，与えられたすべてのダイヤを実行するという条件の下で，乗務員数を最小化する問題である．1 人の乗務員が 1 日に受け持つダイヤの組合せを仕業と呼ぶ．仕業は乗務員の労働条件などのさまざまな制約を満たす必要がある．この問題に対して可能な仕業を全列挙したのち対応する集合被覆問題を厳密に解けば最適解を得られるが，計算量が最悪の場合には指数時間となり現実的でない．そこで本研究では列生成法 [1] を用いるアプローチを提案する．

列生成法の内部では，現在の仕業集合に対応する集合被覆問題の線形緩和問題（主問題）に対する双対問題から得られる双対価格をダイヤの重みとし，双対価格の重み和を最大とするダイヤの組合せを発見する問題（価格付け問題）を解く．得られた有効な仕業を仕業集合に追加するという操作を主問題の目的関数値を改善できなくなるまで繰り返す．最後に生成された仕業集合に対して集合被覆問題を解き，本問題の解を得る．価格付け問題を解く手法として，休憩時間に対する制約を緩和して定式化した問題を動的計画法により厳密に解くことで得られる双対価格の和を上界とし，それをもとに探索を行う手法を提案した．

実験では企業から提供された現実のデータである，ダイヤ数約 2000 の問題例を扱う．実験結果より，提案アルゴリズムが，企業のエキスパートによって作成された解よりも乗務員数を削減する解を出力することを確認した．

2. 問題定義と定式化

出発地点からバス停を複数経由し，到着地点まで運行する一連の業務をダイヤという．ここで，与えられる地点の中には車庫が含まれる．各ダイヤには出発時刻，到着時刻，出発地点，到着地点が与えられる．ダイヤの集合を $M=\{1,2,\ldots,m\}$ とする．あるダイヤの到着地点と次のダイヤの出発地点が異なる場合に行う移動を回送といい，各地点間の回送にかかる時間が与えられる．1 人の乗務員が 1 日に行うダイヤと回送の組合せを仕業という．仕業時間内で業務を行っていない時間のことを休憩という．ただし，ダイヤ間あるいはダイヤと回送間が 10 分未満の場合は，休憩ではなく業務とみなす．次に，本研究で扱う問題における仕業に対する制約を示す．

1. 仕業は車庫から出発し車庫に戻る．
2. 一つの仕業の開始から終了までは 590 分以内.
3. 一つの仕業の開始から終了までが 6 時間を超える場合は 45 分以上，8 時間を超える場合は 60 分以上の休憩が必要である（労働基準法による制約）.
4. 任意の連続する 270 分以内に 30 分以上の休憩が必要である．

これらすべての制約を合わせて仕業制約と呼ぶ．仕業制約を満たす仕業すべての集合を $N_{\rm all}$ とする．その中から全ダイヤを含むように仕業集合 $N \subseteq N_{\rm all}$ を選び，仕業数 $|N|$ を最小化（すなわちのべ乗務員数を最小化）することが本問題の目的である．

ここで本問題を解くため，集合被覆問題に基づいた定式化を行う．各仕業 $j \in N_{\rm all}$ に含まれるダイヤの集合を M の部分集合 S_j とする．a_{ij} を，仕業 j がダイヤ i を含むなら 1，そうでなければ 0 と定める．$x_j \in \{0,1\}$ を，仕業 S_j がスケジュールに含まれるなら 1，そうでなければ 0 となる変数とみなせば，バス乗務員スケジューリング問題は，

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \sum_{j\in N_{\rm all}} x_j && && (1)\\ &\text{subject to} && \sum_{j\in N_{\rm all}} a_{ij}x_j \ge 1 && \forall i \in M && (2)\\ & && x_j \in \{0,1\} && \forall j \in N_{\rm all} && (3)\end{aligned}$$

と定式化できる．式 (1)–(3) で表されるこの問題を BSP($N_{\rm all}$) と呼ぶ．実世界の問題例ではすべての実行可能な仕業 $N_{\rm all}$ を列挙することは非現実的である．そのため次節で提案する方法により生成した $N \subseteq N_{\rm all}$ を用いて BSP(N) を解く．

3. 提案アルゴリズム

3.1 列生成法

列生成法でははじめに初期仕業集合 N_0 を生成し，

N_0 を N に代入する．各反復では，BSP(N) の制約式 (3) を $x_j \geq 0$ に置き換えた線形緩和問題 P(N) を解くことで，最適解に対応する各ダイヤの双対価格 π_i^* $(i \in M)$ を得る．ここで，列の追加によって P(N) の最適値を下げるためには，$\sum_{i \in M} a_{i\rho}\pi_i^* > 1$ を満たす列 $\rho \in N_{\text{all}} \setminus N$ を N に追加することが必要である．この左辺を最大化する問題を価格付け問題と呼び，$\max_{\rho \in N_{\text{all}} \setminus N} \sum_{i \in M} a_{i\rho}\pi_i^*$ と定式化できる．価格付け問題を解き，得られる ρ を N に追加し P(N) を解くことを，価格付け問題の最適値が 1 を超えなくなるまで繰り返すことで，仕業集合 N を生成する．

3.2 グラフの生成

価格付け問題を解くため，ダイヤをグラフの頂点と対応づける．ダイヤ i を運行した直後に運行可能なダイヤの集合を V_i^+ とする．$v \in V_i^+$ に対して，iv 間に有向辺 e_{iv} を引く．またすべての頂点 $i \in M$ が，頂点 α からの有向辺 $e_{\alpha i}$ と，頂点 β への有向辺 $e_{i\beta}$ をもつよう，ダミー頂点 α と β をグラフに追加する．生成したグラフを用いることで，価格付け問題は α から β へと向かう仕業制約を満たすパス上の双対価格の合計を最大化する問題と言い換えることができる．

3.3 価格付け問題を解くための提案手法

動的計画法の設計について，i 番目のダイヤ終了時における仕業の総時間が丁度 t $(0 \leq t \leq 590)$ 分である時の，双対価格の合計の最大値を $q(i,t)$ と定義する．また V_i^- を，i 番目のダイヤの直前に運行可能なダイヤの集合と定義すると，ダイヤ i の開始時刻 f_i とその到着時刻 g_i，およびダイヤ i 運行直後に運行可能なダイヤ j への有向辺 e_{ij} がもつ回送時間 h_{ij} を用いて，$q(i,t)$ は漸化式

$$q(\alpha,t) = \begin{cases} 0 & (t=0) \\ -\infty & (t \neq 0) \end{cases} \tag{4}$$

$$q(i,t) = \max\Big\{q(\alpha, t-h_{\alpha i}-(g_i-f_i)), \max_{v \in V_i^- \setminus \{\alpha\}} q(v, t-(g_i-g_v))\Big\} + \pi_i^* \quad (i \neq \alpha, \beta) \tag{5}$$

$$q(\beta,t) = \max_{v \in V_\beta^-} q(v, t-h_{v\beta}) \tag{6}$$

によって与えられる．

しきい値 U に対して $\sum_{i \in M} a_{i\rho}\pi_i^*$ が U を超えるパスを，$q(\beta,t) > U$ を満たす状態 (β,t) から始め，深さ優先探索の探索順で，動的計画法の計算とは逆の向きに状態を辿ることで得る．その際，(β,t) から現在探索中の状態 (i,t') までのパス（仕業の後部に相当する部分）上の双対価格の合計と $q(v,t'')$（ただし $t'' = t'-(g_i-g_v)$）の和が U を超える $v \in V_i^-$ のいずれかを選ぶ．得られたパスを仕業候補として，仕業制約を満たすか否かを判定する．仕業制約を満たすのであれば，仕業候補を仕業集合 N に追加し，さらに探索を続ける．条件を満たす仕業が一つも発見されなかった場合は，P(N) の最適値が得られているため，列生成法を終える．

表 1 提案手法と企業の解との比較

問題例	ダイヤ数	提案手法			企業解
		$\|N\|$	P(N)	BSP(N)	
平日 1	2312	22567	149.605	150	162
土曜 1	2016	22136	123.736	124	133
日曜	1914	18993	118.053	119	120

4. 計算実験とまとめ

3 節で示した提案手法の有効性を検証するため，計算実験を行った．実験では企業から提供された現実のデータである，ダイヤ数約 2000 の問題例を扱う．列生成を行う制限時間を 3600 秒とする．実験結果を表 1 に示す．列生成終了後の仕業数を欄 $|N|$ に，問題 P(N) の最適値と問題 BSP(N) に対して得られた解の目的関数値をその右 2 列に記す．企業のエキスパートが生成した解を“企業解”に示す．表 1 より，提案アルゴリズムが企業解よりも乗務員数を削減する解を出力することを確認した．また別の実験により，ダイヤ数 1500 程度までの問題例に対しては，提案手法によって現実的な時間内で最適値までの誤差が 1.5%以内の評価値が得られることを確認した．

参考文献

[1] G. Desaulniers, J. Desrosiers and M. M. Solomon (eds.), *Column Generation*, Springer, 2005.