離散最適化問題に対するネットワーク表現とk-劣モジュラ緩和

岩政　勇仁

東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻
指導教員：平井広志　東京大学准教授

1. はじめに

劣モジュラ関数 (*submodular function*) とは，$\{0,1\}^n$ 上の関数 f で，任意の $x, y \in \{0,1\}^n$ に対して以下の不等式を満たすものである．

$$f(x) + f(y) \geq f(x \wedge y) + f(x \vee y).^1$$

また，k-劣モジュラ関数 (k-*submodular function*) [1] とは，$[0,k]^n$ 上[2]の関数 f で，任意の $x, y \in [0,k]^n$ に対して以下の不等式を満たすものである．

$$f(x) + f(y) \geq f(x \sqcap y) + f(x \sqcup y).^3$$

劣モジュラ関数と k-劣モジュラ関数は，多項式時間可解性との密接な関わりや応用範囲の広さの面で，離散最適化問題の中で重要な関数クラスと位置づけられている．本論文では，劣モジュラ関数や k-劣モジュラ関数最小化問題をより高速に解く手段であるネットワーク表現と，k-劣モジュラ関数のさらなる応用手段である k-劣モジュラ緩和についての研究を行った．

2. ネットワーク表現

関数 $f : \{0,1\}^n \to \overline{\mathbb{Q}}$ に対し，以下の性質を満たす非負枝容量付き有向グラフ $G = (V, E)$ と定数 $\kappa \in \mathbb{Q}$ が存在するとき，f はネットワーク表現可能であるという．

・$V \supseteq \{s, t, 1, \ldots, n\}$.
・任意の $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ に対して，

$$f(x) = \min\{C(X) \mid X\text{: } s\text{-}t \text{ cut}, X(i) = x_i \text{ for } i \in [n]\} + \kappa.$$

この定義は，Kolmogorov and Zabih [2] による．ネットワーク表現可能であるのは劣モジュラ関数のみだが，ある 4 変数劣モジュラ関数がネットワーク表現不可能であることが，Živný et al. [3] によって示された．表現不可能性を示す際に，VCSP (Valued Constraint Satisfaction Problem) と呼ばれる分野で用いられている代数的な手法を使っている．劣モジュラ関数だけでなく，k-劣モジュラ関数をネットワーク表現する試みが，石井 [4] や，Iwata et al. [5] によって行われている．しかし，その定義は確立されているとはいえず，VCSP の理論が使えない枠組みとなっていた．そこで，本研究で一般の有限集合 D^n 上の関数に対するネットワーク表現性の定義を確立した．この定義は，VCSP の理論が使える統一的なものとなっている．以下では定義の拡張を行う．

関数 $f : D^n \to \overline{\mathbb{Q}}$ と $k \in \mathbb{Z}_{++}$，$\rho : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^k$，$\sigma : D \to \{0,1\}^k$ に対し，以下の性質を満たす非負枝容量付き有向グラフ $G = (V, E)$ と定数 $\kappa \in \mathbb{Q}$ が存在するとき，f は (k, ρ, σ)-ネットワーク表現可能であるという．

・$V \supseteq \{s, t\} \cup \{i^l \mid (i, l) \in [n] \times [k]\}$.
・$x = (x_1^1, \ldots, x_1^k, \ldots, x_n^1, \ldots, x_n^k) \in \{0,1\}^{kn}$ に対して，

$$C_{\min}(x) \geq C_{\min}(\rho(x_1^1, \ldots, x_1^k), \ldots, \rho(x_n^1, \ldots, x_n^k))$$

が成立する．ここで，$C_{\min} : \{0,1\}^{kn} \to \overline{\mathbb{Q}}$ は

$$x \mapsto \min\{C(X) \mid X\text{: } s\text{-}t \text{ cut}, X(i^l) = x_i^l \text{ for } (i,l) \in [n] \times [k]\}$$

と定義される関数である．
・任意の $y = (y_1, \ldots, y_n) \in D^n$ に対して，

---

1 $\wedge, \vee$ は，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$ に対して，

$$(x \wedge y)_i := \begin{cases} 1 & \text{if } x_i = y_i = 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$(x \vee y)_i := \begin{cases} 1 & \text{if } x_i = 1 \text{ or } y_i = 1, \\ 0 & \text{if } x_i = y_i = 0 \end{cases}$$

と定義される二項演算子である．

2 $[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$，$[0,k] := [k] \cup \{0\}$ と定義する．

3 $\sqcap, \sqcup$ は，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in [0,k]^n$ に対して，

$$(x \sqcap y)_i := \begin{cases} x_i & \text{if } x_i = y_i, \\ 0 & \text{if } x_i \neq y_i, \end{cases}$$

$$(x \sqcup y)_i := \begin{cases} y_i \ (\text{resp. } x_i) & \text{if } x_i = 0 \ (\text{resp. } y_i = 0), \\ x_i & \text{if } x_i = y_i, \\ 0 & \text{if } 0 \neq x_i \neq y_i \neq 0 \end{cases}$$

と定義される二項演算子である．

$$f(y) = C_{\min}(\sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_n)) + \kappa.$$

Kolmogorov and Zabih によるネットワーク表現性の定義は，$(1, \mathrm{id}, \mathrm{id})$-ネットワーク表現性と等価である．双劣モジュラ関数 $(k = 2)$ に対する石井によるネットワーク表現性の定義と，Iwata et al. によるネットワーク表現性の定義は，$\rho_k : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^k, \sigma_k : [0,k] \to \{0,1\}^k$ を

$$\rho_k(x) := \begin{cases} x & \text{if } |\{i \mid x_i = 1\}| = 1, \\ (0, \ldots, 0) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\sigma_k(x) := \begin{cases} (0, \ldots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \ldots, 0) & \text{if } x = i \in [k], \\ (0, \ldots, 0) & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

としたときの，(k, ρ_k, σ_k)-ネットワーク表現性の部分クラスであるとみなせる．

新たな定義の下でのネットワーク表現可能範囲について，以下の定理を得た．

定理 1. $\{0,1\}^n$ 上の関数に対して，$(1, \mathrm{id}, \mathrm{id})$-ネットワーク表現不可能かつ，ある k, ρ, σ に対して (k, ρ, σ)-ネットワーク表現可能なものは，単調増加関数もしくは単調減少関数に限られる．

単調増加関数や単調減少関数の最小化は自明な問題である．よって，定理 1 より，$\{0,1\}^n$ 上の関数においては，$(1, \mathrm{id}, \mathrm{id})$-ネットワーク表現性のみを考えれば十分ということがわかる．

石井の結果より，任意の 2 変数双劣モジュラ関数は，$(2, \rho_2, \sigma_2)$-ネットワーク表現可能であるといえ，Iwata et al. の結果より，基本 k-劣モジュラ関数は，(k, ρ_k, σ_k)-ネットワーク表現可能であるといえる．本研究では，この結果を踏まえて，以下の定理を示した．

定理 2. ある 3 変数双劣モジュラ関数は，$(2, \rho_2, \sigma_2)$-ネットワーク表現不可能．また，ある 2 変数 k-劣モジュラ関数 $(k \geq 3)$ は，(k, ρ_k, σ_k)-ネットワーク表現不可能．

3. k-劣モジュラ緩和

$[0,k]^n$ 上の関数 g が，$[k]^n$ 上の関数 f の k-劣モジュラ緩和 [5, 6] であるとは，g が k-劣モジュラ関数であって，その定義域を $[k]^n$ に制限したときに，関数として f に一致することをいう．k-劣モジュラ緩和は，さまざまな NP 困難問題の緩和に用いられており，多くの応用をもつ．そこで，$[k]^n$ 上の関数 f が与えられたとき，f が k-劣モジュラ緩和可能かを判定する問題が自然に生じる．本研究では，k-劣モジュラ緩和可能な関数の特徴づけや，k-劣モジュラ緩和構成アルゴリズムに関して，以下の結果を得た．

定理 3. 関数 $f : [k]^n \to \overline{\mathbb{R}}$ が k-劣モジュラ緩和可能であることの必要十分条件は，任意の $x, y, z \in \mathrm{dom}\ f$ に対して，$\theta(x, y, z) \in \mathrm{dom}\ f$ となることである．

ここで，$\theta : [k]^3 \to [k]$ は以下のように定義される演算子である．

$$\theta(a, b, c) := \begin{cases} a & \text{if } a = b, \\ c & \text{if } a \neq b. \end{cases}$$

定理 4. $[k]^n$ 上の関数 f に対して，k-劣モジュラ緩和可能か否かを判定し，緩和可能であるなら f の k-劣モジュラ緩和を返す，$\mathrm{O}((k^n)^2)$ 時間アルゴリズムが存在する．さらに，f が緩和可能であるとき，そのアルゴリズムの出力解 g は以下の性質をもつ．

1. f が整数値関数ならば，g は半整数値関数．
2. f が 2 変数関数であるとき，任意の f の k-劣モジュラ緩和 g' に対して，

$$g(x) \geq g'(x) \qquad (x \in \mathrm{dom}\ g)$$

を満たす．

参考文献

[1] A. Huber and V. Kolmogorov, "Towards minimizing k-submodular functions," In *Proceedings of the 2nd International Symposium on Combinatorial Optimization (ISCO'12)*, pp. 451–462, Springer, 2012.

[2] V. Kolmogorov and R. Zabih, "What energy functions can be minimized via graph cuts?" *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **26**, pp. 147–159, 2004.

[3] S. Živný, D. A. Cohen and P. G. Jeavons, "The expressive power of binary submodular functions," *Discrete Applied Mathematics*, **157**, pp. 3347–3358, 2009.

[4] 石井勇太, "歪対称ネットワークによる k-劣モジュラ関数の表現に関する研究，" 東京大学，修士論文，2014.

[5] Y. Iwata, M. Wahlström and Y. Yoshida, "Half-integrality, LP-branching and FPT algorithms," *SIAM Journal on Computing*, **45**, pp. 1377–1411, 2016.

[6] I. Gridchyn and V. Kolmogorov, "Potts model, parametric maxflow and k-submodular functions," In *Proceedings of International Conference on Computer Vision (ICCV'13)*, pp. 2320–2327, 2013.