Recovery Theorem を用いた Forward Looking な収益率分布の推定

霧生　拓也

慶應義塾大学大学院理工学研究科開放環境科学専攻（現：（株）三菱 UFJ トラスト投資工学研究所）
指導教員：枇々木規雄　慶應義塾大学教授

1. 研究の背景と目的

近年，オプション価格から導出したリスク中立分布から投資家のリスク選好を計算して実分布に分布を調整する定理 (Recovery Theorem; RT) が Ross [1] により示された．この定理を用いて推定した実分布は forward looking な性質をもつことから，多くの金融の問題への応用が期待される．しかし，推定の過程で非適切問題を解く必要があるため，精度よい推定値を得ることは難しい．本研究では RT を用いた実分布の推定に関して議論する．具体的には，非適切問題に対して先験情報を考慮して解を安定化する方法を提案し，仮想データを用いた推定精度に関する分析によってその有効性を示す．さらに，提案法を用いて米国株式オプション価格から推定した分布の予測力の分析を通して，RT の有用性について検証する．

2. Recovery Theorem (Ross [1])

RT は離散時間有限状態の下で導くことができる定理である．状態 $i(=1,\ldots,n)$ から状態 $j(=1,\ldots,n)$ への推移に関する状態価格を $p_{i,j}$，リスク中立確率を $q_{i,j}$，実確率を $f_{i,j}$ とし，それらを行列の形で表現したものをそれぞれ P,Q,F と表す．

定理 1. (RT) 時間加法的効用関数をもつ代表的投資家が存在し，P は既約であるとする．このとき，λ を P の最大固有値，v_i をその固有ベクトルの第 i 成分とすると，実確率 $f_{i,j}$ は次の式で表せる．

$$f_{i,j} = \frac{1}{\lambda}\frac{v_j}{v_i}p_{i,j} \quad (i,j=1,\ldots,n) \tag{1}$$

定理 2. （特殊ケース）P の行和が等しいとき，実分布 F とリスク中立分布 Q は一致する．

3. 実分布の推定方法

実分布を推定する手順は図 1 のように三つのステップに分けられる．ここでは Step 2 に注目して議論する．現在の状態 i_0 から状態 j への $\tau(=1,\ldots,m)$ 期

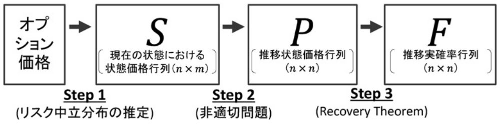

図 1　RT を用いた実分布 F の推定手順

の推移に関する状態価格 $s_{j,\tau}$ を成分にもつ行列を S とし，S^T の最終行（1 行目）を除いた行列を $A(B)$ とする．このとき状態推移が時間均一なマルコフ過程に従うと仮定すると $AP=B$ の関係が成り立つ．この両辺の差が小さくなるように P を推定すればよい．

$$\min_{P} \quad ||AP-B||_2^2 \tag{2}$$

Audrino et al. [2] は式 (2) が非適切問題になることを指摘し，非適切問題に対する一般的な解の安定化方法である Tikhonov 法を用いることを提案している．

$$\min_{P} \quad ||AP-B||_2^2 + \zeta||P||_2^2 \tag{3}$$

第 2 項は正則化項と呼ばれ，解を安定化する役割をもつ．ζ はフィッティングと安定性をコントロールする正則化パラメータである．この方法では P の各成分の値が小さいという先験情報の下で問題を解くことになるが，P は状態価格行列であるため，この先験情報の下で推定を行うことは適切であるとは考えにくい．

そこで，本研究では次のような二つの先験情報を用いて解 P を安定化する推定方法を提案する．(1) 実分布はリスク中立分布と近い，(2) ほかの状態のリスク中立分布は現在の状態のリスク中立分布と近い．具体的には次の問題を解いて P を推定する．

$$\min_{P} \quad ||AP-B||_2^2 + \zeta||P-\bar{P}||_2^2 \tag{4}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{1,1}+s_{2,1} & \cdots & s_{i_0,1} & s_{i_0+1,1} & s_{i_0+2,1} & \cdots & 0 \\ s_{1,1} & \cdots & s_{i_0-1,1} & s_{i_0,1} & s_{i_0+1,1} & \cdots & s_{n,1} \\ 0 & \cdots & s_{i_0-2,1} & s_{i_0-1,1} & s_{i_0,1} & \cdots & s_{n-1,1}+s_{n,1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{5}$$

$\bar{P}$ が先験情報を表す行列である．定理 2 より，この方法では $\zeta\to\infty$ の場合に得られる実分布の推定量はリスク中立分布に一致する．このことから，提案法はリ

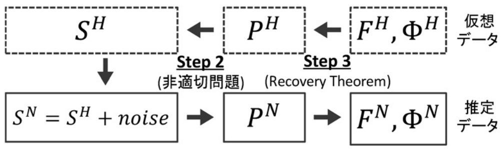

図 2　推定精度の分析の概要

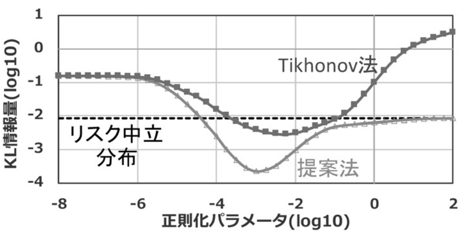

図 3　正則化パラメータ ζ と KL 情報量の関係

スク中立分布をベースに実分布を推定する方法であるといえる．RT はリスク中立分布から実分布を得る定理であるので，これは方法論として自然な方法である．

4. 仮想データを用いた推定精度の分析

4.1 分析の概要と設定条件

仮想データとして与えた実分布とノイズが含まれるデータから推定した実分布を比較することで推定精度について分析する．概要を図 2 に示す．

仮想データとして実確率 F^H とプライシングカーネル Φ^H を与え，通常の推定と逆の手順で S^H を計算する．S^H に対してノイズを加えた S^N から通常の手順で F^N を推定する．F^H と F^N の差異を KL 情報量によって評価することで Step 2 の推定法が精度に与える影響を検証する．また，仮想データ Φ^H は相対的リスク回避度 (RRA) が 3 の CRRA 型効用を持つ投資家を想定して作成し，F^H は 1950 年から 2014 年までの S&P500 の過去データをもとに作成した

4.2 結果と考察

提案法と Tikhonov 法の推定精度を比較した結果を図 3 に示す．KL 情報量が小さくグラフが下側にあるほど推定精度が高いことを表す．「リスク中立分布」は RT を用いてリスク調整する前の分布を表すので，これよりも KL 情報量が小さくなることが精度よい推定値を得られているかどうかを判断する一つの基準となる．

ζ の水準にかかわらず，Tikhonov 法に比べて提案法の推定精度が高かった．これは提案法の正則化項がより適切に設定されていることを示している．

表 1　予測力の検定（p 値）

	リスク中立分布	実分布
KS 検定	0.2728	0.4269
Berkowitz 検定	0.0132	0.0519

5. 実データを用いた分布の予測力の分析

5.1 分析の概要と設定条件

2001 年 1 月 4 日から 2015 年 12 月 1 日までの各月の最初の取引日の S&P500 オプションデータから次の推定日までの実分布を提案法を用いて推定し，その実現値に対する予測力を統計的検定手法を用いて評価する．Step 1 の推定には霧生と枇々木 [3] の薄板平滑化スプラインを用いる方法を利用する．また，予測力の検定には KS 検定と Berkowitz 検定の 2 通りの方法を用いる．

5.2 結果と考察

それぞれの検定における「予測力がある」という帰無仮説に対する検定の結果を表 1 に示す．

KS 検定ではどちらの分布に対しても帰無仮説は棄却されなかった．Berkowitz 検定ではリスク中立分布は 5%有意で棄却されたが，実分布は棄却されなかった．さらに，どちらの検定においても p 値はリスク中立分布の場合に比べて実分布の場合が高かったことから RT による分布の調整で予測力が高まったといえる[1]．

6. 結論

本研究では RT を用いて実分布の精度よい推定値を得るための新たな推定法を提案した．また，数値分析を通して以下の 2 点を明らかにした．

1. **（提案法の有効性）** 先験情報を考慮して正則化項を設定した提案法は既存の方法に比べて精度よい実分布の推定値を得られること
2. **（RT の有用性）** 提案法で推定した実分布の予測力はリスク中立分布の予測力を上回ること

参考文献

[1] S. Ross, “The recovery theorem,” *The Journal of Finance*, **70**, pp. 615–648, 2015.
[2] F. Audrino, R. Huitema and M. Ludwig, “An empirical analysis of the Ross recovery theorem,” http://ssrn.com/abstract=2433170
[3] 霧生拓也，枇々木 規雄，“複数資産にインプライド分布を用いた最適資産配分モデル，” *Transactions of the Operations Research Society of Japan*, **57**, pp. 112–134, 2014.

[1] 具体的な結果は省略するが，Tikhonov 法を用いて推定した場合は分布の予測力は低下した．